数理解析研究所講究録 第2093巻 2018年 104-115

非線形Schrödinger方程式の解のlifespanと零構造の関わり

大阪大学・理学研究科　砂川 秀明 (Hideaki Sunagawa)

1986年にKlainerman[26]とChristodoulou[4]によって非線形波動方程式に対して導入された**零条件** (null condition) と呼ばれる構造条件は, 現在では非線形双曲型方程式の研究における最重要概念のひとつとして広く認知されている. 本稿の目的は, 「非線形分散型方程式, とくにSchrödinger方程式, における零条件の対応物は何か?」という問題に関して筆者がこれまでに発表したいくつかの結果とその関連事項について概説することである. 本稿の構成は以下の通りである. まず第1節で非線形波動方程式の解のlifespanの評価と零構造の関わりについて簡単に復習し, 続く第2節では斉3次の非線形項を伴う1次元Euclid空間上のSchrödinger方程式の解の長時間挙動に関する典型的な結果を列挙する. そして第3節において, それらの諸結果がlifespanの評価という視点から統一的に眺められること, また, ある意味でそれが零構造と密接に関わると解釈できること, を説明する. なお, 本稿では技術的なことには一切触れない. 主結果 (定理3.1) の証明やその他詳細については, 佐川侑司氏との共著論文 [35] およびそこに引用されている文献を参照されたい.

1　非線形波動方程式の解のlifespanと零構造の関わり: 復習

この節を通し, $t \in \mathbb{R}$ と $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して $\partial_0 = \partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$ $(j = 1, 2, 3)$, $\nabla_x = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$, $\partial = (\partial_t, \nabla_x) = (\partial_k)_{0 \le k \le 3}$, $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$, $\Box = \partial_t^2 - \Delta$ という記法を用いる. 初期値問題

$$
\begin{cases} \Box u = F, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = \varepsilon\varphi(x), \quad \partial_t u(0,x) = \varepsilon\psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{1.1}
$$

を考える. ここで $u : [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は未知関数, $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ は与えられた関数, $\varepsilon > 0$ は十分小さいパラメーターであるとする [1]. $F \equiv 0$ ならば線形であり, 性質はよくわかってい

[1] 初期条件をこのような形で与えるのは, 初期値の持つ情報のうち「大きさ」とそれ以外を分離しておいた方が今の目的のためには都合がよいからである. また, C_0^∞ という制約についてもある程度の緩和は可能であるが, そういった点にはここでは立ち入らない.

る．興味があるのは非線形の場合である．ここでは特に，$a, b \in \mathbb{R}$ を定数として

$$F = a(\partial_t u)^2 + b|\nabla_x u|^2 \tag{1.2}$$

で与えられる場合から話を始めよう．1981 年に John [19] は $(a, b) = (1, 0)$ の場合に非線形項 (1.2) を伴う初期値問題 (1.1) の非自明な古典解が，ε がいくら小さくても有限時間で爆発することを示した．その後の多くの研究により，$a + b \neq 0$ の場合にも古典解は有限時間で爆発することが分かっている (例えば Hanouzet-Joly [6] 等)．これに対し，$a + b = 0$ の場合には，ε がある程度小であれば (1.1)–(1.2) の古典解は時間大域的に存在する．実際このとき方程式は

$$\Box u = a((\partial_t u)^2 - |\nabla_x u|^2) \tag{1.3}$$

となるが，これは $w(t, x) = \{1 - e^{-au(t,x)}\}/a$ とおくことで自由波動方程式 $\Box w = 0$ へ変換される．また，容易に分かるように，ε が十分小さければ，w に対応する初期値も C_0^∞ であって十分小さい．したがって

$$u(t, x) = \frac{-1}{a} \log\bigl(1 - aw(t, x)\bigr) = w + \frac{a}{2}w^2 + \frac{a^2}{3}w^3 + \cdots$$

が所望の大域解となる [2]．この $a + b \neq 0$ と $a + b = 0$ とでの著しい違いをどう理解したらいいのだろうか? これが零条件への最初の一歩である．

