

二次元コルモゴロフ流における 多数の局在乱流が示す現象

京都大学 理学研究科 物理学・宇宙物理学専攻*

蛭田佳樹[†], 藤定義

Yoshiki Hiruta, Sadayoshi Toh

Division of Physics and Astronomy, Graduate School of Science
Kyoto University

1 歴史・動機

特に円管流れや平板間流れを代表とする壁乱流において、典型的には亜臨界レイノルズ数付近で層流状態と乱流状態が空間的に分離する流れがよく見られる。特に、円管流れにおける乱流パフを代表として、局在乱流と呼ぶべきそれぞれ単独で複雑な運動をするが空間的に孤立した乱れ状態が実現する。近年、この局在乱流が重要な役割を果たすクラスの遷移が存在することが明らかになりつつある。

19世紀終わりの Reynolds による円管流れにおける実験 [1] の後、遷移を説明する様々なシナリオが現れてきた。20世紀中程から終わりにむけて、力学系の分岐として理解する方法によって、熱対流系や円柱後流の乱流化は説明できるようになった。すなわち、物理的に実現する状態は吸引集合であると捉え、駆動力が小さいときに実現する定常解 (層流) に対応する力学系における不動点が駆動力の増加に従い不安定化し、様々な分岐を経て吸引集合が複雑化することが乱流化であるとする考え方である。乱流化の仕方は、分岐のカスケードにより無限個の周期運動が重なってできる場合 (Landau ら) や、有限解の分岐でストレンジアトラクターが生じる場合 (Ruelle ら)、周期倍分岐のカスケードを経る (Feigenbaum) など、系によって異なる [2-5]。いずれにしても、乱流遷移の始まりが力学系としての分岐構造と関連する場合”支配方程式の層流解が線形不安定化するレイノルズ数”として臨界レイノルズ数は明確に定義できる。このように線形不安定になるレイノルズ数から複雑化してゆく”超臨界”乱流遷移は比較的理解しやすいが、不安定化するレイノルズ数より低い場合 (“亜臨界”) の系の振る舞いは理解が非常に難しいことが知られている。

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町

[†] e-mail:hiruta@kyoryu.scphys.kyoto-u.ac.jp

円管流などの壁に覆われた流れでは、線形不安定になるレイノルズ数 (円管流では無限) よりも小さなレイノルズ数において、乱流の持続・消滅が決まるレイノルズ数が存在する (Reynolds の円管流れの遷移実験はこの遷移を見ている)。このような亜臨界乱流遷移を理解するための知見が近年急速に集まりつつある。

近年、Avila によるパイプ流れの実験 [6] により、臨界レイノルズ数が乱流パフの確率的分裂・崩壊によって決まるとの報告がされた。乱流パフが確率的に自身の複製を作る平均の時間 τ_s と、自発的に崩壊するまでの平均の時間 τ_d を比較する。これらの時間スケールはレイノルズ数が増えるとともに、 τ_s は小さくなり τ_d は大きくなるのが実験で確かめられている。このとき、 $\tau_s < \tau_d$ で乱流が維持し、 $\tau_s > \tau_d$ のとき乱流が有限時間で層流化する。従って $\tau_s = \tau_d$ となるレイノルズ数を (亜) 臨界レイノルズ数として定義できる。

確率的な乱流領域の拡大と縮小が亜臨界乱流遷移の本質であると認識したおかげで、乱流遷移を非平衡統計力学の問題と捉え直すことができるようになった。更に、乱流領域は局所的な拡大を示し層流領域から自発的に発生しないことが、層流の線形安定性から示唆される。従って、乱流遷移の問題は大域層流状態を吸収状態とした吸収状態相転移の問題でもあることが予想される。これらの予想の下、佐野・玉井の平板間乱流 [7] や Lemoult らの Taylor-Couette 乱流の実験 [8] により、臨界レイノルズ数周りでの臨界現象およびその臨界指数が求められ、その値が吸収状態相転移の一つのクラスである有向パーコレーションの普遍クラスのものと同様でないことが確認された。佐野・玉井の実験は乱流構造が移流される流れであり、Taylor-Couette 流れは維持乱流であるという違いがあるが、双方ともに同一の普遍クラスに属する。

