数理解析研究所講究録 第2095巻 2018年 149-156

可予測射影及び良可測射影に関する不等式について

富山大学大学院理工学研究部（理学）
菊池 万里

Masato Kikuchi
Graduate School of Science and Engineering
University of Toyama

1 導入

本稿では，固定された非原子的確率空間 $(\Omega,\Sigma,\mathrm{P})$ 上の離散時径数確率過程を考察の対象とする．従って，単に**確率過程**といったときには，$\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\cup\{0\}$ を添え字とする確率変数列を表すものとする．確率過程 $f=(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ が積分可能であるとは，各 f_n が積分可能であることと定義し，積分可能な確率過程の全体を $\mathbb{P}$ で表す．また，Σ の部分 σ–代数の広義増大列 $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を Ω の**フィルトレーション**と呼び，フィルトレーションの全体を $\mathbb{F}$ で表す．便宜上，各 $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)\in\mathbb{F}$ に対して，$\mathcal{F}_{-1}=\mathcal{F}_0$ と約束する．フィルトレーション $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)$ が与えられたとき，確率過程 $f=(f_n)$ が $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)$ に**適合**するということを，各 f_n が $\mathcal{F}_n$–可測であることと定義し，$\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)$ に適合した確率過程 $f=(f_n)\in\mathbb{P}$ の全体を $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ で表す．また，$f=(f_n)$ が $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)$ に関して**可予測**であるということを，各 f_n が $\mathcal{F}_{n-1}$–可測であることと定義する．

$f=(f_n)\in\mathbb{P}$ と $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)\in\mathbb{F}$ が与えられたとき，$\mathcal{F}$ に関する可予測確率過程 $f^{P(\mathcal{F})}=(f_n^{P(\mathcal{F})})$，及び，$\mathcal{F}$ に適合した確率過程 $f^{O(\mathcal{F})}=(f_n^{O(\mathcal{F})})$ を

$$\begin{aligned} f_n^{P(\mathcal{F})} &= \mathrm{E}[f_n\,|\,\mathcal{F}_{n-1}] \qquad (n\in\mathbb{Z}_+),\\ f_n^{O(\mathcal{F})} &= \mathrm{E}[f_n\,|\,\mathcal{F}_n] \qquad (n\in\mathbb{Z}_+),\end{aligned}$$

のように定義し，$f^{P(\mathcal{F})}=(f_n^{P(\mathcal{F})})$ を $f=(f_n)$ の**可予測射影**，$f^{O(\mathcal{F})}=(f_n^{O(\mathcal{F})})$ を $f=(f_n)$ の**良可測射影**と呼ぶ ([3, p. 115])．これらの射影は，いずれも連続時径数の確率過程に対して導入された概念であり，離散時径数の確率過程に対してはあまり大きな意味を持たないようにも感じられる．しかしながら，離散時径数の確率過程に関する良可測射影は，よく知られた Burkholder-Davis-Gundy の不等式を証明する際に用いられる他，E. M. Stein [9] は，良可測射影を用いた Littlewood-Paley の定理の証明を与えている．本稿では，Stein の考察した不等式の拡張，及び，Delbaen-Schachermayer [2] によって証明された可予測射影に関する不等式の拡張を考察する．尚，連続時径数の確率過程に関しては，可予測性及び適合性の他に良可測性の概念が定義され，強い順に並べれば，可予測性，良可測性，適合性となる．良可測射影とは，本来，積分可能な確率過程に対して良可測過程を対応させる射影であるが，離散時径数の場合には，良可測性と適合性は一致する．こららの事実に鑑み，本稿では適合射影とは呼ばず，良可測射影と呼ぶことにする．

Steinの良可測射影に関する不等式は，Banach 空間 $L_a(\ell_r)$ のノルムを用いて表現される．但し，a 及び r は $1 \le a,\, r \le \infty$ なる定数であり，$L_a(\ell_r)$ は

$$\|f\|_{L_a(\ell_r)} = \begin{cases} \left\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^r \right)^{1/r} \right\|_{L_a} & (1 \le r < \infty), \\ \left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} |f_n| \right\|_{L_a} & (r = \infty), \end{cases}$$