次に，g_{jkl} を実定数として，

$$F = \sum_{j,k,l=0}^{3} g_{jkl}(\partial_j u)\partial_k \partial_l u \tag{1.4}$$

で与えられる場合に注目しよう．1987 年，John[20] と Hörmander[16] は独立に次のことを示した:

命題 1.1. 非線形項 (1.4) を伴う初期値問題 (1.1) の古典解の最大存在時間を T_ε とするとき，

$$\liminf_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log T_\varepsilon \geq \frac{1}{\sup\limits_{(\rho,\omega)\in\mathbb{R}\times S^2} \bigl\{G(\omega)\partial_\rho^2 \Phi(\rho, \omega)\bigr\}} \in (0, +\infty] \tag{1.5}$$

が成り立つ (右辺が 1/0 となる場合は $+\infty$ と読み替える)．ここで S^2 は 2 次元単位球面であり，$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in S^2$ に対して

$$G(\omega) = \frac{-1}{2} \sum_{j,k,l=0}^{3} g_{jkl}\tilde{\omega}_j\tilde{\omega}_k\tilde{\omega}_l, \qquad \tilde{\omega}_j = \begin{cases} -1 & (j = 0), \\ \omega_j & (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

[2] [25] の p.45 には，このことを指摘したのは Nirenberg であると書いてある ([27] の序文も参照のこと)．なお，この考察から，(1.3) の大域解 $u(t, x)$ は $t \to +\infty$ において $w(t, x)$ に漸近する (つまり，漸近的に自由である) ことも分かる．

また,

$$\Phi(\rho,\omega)=\frac{1}{4\pi}\int_{\omega\cdot y=\rho}\psi(y)\,d\sigma_y-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{\omega\cdot y=\rho}\varphi(y)\,d\sigma_y,\qquad(\rho,\omega)\in\mathbb{R}\times S^2.$$

注意 1.1. G は非線形項の形状 (つまり g_{jkl}) のみで決まる関数, Φ は初期値のうち大きさ以外の情報 (つまり φ と ψ) のみで決まる関数である.

任意の $\omega\in S^2$ に対して $G(\omega)=0$ が満たされるとき, **零条件**が満たされるという[3]. このとき (1.5) の右辺は $+\infty$ となり, 解の存在時間は一般の場合よりも長いことが見て取れるが, 実はより強く, ε が十分小さい時 $T_\varepsilon=+\infty$ であること, つまり小さい初期値に対する時間大域解の存在, が示されている (Klainerman[26], Christodoulou[4]). また, 簡単な代数計算により, F が (1.4) で与えられる場合に零条件が満たされることは, F が $Q_0(u,\partial_k u)$ $(0\le k\le 3)$ および $Q_{jk}(u,\partial_l u)$ $(0\le j,k,l\le 3)$ の線形結合として表せることと同値であることが確かめられる. 但し Q_0, Q_{jk} は

$$Q_0(f,g)=(\partial_t f)(\partial_t g)-(\nabla_x f)\cdot(\nabla_x g),\quad Q_{jk}(f,g)=(\partial_j f)(\partial_k g)-(\partial_k f)(\partial_j g)$$

によって定義される 2 次形式で, これらは**零形式** (null forms) と呼ばれる. 零形式は d'Alembertian と様々な意味で相性が良い. 例えば

$$H_j=t\partial_j+x_j\partial_t\ \ (1\le j\le 3),\quad \Omega_{kl}=x_k\partial_l-x_l\partial_k\ \ (1\le k<l\le 3),\quad S=t\partial_t+x\cdot\nabla_x$$