マクロな流体運動が流体方程式に従う (もしくは運動の良い近似が得られる) という観点からは、亜臨界乱流遷移が観測される際の流れの状態は、Navier-Stokes 方程式に適切な駆動力及び境界条件を課した際の解 (の集合) が記述する。有向パーコレーションの普遍クラスに属するための条件として、(i) 分裂・消滅が独立に起こること (ii) (オーダーパラメータとしての?) 保存量が存在しないこと etc. が提案されているが [9]、Navier-Stokes 方程式が非線形偏微分方程式であるので、一般には空間相関は有限長さで切れないし、自明・非自明問わず保存量が存在するのが普通である。したがって、我々の興味・問としては、(I) どのようなクラスの境界条件・駆動において有向パーコレーション普遍クラスに属する亜臨界乱流遷移が観測されるか?(II) 臨界現象に支配方程式の保存量が果たす役割は何か? がある。

Navier-Stokes 方程式の決定論的な解の振る舞いに関して、最も単純な模型の一つとして二次元コルモゴロフ流れが調べられてきた [10, 11]。この系は、二次元周期境界領域 (二次元トーラス T^2) $[0, 2\pi/\alpha] \times [0, 2\pi]$ 上で、外力 $\mathbf{f} = \sin(ny)\hat{x}$ を駆動力とした Navier-Stokes 方程式によって記述される流れである。この流れにおいて、層流の安定性や解の分岐が詳細に調べられてきた歴史がある。最近、Lucas・Kerswell により α 小のコルモゴロフ流れにおいて空間局在したダイナミクスが見られることが報告され [12]、蛭田・藤により保存量である流量が空間局在した構造の理解に本質的であることが報告された [13]。特に単独の局在乱流が実現するときには、流量によって層流解が安定化することが必要である。重要なことは、流量を導入したコルモゴロフ流れにおいて有向パーコレーション普遍クラスに属する亜臨界乱流遷移は実現しないことである。層流が線形安定で

あり、流れ場は局在乱流の集団で構成されるが、それぞれの局在乱流は確率的な増減を示さない。

本研究において、コルモゴロフ流に追加の駆動力として線形のドラッグ項を導入した。ドラッグ項が十分大きいと局在乱流が確率的な増減を示すようになる。この流れが実際に有向パーコレーション (DP) の普遍クラスに属する亜臨界乱流遷移を示すことを確認するとともに、流量の空間分布を通し、物理的な背景に迫る。

2 支配方程式・層流の安定化

長方形領域 $[0, 2\pi] \times [0, L]$ 上において定義された定常外力およびドラッグ力を加えた無次元化された Navier-Stokes 方程式

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} - \gamma(\mathbf{u} - \mathbf{U}_0) + \sin(ny)\hat{\mathbf{x}} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

を考える。ここで、 Re , α , n, γ はそれぞれ、レイノルズ数、領域のアスペクト比、外力の波数ドラッグ項の係数である。また、 $L = \frac{2\pi}{\alpha}$ である。領域の y 方向の長さが 2π になる長さスケールと、外力の係数が 1 になる時間スケールを用いて方程式は無次元化されている。

$$\mathbf{U} = \frac{\alpha}{4\pi^2} \int_0^{2\pi/\alpha} dx \int_0^{2\pi} dy \mathbf{u} \quad (3)$$

で定義される単位長さあたりの流量 U_y は領域の周期性と式 (2) を考慮しながら式 (1) を全領域で積分することで

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_0 + \exp(-\gamma t)(\mathbf{U}(0) - \mathbf{U}_0) \quad (4)$$

を満たすことがわかる。外力の影響により x 方向のガリレイ不変性は保たれるが、 y 方向のガリレイ不変性は破れていることに注意し流量が時間依存しない設定

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0 = (0, U_y) \quad (5)$$

を考慮することにする。考えている座標系は、流量が 0 かつ駆動力が $-\gamma \mathbf{u} + \sin(n(y - U_y t))\hat{\mathbf{x}}$ である系と同一である。

この方程式の大域層流解 (x 方向に並進対象な定常解) は

$$\mathbf{u}_{\text{lam}}(U_y) = \frac{Re}{\sqrt{(n^2 + \gamma)^2 + (nU_y Re)^2}} \cos(ny + \theta)\hat{\mathbf{x}} + U_y \hat{\mathbf{y}} \quad (6)$$

ここで、 $\tan \theta = nReU_y/(n^2 + \gamma)$ である。 $U_y \neq 0$ のとき層流解の係数 (従って速度勾配の絶対値) が $Re \rightarrow \infty$ においても U_y で決まる有限の上限を持つことに注意する。このことから、 $|U_y|$ が大きくなると層流解が有限の臨界 Re を持たなくなることが予想され、実際大きな $|U_y|$ に対しては、層流状態は微小攪乱について安定である。したがって、大域層流解は吸収状態である。