の値が有限であるような $f = (f_n) \in \mathbb{P}$ の全体として定義される空間である．

Steinの定理. (a) すべての $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n) \in \mathbb{F}$ とすべての $f = (f_n) \in \mathbb{P}$ に対して

$$\left\| f^{O(\mathcal{F})} \right\|_{L_1(\ell_1)} \le \|f\|_{L_1(\ell_1)}.$$

(b) $1 < a < \infty$, $1 \le r \le \infty$ とするとき，すべての $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n) \in \mathbb{F}$ とすべての $f = (f_n) \in \mathbb{P}$ に対して

$$\left\| f^{O(\mathcal{F})} \right\|_{L_a(\ell_r)} \le C_a \|f\|_{L_a(\ell_r)} \tag{1.1}$$

であるような，a のみに依存し r に依存しない定数 C_a が存在する．

上記の定理の (a) は条件付き平均の定義から容易に導かれる結果である．Steinは，$r = 2$ の場合に補間定理を用いて (1.1) を証明した．Stein自身は特に言及していないものの，彼の証明方法は (定数 C_a を r に依らないように取ることができるという事実を除けば) そのまま $1 \le r \le \infty$ の場合にも適用可能である．C_a が r に依らないように取ることができることは，Dilworth [4] の初等的な証明方法から導かれる．

他方，$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$ に適合する確率過程 $f = (f_n)$ の可予測射影に関する同様の不等式は，Lépingle [6] によって考察され，その後，Delbaen-Schachermayer [2] によって次のように拡張された．この拡張された定理に於いて，$a = 1$，$r = 2$ とした場合が Lépingle の不等式である．

Delbaen-Schachermayerの定理. $1 \le a \le r \le \infty$ とする．このとき，任意の $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n) \in \mathbb{F}$ と任意の $f = (f_n) \in \mathbb{P}(\mathcal{F})$ に対して

$$\|f^{P(\mathcal{F})}\|_{L_a(\ell_r)} \le 2\|f\|_{L_a(\ell_r)}. \tag{1.2}$$

更に $a = 1$ かつ $r = \infty$ の場合には，(1.2) に於ける定数 2 は最良である．

上記の定理に於ける定数について，Osękowski [7] は，$a = 1$ かつ $1 \le r < \infty$ の場合に，(1.2) の定数 2 は $2^{(r-1)/r}$ に置き換えられること，及び，$2^{(r-1)/r}$ が最良の定数であることを証明した．

本稿では，より一般的な関数空間に於ける Stein の定理，及び，Delbaen-Schachermayer の定理の拡張を考察する．

2 準備

以下，$I = (0, 1]$ と置いて，μ を I 上の Lebesgue 測度とする．固定された確率空間 $(\Omega, \Sigma, \mathrm{P})$ 上の関数空間に加え，μ を確率測度とする確率空間 I 上の関数空間も考察の対象とする．

ほとんど至るところ有限な値を取る Ω 上の確率変数の全体を $L_0(\Omega)$ で表し，ほとんど至るところ有限な値を取る I 上の確率変数の全体を $L_0(I)$ で表す．$L_0(\Omega)$, $L_0(I)$ を単に L_0 で表すこともある．Lebesgue 空間 L_p などについても同様の記法を用いる．また L_0 には確率収束（測度収束）と両立する位相が与えられていると仮定する．Ω 上，或は I 上の確率変数から成る Banach 空間または準 Banach 空間 X, Y に対し，$Y \hookrightarrow X$ と書いて，Y が X に連続的に埋め込まれていることを表すものとする．

定義 2.1. Ω 上, 或は I 上の確率変数から成る Banach 空間 X は, 次の 3 条件を満たすとき, **Banach 関数空間**と呼ばれる:

(B1) $L_\infty \hookrightarrow X \hookrightarrow L_1$.
(B2) $|x| \leq |y|$ a.s. かつ $y \in X$ であれば，$x \in X$ であり，$\|x\|_X \leq \|y\|_X$.
(B3) $0 \leq x_n \uparrow x$ a.s. かつ $\sup_n \|x_n\|_X < \infty$ であれば，$x \in X$ であり，$\|x\|_X = \sup_n \|x_n\|_X$.