によって定まるベクトル場は $[\Box,H_j]=[\Box,\Omega_{kl}]=0$, $[\Box,S]=2\Box$ という交換関係を満たすという意味で $\Box$ と相性の良いベクトル場と言えるが, これらを用いると零形式は

$$Q_0(f,g)=\frac{1}{t}\Big\{(Sf)(\partial_t g)-\sum_{j=1}^{3}(\partial_j f)(H_j g)\Big\},$$
$$Q_{kl}(f,g)=\frac{1}{t}\Big\{(H_k f)(\partial_l g)-(H_l f)(\partial_k g)-(\partial_t f)(\Omega_{kl} g)\Big\}$$

のように, 顕わな減衰因子 $1/t$ を持つ形に書き替えることができる (これは [26] における証明のポイントの 1 つであった). また, 先に述べた Nirenberg の例 (1.3) は $\Box u=aQ_0(u,u)$ と書かれる.

不等式 (1.5) は最適であることも知られている. つまり φ, ψ に対する適当な条件の下で,

$$\limsup_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log T_\varepsilon\le\frac{1}{\sup_{(\rho,\omega)\in\mathbb{R}\times S^2}\big\{G(\omega)\partial_\rho^2\Phi(\rho,\omega)\big\}}$$

[3] ここでは F が (1.4) で与えられる場合に限って述べているが, 零条件はより一般の非線形項を伴う波動方程式に対しても定義できる. 要は, 非線形項の中の $\partial^\alpha u$ を $\hat{\omega}^\alpha$ に置き換えて作った ω に関する関数が S^2 上で恒等的に消えることである. 例えば F が (1.2) で与えられる場合に $G(\omega)$ に相当するのは $a(-1)^2+b|\omega|^2=a+b|\omega|^2$ であり, これが任意の $\omega\in S^2$ に対して消えるための必要十分条件は, $a+b=0$ が満たされることである.

が成り立つ (Alinhac[1], Chistodoulou[5] 等). この方面に関する最近の進展は, 例えば [39] 等に詳しく書かれている. また, 関連事項として (上述の零条件よりも弱い) "weak null condition" と呼ばれる構造条件にも一言だけ触れておく. これは一般相対論における Einstein 方程式の研究に動機づけられて 2003 年前後に Lindblad-Rodnianski [31], [32] によって導入されたもので, 現在も活発に研究が進められている. 詳しくは, 例えば [2], [3], [21], [22], [23], [30] 等を参照されたい.

以上のように, 波動方程式に対しては, 零構造を軸として解の長時間挙動がある程度系統的に述べられるところまで理解が進んでいると言える. 本稿で議論したいのは, このようなことの Schrödinger 方程式における類似物を考えられないだろうか?という問題である.

2 1D cubic NLS の解の長時間挙動に関する諸結果: 復習

以下では $i = \sqrt{-1}$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ とし,

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x^2 u = N \tag{2.1}$$

に対する初期値問題を, 適当な意味で十分小さな初期値の下で考える (より正確な設定は, 次節で主結果を述べる際に記す). ここで N は u, $\partial_x u$, $\overline{u}$, $\overline{\partial_x u}$ についての 3 次斉次多項式とする. よく知られているように, $\mathbb{R}$ 上の Schrödinger 方程式に対して 3 次の非線形項は長時間挙動を摂動によって取り扱う際の臨界冪の 1 つである. 平たく言えば, 一般に初期値がどんなに小さくても解の長時間挙動は自由発展 ($N = 0$ の場合) とは本質的に異なったものとなる [4]. 例えば

$$N = \lambda |u|^2 u \tag{2.2}$$

で $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ の場合, (2.1) の小振幅解は $t \to \infty$ において

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{it}}\alpha(x/t)e^{ix^2/(2t) - i\lambda|\alpha(x/t)|^2 \log t} + r(t,x); \quad \|r(t,\cdot)\|_{L^\infty} = o(t^{-1/2}) \tag{2.3}$$