3 ドラッグ項による局在乱流構造の変化

まず、なぜ $\gamma = 0$ (蛭田・藤 2015) において、DP クラスの亜臨界乱流遷移が起きなかったか考察する。ある特定のスケールにエネルギー注入した際に、二次元 Navier-Stokes の解は多くの場合大きなスケールにエネルギーが輸送される傾向が見られる。この傾向は不変解レベルからスペクトル理論レベルまで見られる。とくに、所謂亜粘性を導入しない場合においては、粘性散逸 (小スケールで良く働く) が働かずシステムサイズの構造が出現する。このようにして現れた、システムサイズの構造は、”乱流領域の局所的な拡大・消滅”に反する。類似の事情が $\gamma = 0$ の系でも働いており、大域的な流れ構造を制限していると考えられる。すなわち時間的に保存される U_y が、空間的にはできるだけ長波長になる分散された状態を取りやすくなる。したがって、大きなスケールに働く散逸効果を現象論的に導入すれば、実現する解は大域的な流れ構造の制限が弱くなることが期待される。実際本研究で導入したドラッグ項は無次元長さ $(\text{Re}\gamma)^{-1/2}$ より大きなスケールで粘性項より卓越する。本研究の数値実験では $\text{Re}\gamma$ を固定して、 Re を変化させた場合の遷移を観測する。線形のドラッグ項は、流体を拘束する壁面などからの摩擦効果を取り入れたと考えることもできる。このばあい、外力が止まって見える系と壁が止まって見える系の相対速度が U_0 である。

4 臨界現象

局在乱流が分裂・崩壊するまでに運動する距離が十分遅いと仮定し、局在乱流は x 方向にのみ局在することから乱流領域の定義を層流との距離 $l(x)$

$$l(x) = \frac{1}{2\pi\delta x} \int_{x-\delta x/2}^{x+\delta x} dx \int_0^{2\pi} dy |\omega(x) - \omega_{\text{lam}}| \quad (7)$$

が適切に決めたしきい値より大きい領域として定義する。

乱流領域が占める割合 $\rho(2)$ および乱流領域の時空間間隔 l_T, l_S (図 1) を調べた。遷移点近傍では長時間後の乱流の占める割合 ρ^* が

$$\rho^* \sim \epsilon^\beta \quad (8)$$

$$\epsilon = \frac{\text{Re} - \text{Re}_c}{\text{Re}_c} \quad (9)$$

及び乱流領域の間隔について

$$P(l_T < l < l_T + dl) \sim l^{\mu_{\parallel}} dl \quad (10)$$

$$P(l_S < l < l_S + dl) \sim l^{\mu_{\perp}} dl \quad (11)$$

を満たす臨界現象が期待される。 $\text{Re}_c(U_y = 0.5, \gamma \text{Re} = 30) = 240$ それぞれにおいて図 2(左) および 1 において (1+1) 次元 DP 普遍クラスにおける予想 ($\beta = 0.27, \mu_{\parallel} = 1.84, \mu_{\perp} = 1.75$) の線を引きしている。結果は、(1+1) 次元 DP 普遍クラスの予想と矛盾しないことが示唆される。