また Ω 上，或は I 上の確率変数から成る準 Banach 空間 X は，(B2), (B3)，及び，次の (Q1) を満たすとき，**準 Banach 関数空間**と呼ばれる:

(Q1) $L_\infty \hookrightarrow X \hookrightarrow L_0$.

(準) Banach 関数空間 X が与えられたとき，$x \in L_0 \setminus X$ に対して $\|x\|_X = \infty$ と約束する．

Lebesgue 空間 L_p, Orlicz 空間 L_Φ，Lorentz 空間 $L_{p,q}$ などが Banach 関数空間であることは言うまでもない．更に，変動指数の Lebesgue 空間 $L_{p(\cdot)}$ も Banach 関数空間であり，荷重 Lebesgue 空間 $L_p(w)$ も（荷重 w が適当な可積分性を持つ限り）Banach 関数空間である．

定義 2.2. X を Ω 上の Banach 関数空間とし，$\mathcal{B}_X$ を X の閉単位球とする．各 $x \in L_0(\Omega)$ に対して

$$\|x\|_{X'} = \sup_{y \in \mathcal{B}_X} \int_\Omega |xy| \, \mathrm{dP}$$

と置き，$\|x\|_{X'} < \infty$ であるような x の全体を X' で表す．これを X の**付随空間**と呼ぶ[*1]．I 上の Banach 関数空間に対しても，その付随空間が同様に定義される．

Banach 関数空間 X の付随空間 X' は Banach 関数空間になる．例えば，L_p の付随空間は $L_{p'}$ である．ここに，p' は p の共役指数を表す．特に $L'_\infty = L_1$ となり，このことから一般に X' が X の Banach 空間としての双対空間とは必ずしも一致しないことがわかる．また，$(L_p)' = L_{p'}$ であることから，$(L_p)'$ の付随空間 $(L_p)''$ は L_p に戻ることがわかる．より一般的に，任意の Banach 関数空間 X に対し，X' の付随空間 X'' は X と一致し，それらのノルム $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_{X''}$ も一致することが知られている ([1, p. 10]).

定義 2.3. Banach 関数空間 X は，次の条件 (RI) を満たすとき，**再配列不変**であるといわれる:

(RI) $x \simeq_d y$ かつ $y \in X$ であれば，$x \in X$ であり，$\|x\|_X = \|y\|_X$.

但し，$x \simeq_d y$ は x と y が同分布であることを表す．

[*1] [1] では X' は X の associate space と呼ばれる．本稿では付随空間と訳した，

本稿では再配列不変な Banach 関数空間を，単に**再配列不変空間**と呼ぶことにする．明らかに Lebesgue 空間や Orlicz 空間は再配列不変である．他方，変動指数の Lebesgue 空間 $L_{p(\cdot)}$ は（指数 $p(\cdot)$ が変動する限り）再配列不変ではない．また，w を荷重とする荷重 Lebesgue 空間 $L_p(w)$ が再配列不変であるようにノルムを付け替えられる為の必要十分条件は，$a \le w \le b$ a.s. であるような正定数 a, b が存在することである．

定義 2.4. X を Ω 上の Banach 関数空間とする．各 $x \in L_0(\Omega)$ に対して

$$\|x\|_{\text{w-}X} = \sup_{\lambda>0} \lambda \big\| \mathbb{1}_{\{\omega\in\Omega:\ |x(\omega)|>\lambda\}} \big\|_X$$