という振る舞いをすることが知られている (Hayashi-Naumkin [8]). ここで $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ は適当な有界連続関数である. この表示からの大事な帰結として, 解は自由発展と同じ各点的な減衰レート $O(t^{-1/2})$ を持つが, 非線形効果による対数的な修正因子が解に振動を与えていることを見て取れる. なお, この主張において λ が実数であるという点は本質的である. 実際, 同じ非線形項 (2.2) でも λ が複素数の場合には (2.3) とは違った非線形効果が現れる. Shimomura[38] によれば, $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$ の場合には解の各点的な減衰レートは $O((t\log t)^{-1/2})$ となる (直観的には, 非線形項が消散的に作用して自由発展よりも解の減衰が速くなっていると解釈できる). これに対し, $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$ の場合には, 任意に小さい初期値を持つ有限時間爆発

[4] 素朴な摂動的取り扱いは有効でなく解の時間大域存在すら自明でないという意味で, 前節の状況と対比し得る状況の 1 つと言える.

解を構成できることが Kita[24] により報告されている. 非線形項に u の導関数が含まれると, 状況はもう少し複雑になる. 例えば

$$N = i\partial_x(|u|^2 u) \tag{2.4}$$

や

$$N = \overline{u}(\partial_x u)^2 \tag{2.5}$$

の場合には (2.2) の場合と同様に, 方程式 (2.1) の解は小さな初期値に対して時間大域的に存在するが $t \to +\infty$ のときいかなる自由解にも漸近せず, (2.3) のように位相の修正を含んだ漸近形を持つ (Hayashi-Naumkin[7]). ところが, 一見これらと大差がないように思える

$$N = iu\partial_x(|u|^2) \tag{2.6}$$

や

$$N = u(\partial_x u)^2 \tag{2.7}$$

の場合には, 方程式 (2.1) の小振幅解は $t \to \infty$ のとき適当な自由解に漸近する (Tsutsumi [42], Tonegawa [41]).

さて, 以上のような諸結果を, 前節で見た波動方程式の零条件のように統一的に理解することはできないないだろうか? 次節でこの問に対する一つの解答を与えるが, その前に, 波動方程式の零条件との類似性を期待させる 2 つの観察を紹介しておく (前者は [42], 後者は [41] による):

観察 2.1. $\mathcal{J} = x + it\partial_x$ という作用素は $\mathcal{L} = i\partial_t + \frac{1}{2}\partial_x^2$ との間に交換関係 $[\mathcal{L}, \mathcal{J}] = 0$ を満たし, さらに

$$iu\partial_x(|u|^2) = \frac{1}{t}\Big(|u|^2\mathcal{J}u - u^2\overline{\mathcal{J}u}\Big).$$

すなわち, (2.6) の形の非線形項は $\mathcal{L}$ と相性の良い作用素 $\mathcal{J}$ を用いて顕わな減衰因子 $1/t$ を持つ形に書き替えることができる. [42] では (2.6) の形の項を "null gauge form" と呼んでいる.

観察 2.2. 非線形項が (2.7) で与えられる場合の方程式 (2.1) の解 $u(t,x)$ に対し,

$$w(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} u^{2k+1} \tag{2.8}$$

とおけば

$$i\partial_t w + \frac{1}{2}\partial_x^2 w = e^{-u^2}\Big(i\partial_t u - \frac{1}{2}\partial_x^2 u - u(\partial_x u)^2\Big) = 0.$$

すなわち, (2.8) という変換により自由Schrödinger方程式 $\mathcal{L}w = 0$ へ変換される. したがって (2.8) の逆変換が所望の大域解となる. 大域解が漸近自由であることも, (2.8) の逆変換 $u = w + w^3/3 + \cdots$ からわかる.

3 Lifespanの評価から見た1D cubic NLSの零構造: 主結果

この節では, 初期値問題

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x^2 u = N(u, \partial_x u), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \varepsilon\varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.1}$$

を考える. ここで $N(z,\zeta)$ は $(z,\zeta,\overline{z},\overline{\zeta})$ に関する複素数を係数とする斉3次多項式で

$$N(e^{i\theta}, 0) = e^{i\theta}N(1,0), \qquad \theta \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

を満たすものとする. 以下では, H^k はSobolev空間 ($f \in H^k \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \partial_x^j f \in L^2$ for $0 \le j \le k$), $H^{k,m}$ は重み付きSobolev空間 ($f \in H^{k,m} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x^l f \in H^k$ for $0 \le l \le m$) を表す.
次の定理が, 前節で掲げた問への1つの答えである.