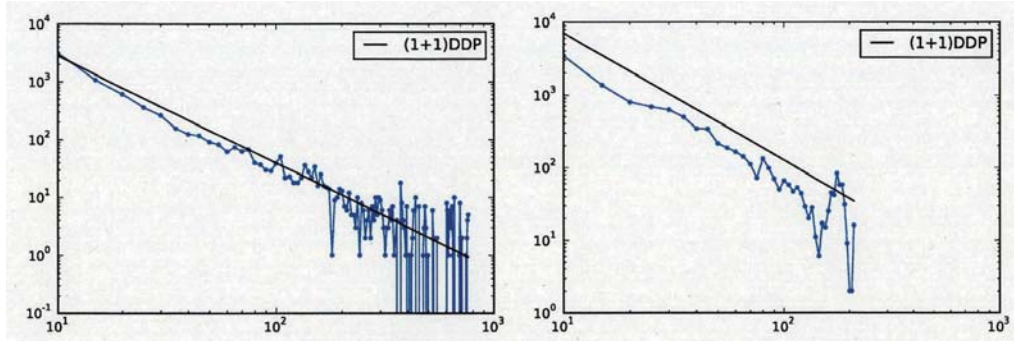


図1 層流クラスターの大きさ $n = 4 \alpha = 1/64$ (左) 時間方向 (右) 空間方向

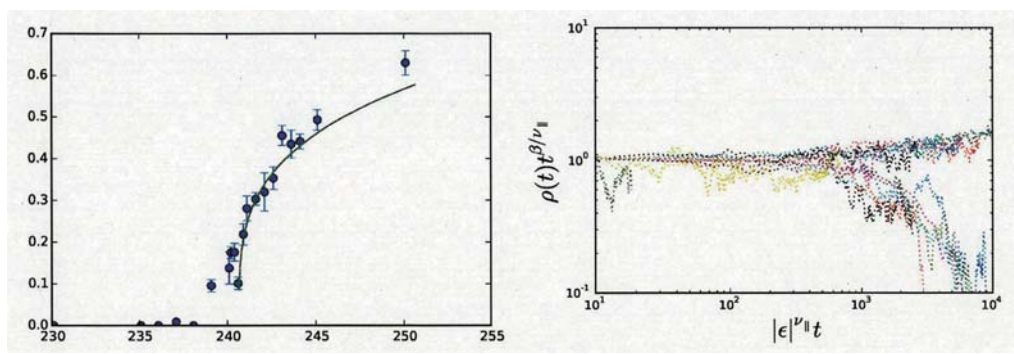


図2 (左) 長時間後の乱流領域の占める割合。(右) 普遍関数。

また、領域全体が局在乱流に占められた状態から急激にあるレイノルズ数に小さくした場合、典型的には、臨界点近傍で急激に変化する時間相関 $\tau \sim \epsilon^{\nu_{\parallel}}$ でスケールされる時間まで、

$$\rho(t) \sim t^{-\alpha} \tag{12}$$

で減衰し、その後 $\rho(t) \rightarrow \rho^*$ へ急速に近づく。従って、普遍関数 $F(t)$ が存在し

$$\rho(t) = t^{-\alpha} F(\epsilon t^{1/\nu_{\parallel}}) \tag{13}$$

と表されると期待される。(1+1)次元 DP 普遍クラスにおいては、 $\alpha = \beta/\nu_{\parallel}$ 、 $\nu_{\parallel} = 1.73$ と予想される。 $Re \sim Re_c$ における異なる Re において $\rho(t)$ を (1+1)次元 DP に従うと仮定してリスケールしたものが図2右であり、一つの関数に重なるように見える。

5 まとめ・展望

二次元コルモゴロフ流において、(1+1)次元有向パーコレーション普遍クラスに属する亜臨界乱流遷移が示唆された。二次元流体系、また壁境界の不在な系で、このクラスの遷移が現れること

が、初めて確認された。本研究によって壁境界の影響が本質でないという事実が明らかになったことで、現象の普遍性が明示されるとともに、亜臨界乱流遷移を支配方程式の視点から考察する基礎になると考えられる。一つの realization において普遍的な統計量が得られることから、そのような統計量と支配方程式（もしくは位相空間の構造）との関係を調べることは今後の研究課題である。

参考文献

- [1] O. Reynolds. An Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 174(0):935–982, 1883.
- [2] L. D. Landau. On the problem of turbulence. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 44(8):339–349, 1944.
- [3] David Ruelle and Floris Takens. On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, 20(3):167–192, 1971.
- [4] Mitchell J. Feigenbaum. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, 19(1):25–52, 1978.
- [5] J. P. Eckmann. Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. *Reviews of Modern Physics*, 53(4):643–654, 1981.
- [6] K Avila, D Moxey, A de Lozar, M Avila, D Barkley, and B Hof. The onset of turbulence in pipe flow. *Science*, 333(6039):192–196, 2011.
- [7] Masaki Sano and Keiichi Tamai. A universal transition to turbulence in channel flow. *Nature Physics*, 12(3):249–253, feb 2016.
- [8] Grégoire Lemoult, Liang Shi, Kerstin Avila, Shreyas V Jalikop, Marc Avila, and Björn Hof. Directed percolation phase transition to sustained turbulence in Couette flow. *Nature Physics*, 12(March):254–258, feb 2016.
- [9] Haye Hinrichsen. Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states. *Advances in Physics*, 49(7):815–958, 2000.
- [10] V I Arnold and L D Meshalkin. A.N. Kolmogorov’s Seminar on Selected Problems of Analysis (1958/1959). *Uspekhi Mat. Nauk*, 15(1(91)):247–250, 1960.
- [11] V. I. Arnol’d. Kolmogorov’s Hydrodynamic Attractors. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 434(1890):19–22, jul 1991.
- [12] Dan Lucas and Rich R. Kerswell. Spatiotemporal dynamics in two-dimensional Kolmogorov flow over large domains. *J. Fluid Mech*, 750(1993):518–554, 2014.
- [13] Yoshiki Hiruta and Sadayoshi Toh. Solitary solutions including spatially localized chaos and their interactions in two-dimensional Kolmogorov flow. *Physical Review E*, 92(6):063025, dec 2015.