と置き，$\|x\|_{\text{w-}X} < \infty$ であるような x の全体を w-X で表す．但し，$A \in \Sigma$ に対し，$\mathbb{1}_A$ は A の指示関数を表す．

w-X は準 Banach 関数空間になる．例えば $X = L_p$ $(1 \le p < \infty)$ のとき，w-X は Lorentz 空間 $L_{p,\infty}$ と一致する．

本稿で紹介する結果を述べる為には，Banach 関数空間 X に対する 2 種の指標が必要になる．1 つはよく知られた Boyd 指標であり，もう 1 つは X の（拡張された）基本関数を用いて定義される指標である．先ずそれらの指標を定義する為に必要な概念について解説する．

Ω 上の確率変数 x に対し，その**非増加再配列**を x^* で表す．すなわち，x^* を

$$x^*(t) = \inf\big\{\lambda \in \mathbb{R}\colon \mathrm{P}(|x| > \lambda) \le t\big\}, \qquad t \in I,$$

のように定義される I 上の関数（確率変数）とする．また，I 上の確率変数 ϕ に対しても同様にその非増加再配列を定義する:

$$\phi^*(t) = \inf\big\{\lambda \in \mathbb{R}\colon \mu(|\phi| > \lambda) \le t\big\}, \qquad t \in I.$$

X が Ω 上の再配列不変空間であれば，次の 2 条件を満たす I 上の再配列不変空間 $\hat{X}$ が一意に存在する:

(i) $x \in X \iff x^* \in \hat{X}$.
(ii) 各 $x \in X$ に対し $\|x\|_X = \|x^*\|_{\hat{X}}$.

今後，Ω 上の再配列不変空間 X に対し，$\hat{X}$ は上記の 2 条件を満たす I 上の再配列不変空間を表すものとする．例えば $\widehat{L_p(\Omega)}$ が $L_p(I)$ と一致することは容易に理解される．

正数 s が与えられたとき，**拡大（縮小）作用素** $D_s\colon L_0(I) \to L_0(I)$ を

$$(D_s\phi)(t) = \begin{cases} \phi(st) & (st \in I), \\ 0 & (st \notin I), \end{cases}$$

のように定義する．このとき，Z が I 上の再配列不変空間であれば，各 D_s は Z からそれ自身への有界線形作用素であり，その作用素ノルム $\|D_s\|_{B(Z)}$ は，不等式 $\|D_s\|_{B(Z)} \le s^{-1} \vee 1$ を満たす．更に，関数 $h_Z\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ を $h_Z(s) = \|D_{1/s}\|_{B(Z)}$ で定義すれば，h_Z は劣乗法的である．すなわち，$s, t \in I$ に対して不等式 $h_Z(st) \le h_Z(s)h_Z(t)$ が成立する．このことを踏まえて，Z の**下**

Boyd 指標 α_Z，及び，**上 Boyd 指標** β_Z をそれぞれ

$$\alpha_Z = \sup_{0<s<1} \frac{\log h_Z(s)}{\log s}, \qquad \beta_Z = \inf_{1<s<\infty} \frac{\log h_Z(s)}{\log s}$$

のように定義する．定義から明らかに $0 \le \alpha_Z, \beta_Z \le 1$ であるが，h_Z が列乗法的であることより，$\alpha_Z \le \beta_Z$ かつ

$$\alpha_Z = \lim_{s\to 0+} \frac{\log h_Z(s)}{\log s}, \qquad \beta_Z = \lim_{s\to\infty} \frac{\log h_Z(s)}{\log s}$$

となることが示される ([8, Theorem 1.3, p 53])．更に，Ω 上の再配列不変空間 X に対しては，その Boyd 指標を $\alpha_X = \alpha_{\hat{Z}}$, $\beta_X = \beta_{\hat{X}}$ によって定義する．定義から容易に ($p = \infty$ のとき $1/p = 0$ であるとの解釈の下に) $\alpha_{L_p} = \beta_{L_p} = 1/p$ $(1 \le p \le \infty)$ であることが示される