定理 3.1. $\varphi \in H^3 \cap H^{2,1}$ とする. (3.2) を仮定する. 関数 $\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を

$$\nu(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} N(z, i\xi z)\frac{dz}{z^2}, \qquad \xi \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

によって定める. このとき次の (1)–(5) が成り立つ:

(1) 初期値問題 (3.1) の $C([0,T]; H^3 \cap H^{2,1})$ における一意解の存在時間 T の上限を T_ε とするとき,

$$\liminf_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^2 \log T_\varepsilon \ge \frac{1}{\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left\{2\operatorname{Im}\nu(\xi)|\hat{\varphi}(\xi)|^2\right\}}. \tag{3.4}$$

但し

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-iy\xi}\varphi(y)\,dy, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

(2) 任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して $\operatorname{Im}\nu(\xi) \le 0$ であるならば, ある $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\varphi) > 0$ が存在して, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ のとき $T_\varepsilon = \infty$.

(3) 任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して $\mathrm{Im}\,\nu(\xi) = 0$ であるならば, (3.1) の大域解 $u(t,x)$ は $t \to +\infty$ のとき

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{it}}\alpha(x/t)e^{ix^2/(2t) - i\,\mathrm{Re}\,\nu(x/t)|\alpha(x/t)|^2 \log t} + O(t^{-3/4+\delta}) \quad \text{in} \quad L^\infty(\mathbb{R}) \tag{3.5}$$

を満たす. ここで $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は $|\alpha(\xi)| \le C\varepsilon\langle\xi\rangle^{-2}$ を満たす適当な連続関数. δ は任意に小さくとれる正の数.

(4) 任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して $\nu(\xi) = 0$ であるならば, 次の極限が存在する:

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-(it/2)\partial_x^2} u(t,\cdot) \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

(5) $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \mathrm{Im}\,\nu(\xi) < 0$ であるならば,

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = O((t \log t)^{-1/2}) \qquad (t \to +\infty).$$

注意 3.1. $\varphi \in H^{2,1}$ より $\langle\xi\rangle^2\hat{\varphi} \in C \cap L^\infty(\mathbb{R})$ であることと, $\nu(\xi)$ が ξ について高々3次多項式であることから, $\mathrm{Im}\,\nu(\xi)|\hat{\varphi}(\xi)|^2 = O(|\xi|^{-1})$ $(\xi \to \pm\infty)$. これより, (3.4) の右辺は真に正または $+\infty$ であることが分かる (但し, 1/0 を $+\infty$ と読み替える).

前節で取り上げた5つの非線形項 (2.2), (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) に対して $\nu(\xi)$ をそれぞれ計算してみよう:

- まず (2.2) の場合, $N(z, i\xi z) = \lambda|z|^2 z$ より

$$\nu(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \lambda|z|^2 z \frac{dz}{z^2} = \frac{\lambda}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z} = \lambda.$$

  よって, $\mathrm{Im}\,\lambda \le 0$ ならば上記定理の (2) により $T_\varepsilon = +\infty$. さらに, $\mathrm{Im}\,\lambda = 0$ と $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$ に応じて (3) と (5) がそれぞれ適用できる.

- 次に (2.4) の場合, $N(z, i\xi z) = i(2|z|^2 i\xi z + z^2\overline{i\xi z}) = -\xi|z|^2 z$ となるから

$$\nu(\xi) = \frac{-\xi}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z} = -\xi.$$

  また, (2.5) については $N(z, i\xi z) = \overline{z}(i\xi z)^2 = -\xi^2|z|^2 z$ より $\nu(\xi) = -\xi^2$. したがって両者どちらの場合も $\mathrm{Im}\,\nu(\xi)$ は恒等的に0であり, $\mathrm{Re}\,\nu(\xi)$ は恒等的には0でない. よって, 大域解の漸近形が対数的な位相の修正を受けることを (3) からも説明できる.