Boyd 指標が再配列不変空間に対して定義されるのとは対照的に，本稿で必要になるもう 1 種の指標は，任意の Banach 関数空間に対して定義される．

先ず，拡張基本関数の定義から始めよう．記述を簡潔にする為，各 $t \in [0,1]$ に対して

$$\Sigma(t) = \{A \in \Sigma\colon \mathrm{P}(A) = t\}$$

と置く．$(\Omega, \Sigma, \mathrm{P})$ は非原子的であることを仮定しているので, $\Sigma(t)$ は空でない．X を Ω 上の Banach 関数空間とするとき，X の**上基本関数** $\overline{\varphi}_X\colon [0,1] \to [0,\infty)$，及び，**下基本関数** $\underline{\varphi}_X\colon [0,1] \to [0,\infty)$ をそれぞれ

$$\overline{\varphi}_X(t) = \sup_{A\in\Sigma(t)} \|\mathbb{1}_A\|_X, \qquad \underline{\varphi}_X(t) = \inf_{A\in\Sigma(t)} \|\mathbb{1}_A\|_X$$

のように定義する．特に X が再配列不変であれば,

$$\overline{\varphi}_X(t) = \underline{\varphi}_X(t) = \|\mathbb{1}_A\|_X \quad (A \in \Sigma(t))$$

となることが容易にわかる．この場合，$\overline{\varphi}_X$ を φ_X と書いて，X の**基本関数**と呼ぶ.

一般の Banach 関数空間に対して $\underline{\varphi}_X(t) \le \overline{\varphi}_{X'}(t)$ であることは自明であるが, w-X に於ける種々の不等式を考察する際には, $\underline{\varphi}_X$ を定数倍することによって逆向きの不等式が成り立つような空間 X，すなわち,

$$k_X = \sup_{0<t\le 1} \frac{\overline{\varphi}_X(t)}{\underline{\varphi}_X(t)}$$

と置いたときに，$k_X < \infty$ であるような空間 X が大きな意味を持つ．X が再配列不変空間であれば，$k_X = 1$ となるので，この条件を満たす.

Banach 関数空間 X が与えられたとき，その上基本関数を用いて，関数 $m_X\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ を

$$m_X(s) = \sup_{0<t<(1/s)\wedge 1} \frac{\overline{\varphi}_X(st)}{\overline{\varphi}_X(t)}$$

のように定義し，指標 p_X, q_X を

$$p_X = \sup_{0<s<1} \frac{\log m_X(s)}{\log s}, \qquad q_X = \inf_{1<s<\infty} \frac{\log m_X(s)}{\log s}$$

で定義する．m_X が劣乗法的であることは容易に理解されるが，このことから，Boyd 指標と同様に $0 \leq p_X \leq q_X \leq 1$ かつ

$$p_X = \lim_{s \to 0+} \frac{\log m_X(s)}{\log s}, \qquad q_X = \lim_{s \to \infty} \frac{\log m_X(s)}{\log s}$$

であることが導かれる．例えば L_p に対するこれらの指標は Boyd 指標と一致し，$p_{L_p} = q_{L_p} = 1/p$ となる．尚，X が再配列不変であるとき，p_X，q_X は Zippin 指標と呼ばれる指標に他ならない．

準 Banach 関数空間 X と $r \in [1, \infty]$ が与えられたとき，$X(\ell_r)$ を

$$\|f\|_{X(\ell_r)} = \begin{cases} \left\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^r \right)^{1/r} \right\|_X & (1 \leq r < \infty), \\ \left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} |f_n| \right\|_X & (r = \infty), \end{cases}$$

の値が有限であるような $f = (f_n) \in \mathbb{P}$ の全体として定義する．これが $L_a(\ell_r)$ の拡張であることは言うまでもない．X が Banach 関数空間であれば $X(\ell_r)$ は Banach 空間であり，X が準 Banach 関数空間であれば，$X(\ell_r)$ も準 Banach 空間である．

3 主結果

確率過程 $f = (f_n)$ の射影に関して，次の 5 つの結果を得た．尚，本稿ではその証明には言及しない．最初の結果は，良可測射影に関する不等式が $X(\ell_1)$ に於いて成立する為の必要十分条件を与える．

定理 3.1. X を Ω 上の Banach 関数空間とするき，次の (i), (ii) は互いに同値である:

(i) 任意の $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n) \in \mathbb{F}$ と任意の $f = (f_n) \in \mathbb{P}$ に対して

$$\|f^{O(\mathcal{F})}\|_{X(\ell_1)} \leq C \|f\|_{X(\ell_1)}$$

であるような $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$ と $f = (f_n)$ に依存しない定数 C が存在する．

(ii) 同値的にノルムを付け替えることにより X は再配列不変となり，$0 < \alpha_X$.

良可測射影に関する不等式が $X(\ell_\infty)$ に於いて成立する為の必要十分条件を与える次の結果は，上記の定理 3.1，及び，$X(\ell_\infty)$ と $X'(\ell_1)$ の双対性から導かれる．

定理 3.2. X を Ω 上の Banach 関数空間とするき，次の (i), (ii) は互いに同値である:

(i) 任意の $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n) \in \mathbb{F}$ と任意の $f = (f_n) \in \mathbb{P}$ に対して

$$\|f^{O(\mathcal{F})}\|_{X(\ell_\infty)} \leq C \|f\|_{X(\ell_\infty)}$$

であるような $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$ と $f = (f_n)$ に依存しない定数 C が存在する．

(ii) 同値的にノルムを付け替えることにより X は再配列不変となり，$\beta_X < 1$.

次の結果は，$1 < r <$ の場合に，良可測射影に関する不等式が $X(\ell_r)$ に於いて成立する為の必要十分条件を与える．

定理 3.3. X を Ω 上の Banach 関数空間とするき，次の (i), (ii) は互いに同値である:

(i) 任意の $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n) \in \mathbb{F}$ と任意の $f = (f_n) \in \mathbb{P}$，及び，任意の $r \in (1, \infty)$ に対して

$$\|f^{O(\mathcal{F})}\|_{X(\ell_r)} \leq C\|f\|_{X(\ell_r)} \tag{3.1}$$

であるような $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$, $f = (f_n)$, r に依存しない定数 C が存在する．

(ii) 同値的にノルムを付け替えることにより X は再配列不変となり，$0 < \alpha_X$，$\beta_X < 1$.

次の結果は，可予測射影に関する不等式が $X(\ell_r)$ に於いて成立する為の必要十分条件を与えている．その様相は良可測射影の場合とよく似ているものの，$1 < r < \infty$ の場合と $r = 1$ の場合での違いがないことが，良可測射影に関する結果との相違点である．

定理 3.4. X を Ω 上の Banach 関数空間とするき，次の (i)–(iii) は互いに同値である:

(i) 任意の $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n) \in \mathbb{F}$ と任意の $f = (f_n) \in \mathbb{P}(\mathcal{F})$，及び，任意の $r \in (1, \infty)$ に対して

$$\|f^{P(\mathcal{F})}\|_{X(\ell_r)} \leq C\|f\|_{X(\ell_r)}$$

であるような $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$, $f = (f_n)$, r に依存しない定数 C が存在する．

(ii) 任意の $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n) \in \mathbb{F}$ と任意の $f = (f_n) \in \mathbb{P}(\mathcal{F})$ に対して

$$\|f^{P(\mathcal{F})}\|_{X(\ell_1)} \leq C\|f\|_{X(\ell_1)}$$

であるような $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$ と $f = (f_n)$ に依存しない定数 C が存在する．

(iii) 同値的にノルムを付け替えることにより X は再配列不変となり，$0 < \alpha_X$.