- (2.6) に対しては, $N(z,i\xi z)=iz(\overline{zi\xi z}+\overline{z}i\xi z)=0$ より $\nu(\xi)=0$. (2.7) については, $N(z,i\xi z)=z(i\xi z)^2=-i\xi^2z^3$ より

$$\nu(\xi)=\frac{-\xi^2}{2\pi}\oint_{|z|=1}zdz=0.$$

したがって (4) が適用でき, 解は漸近自由であることがわかる. なお, 結論だけ見ればどちらも $\nu(\xi)=0$ だが, 成立背景は微妙に異なることを指摘しておく [5].

最後に, 定理 3.1 に対する補足と関連事項を 4 点述べて本稿を終える.

1. 定理 3.1 に述べられた 5 つの主張のうち, (1) は Sagawa-Sunagawa [35] による [6]. 勿論これは波動方程式に対する John[20] と Hörmander[16] の結果 (命題 1.1) の類似を意図している. (2)–(5) については, (3.3) という積分を用いないために見かけは随分異なるが, 技術的には先行研究 (Hayashi-Naumkin[9] および Hayashi-Naumkin-Sunagawa[15]) で用いられた手法を今の設定に合うように修正して用いるだけであり, 真に新しいものではない. [35] の意義は, lifespan の下限の評価式の中に自然な形で登場する関数 $\nu(\xi)$ を用いてこれまでの多くの先行研究にある程度の統一的な見通しを与えたという点にあると筆者は考えている.

2. $(u,\partial_x u,\overline{u},\overline{\partial_x u})$ についての 3 次単項式のうちで (3.2) を満たさないのは u^3, $\overline{u}^3$, $u\overline{u}^2$ の 3 つのみである. これら 3 つの項に対してはいずれも $\nu(\xi)=0$ $(\forall\xi\in\mathbb{R})$ となるが, 解の大域存在は未解決である [7]. また, 特殊な初期値に対してはこれらの非線形項に対しても大域解の存在と漸近挙動を示した結果はいくつかあるが, そのうちのいくつかは, 定理 3.1 の (3), (4), (5) のいずれにも該当しない漸近挙動を示すものとなっている. 詳しくは Hayashi–Naumkin による一連の仕事 ([10], [11], [12], [13], [14], [34] 等) を参照のこと.

3. 評価式 (3.4) の最適性 (つまり上極限の評価) については, 少なくとも本稿執筆段階において筆者の知る限りでは, 完全に未解決である. Kita[24] によって得られた有限時間爆発解についても, その lifespan を特定するのは極めて困難なように筆者には思われる.

[5] 被積分関数が恒等的に消えるという意味で, (2.6) の方が (2.7) よりも "強い消え方" をしている.

[6] それに先行する仕事として Sunagawa [40] も参照されたい. [40] では (3.2) よりも強い条件

$$N(e^{i\theta}z,e^{i\theta}\zeta)=e^{i\theta}N(z,\zeta),\qquad \theta\in\mathbb{R},\ \ (z,\zeta)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C},$$

を課した上で同様の評価が得られていた (このとき $\nu(\xi)=N(1,i\xi)$ となる). しかしこの条件を仮定しないときに $N(1,i\xi)$ という量に注目しても, 例えば (2.7) のような非線形項が解の長時間挙動に及ぼす効果をうまく説明できず, 不満が残っていた.

[7] 最近, Murphy–Pusateri [33] により, この 3 つの項に対して $\liminf_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^2\log T_\varepsilon>0$ であることが示された.

4. 本稿では空間 1 次元において 3 次の非線形項を伴う単独の方程式のみを取り上げたが, それ以外の場合についても, 本稿と同様な意味での零構造との関わりを意識して非線形 Schrödinger 方程式やその連立系を扱った研究はいくつかある. 最近の仕事として, 例えば [17], [18], [28], [29], [36], [37] 等を挙げておく. しかし現状では 1 次元で 3 次かつ単独の場合ほどにはまとまった成果には至っているとは言い難く, さらなる研究が俟たれる.

参考文献

[1] S. Alinhac, The null condition for quasilinear wave equations in two space dimensions. II, *Amer. J. Math.*, **123** (2001), no.6, 1071–1101.

[2] S. Alinhac, An example of blowup at infinity for a quasilinear wave equation, in *"Autour de l'analyse microlocale"*, Astérisque, **284** (2003), 1–91.

[3] S. Alinhac, Semilinear hyperbolic systems with blowup at infinity, *Indiana Univ. Math. J.*, **55** (2006), no.3, 1209–1232.

[4] D. Christodoulou, Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data, *Comm. Pure Appl. Math.*, **39** (1986), no.2, 267–282.

[5] D. Christodoulou, The formation of shocks in 3-dimensional fluids, EMS Monographs in Mathematics. European Mathematical Society, Zürich, 2007.

[6] B. Hanouzet and J. L. Joly, Explosion pour des problèmes hyperboliques semi-linéaires avec second membre non compatible. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **301** (1985), no. 11, 581–584.

[7] N. Hayashi and P. I. Naumkin, Asymptotic behavior in time of solutions to the derivative nonlinear Schrödinger equation revisited, *Discrete Contin. Dynam. Systems*, **3** (1997), no.3, 383–400.

[8] N. Hayashi and P. I. Naumkin, Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations, *Amer. J. Math.*, **120** (1998), no.2, 369–389.

[9] N. Hayashi and P. I. Naumkin, Asymptotics of small solutions to nonlinear Schrödinger equations with cubic nonlinearities, *Int. J. Pure Appl. Math.*, **3** (2002), no.3, 255–273.

[10] N. Hayashi and P. I. Naumkin, Large time behavior for the cubic nonlinear Schrödinger equation, *Canad. J. Math.*, **54** (2002), no.5, 1065–1085.

[11] N. Hayashi and P. I. Naumkin, On the asymptotics for cubic nonlinear Schrödinger equations, *Complex Var. Theory Appl.*, **49** (2004), no.5, 339–373.

[12] N. Hayashi and P. I. Naumkin, Asymptotics of odd solutions for cubic nonlinear Schrödinger equations, *J. Differential Equations*, **246** (2009), no.4, 1703–1722.

[13] N. Hayashi and P. I. Naumkin, Global existence for the cubic nonlinear Schrödinger equation in lower order Sobolev spaces, *Differential Integral Equations*, **24** (2011), no.9–10, 801–828.

[14] N. Hayashi and P. I. Naumkin, Logarithmic time decay for the cubic nonlinear Schrödinger equations, *Int. Math. Res. Not.*, IMRN 2015, no.14, 5604–5643.

[15] N. Hayashi, P. I. Naumkin and H. Sunagawa, On the Schrödinger equation with dissipative nonlinearities of derivative type, *SIAM J. Math. Anal.*, **40** (2008), no.1, 278–291.

[16] L. Hörmander, The lifespan of classical solutions of nonlinear hyperbolic equations, *Springer Lecture Notes in Math.*, **1256** (1987), 214–280.

[17] M. Ikeda, S. Katayama and H. Sunagawa, Null structure in a system of quadratic derivative nonlinear Schrödinger equations, *Ann. Henri Poincaré*, **16** (2015), no. 2, 535–567.

[18] M. Ikeda, N. Kishimoto and M. Okamoto, Well-posedness for a quadratic derivative nonlinear Schrödinger system at the critical regularity, *J. Funct. Anal.*, **271** (2016), no.4, 747–798.

[19] F. John, Blow-up for quasilinear wave equations in three space dimensions, *Comm. Pure Appl. Math.*, **34** (1981), no.1, 29–51.

[20] F. John, Existence for large times of strict solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions for small initial data, *Comm. Pure Appl. Math.*, **40** (1987), no.1, 79–109.