以上の定理は，いずれも $X(\ell_r)$ に於ける不等式に対する結果であるが，w-$X(\ell_r)$ に於ける不等式については，様相が大きく異なる．ここに w-$X(\ell_r)$ との記述は，正確には (w-X)(ℓ_r) と記述するべきであろうと思われるが，誤解の危険性はないと思われるので敢えて w-$X(\ell_r)$ と記すことにする．

定理 3.5. X を Ω 上の Banach 関数空間とするき，次の (i)–(v) は互いに同値である:

(i) 任意の $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n) \in \mathbb{F}$ と任意の $f = (f_n) \in \mathbb{P}$，及び，任意の $r \in (1, \infty)$ に対して

$$\|f^{O(\mathcal{F})}\|_{\text{w-}X(\ell_r)} \leq C\|f\|_{\text{w-}X(\ell_r)}$$

であるような $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$, $f = (f_n)$, r に依存しない定数 C が存在する．

(ii) 任意の $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n) \in \mathbb{F}$ と任意の $f = (f_n) \in \mathbb{P}$ に対して

$$\|f^{O(\mathcal{F})}\|_{\text{w-}X(\ell_1)} \leq C\|f\|_{\text{w-}X(\ell_1)}$$

であるような $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$ と $f = (f_n)$ に依存しない定数 C が存在する．

(iii) 任意の $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n) \in \mathbb{F}$ と任意の $f = (f_n) \in \mathbb{P}(\mathcal{F})$，及び，任意の $r \in (1, \infty)$ に対して

$$\|f^{P(\mathcal{F})}\|_{\text{w-}X(\ell_r)} \leq C\|f\|_{\text{w-}X(\ell_r)}$$

であるような $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$, $f = (f_n)$, r に依存しない定数 C が存在する.

(iv) 任意の $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n) \in \mathbb{F}$ と任意の $f = (f_n) \in \mathbb{P}(\mathcal{F})$ に対して

$$\|f^{P(\mathcal{F})}\|_{\text{w-}X(\ell_1)} \leq C\|f\|_{\text{w-}X(\ell_1)}$$

であるような $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$ と $f = (f_n)$ に依存しない定数 C が存在する.

(v) $k_X < \infty$ かつ $0 < p_X$, $q_X < 1$.

更に，定理 3.5 の (v) に於ける条件 “$0 < p_X$” は

$$1 < \varliminf_{t \to 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(At)}{\overline{\varphi}_X(t)}$$

であるような定数 $A > 1$ が存在することと同値であり，条件 “$q_X < 1$” は

$$\varlimsup_{t \to 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(At)}{\overline{\varphi}_X(t)} < A$$

であるような定数 $A > 1$ が存在することと同値である ([5]).

参考文献

[1] C. Bennett and R. Sharpley, Interpolation of operators. Pure and Applied Mathematics, 129. Academic Press, Boston, 1988.

[2] F. Delbaen and W. Schachermayer, An inequality for the predictable projection of an adapted process, Séminaire de Probabilités, XXIX, 17–24, Lecture Notes in Math., 1613, Springer, Berlin, 1995.

[3] C. Dellacherie and P. A. Meyer, Probabilités et potentiel, Chapitres V á VIII, Hermann, Paris, 1980.

[4] S. J. Dilworth, Some probabilistic inequalities with applications to functional analysis, Banach spaces (Mérida, 1992), 53–67, Contemp. Math., 144, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[5] M. Kikuchi, On Doob's inequality and Burkholder's inequality in weak paces, Collect. Math. **67** (2016), 461–483.

[6] D. Lépingle, Une inégalité de martingales, Séminaire de Probabilités XII, pp. 134–137, Lecture Notes in Math., 649, Springer, Berlin, 1978

[7] A. Osękowski, Sharp $L^1(\ell^q)$ estimate for a sequence and its predictable projection, Statist. Probab. Lett. **104** (2015), 82–86.

[8] S. G. Kreĭn, Yu. Ī. Petunīn, and E. M. Semënov, *Interpolation of linear operators*, Translations of Mathematical Monographs, 54. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1982.

[9] E. M. Stein, Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory, Annals of Mathematics Studies, No. 63 Princeton University Press, Princeton, N.J., University of Tokyo Press, Tokyo 1970.