[21] S. Katayama, Asymptotic pointwise behavior for systems of semilinear wave equations in three space dimensions, *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, **9** (2012), no.2, 263–323.

[22] S. Katayama and H. Kubo, Asymptotic behavior of solutions to semilinear systems of wave equations, *Indiana Univ. Math. J.*, **57** (2008), no.1, 377–400.

[23] S. Katayama, T. Matoba and H. Sunagawa, Semilinear hyperbolic systems violating the null condition, *Math. Ann.*, **361** (2015), no.1–2, 275–312.

[24] N. Kita, A work in preparation.

[25] S. Klainerman, Global existence for nonlinear wave equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **33** (1980), no.1, 43–101.

[26] S. Klainerman, The null condition and global existence to nonlinear wave equations, in "*Nonlinear Systems of Partial Differential Equations in Applied Mathematics, Part 1*", Lectures in Applied Math., **23** (1986), 293–326.

[27] S. Klainerman and M. Machedon, Space-time estimates for null forms and the local existence theorem, *Comm. Pure Appl. Math.*, **46** (1993), no.9, 1221–1268.

[28] C. Li and H. Sunagawa, On Schrödinger systems with cubic dissipative nonlinearities of derivative type, *Nonlinearity*, **29** (2016), no.5, 1537–1563.

[29] C. Li and H. Sunagawa, Remarks on derivative nonlinear Schrödinger systems with multiple masses, to appear in the proceedings of the conference "*Asymptotic Analysis for Nonlinear Dispersive and Wave Equations*" (available at `arXiv:1603.04966`).

[30] H. Lindblad, Global solutions of quasilinear wave equations, *Amer. J. Math.*, **130** (2008), no.1, 115–157.

[31] H. Lindblad and I. Rodnianksi, The weak null condition for Einstein's equations, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **336** (2003), no.11, 901–906.

[32] H. Lindblad and I. Rodnianksi, Global existence for the Einstein vacuum equations in wave coordinates, *Comm. Math. Phys.*, **256** (2005), no.1, 43–110.

[33] J. Murphy and F.Pusateri, Almost global existence for cubic nonlinear Schrödinger equations in one space dimension, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **37** (2017), no.4, 2077–2102.

[34] P. I. Naumkin, The dissipative property of a cubic non-linear Schrödinger equation, *Izv. Math.*, **79** (2015), no.2, 346–374.

[35] Y. Sagawa and H. Sunagawa, The lifespan of small solutions to cubic derivative nonlinear Schrödinger equations in one space dimension, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **36** (2016), no.10, 5743–5761.

[36] Y. Sagawa, H. Sunagawa and S. Yasuda, A sharp lower bound for the lifespan of small solutions to the Schrödinger equation with a subcritical power nonlinearity, to appear in *Differential Integral Equations* (available at `arXiv:1703.03125`).

[37] D. Sakoda, Global existence for a quadratic derivative nonlinear Schröodinger system in two space dimensions, Master Thesis, Osaka University, 2017.

[38] A. Shimomura, Asymptotic behavior of solutions for Schrödinger equations with dissipative nonlinearities, *Comm. Partial Differential Equations*, **31** (2006), no.7–9, 1407–1423.

[39] J. Speck, Shock formation in small-data solutions to 3D quasilinear wave equations, Mathematical Surveys and Monographs, 214. American Mathematical Society, Providence, RI, 2016.

[40] H. Sunagawa, Lower bounds of the lifespan of small data solutions to the nonlinear Schrödinger equations, *Osaka J. Math.*, **43** (2006), no.4, 771–789.

[41] S. Tonegawa, Global existence for a class of cubic nonlinear Schrödinger equations in one space dimension, *Hokkaido Math. J.*, **30** (2001), no.2, 451–473.

[42] Y. Tsutsumi, The null gauge condition and the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation with cubic nonlinearity, *Indiana Univ. Math. J.*, **43** (1994), no.1, 241–254.