数理解析研究所講究録 第2112巻 2019年 20-26

零点問題に関する誤差付きの近似定理
(APPROXIMATION THEOREMS WITH ERROR FOR ZERO POINT PROBLEMS)

茨木貴徳 (TAKANORI IBARAKI)
横浜国立大学 教育学部
(COLLEGE OF EDUCATION, YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY)

1. はじめに

E を実バナッハ空間とし, $A \subset E \times E^*$ を極大単調作用素とする. このとき

$$0 \in Au$$

を満たす元 u を求める問題を零点問題 (zero point problem) という. また, このような元 u を A の零点 (zero point) といい, A の零点全体の集合を $A^{-1}0$ で表す. 零点問題は凸最小化問題, ミニマックス問題等の多くの非線形問題を一般化した問題でもある. 零点問題を解く代表的な手法に近接点法 (proximal point algorithm) がある: 初期点を $x_1 \in H$ とし

$$x_{n+1} = J_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1.1}$$

で点列を構成する. ただし, $\{r_n\} \subset]0, \infty[$ であり, J_r は極大単調作用素 A と正の実数 r から生成されるリゾルベント (resolvent) と呼ばれる作用素である (詳細は第 3 節と第 4 節を参照). この近接点法は 1970 年に Martinet [16] により導入され, 1976 年に Rockafellar [18] により, ヒルベルト空間において $\inf_n r_n > 0$ かつ $A^{-1}0 \neq \emptyset$ を仮定すれば (1.1) で定義された点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元へ弱収束することが示された. この研究以降, 近接点法の研究はヒルベルト空間やバナッハ空間でさまざまな形で進められてきた.

一方, 不動点近似法に関する研究において高橋-竹内-窪田 [19] は, 非拡大写像の不動点を求める手法として収縮射影法 (shrinking projection method) と呼ばれる近似法を提案した.

定理 1.1 ([19]). *H を実ヒルベルト空間とし, C を H の空でない閉凸部分集合とし, T を $F(T)(:= \{p \in C : p = Tp\})$ が空でないような C から C への非拡大写像とする. また, $\{\alpha_n\}$ を $[0, a[$ の実数列とする. ただし, $0 < a < 1$ である. x_0 を H の任意の元とし点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する : $C_1 = C$, $x_1 = P_{C_1} x_0$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して*

$$\begin{aligned} y_n &= \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n, \\ C_n &= \{z \in C : \|z - y_n\| \leq \|z - x_n\|\} \cap C_{n-1}, \\ x_{n+1} &= P_{C_n} x_0 \end{aligned}$$

とする. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は $P_{F(T)} x_0$ に強収束する. ただし, P_K は H から H の空でない閉凸部分集合 K への距離射影とする.

なお, 高橋-竹内-窪田 [19] は論文の中で, 定理 1.1 より一般的な非拡大写像族の共通不動点への収束定理を得ている. 定理 1.1 が示されてから, この手法は多くの研究者によってヒルベルト空間やバナッハ空間で研究が活発に行われており, さらに近接点法の研究においても, この手法を用いる研究が活発に行われてきた. 特に, 木村-高橋 [13] はモスコ収束という概念を用いた

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H05, 47H09, 47J25.
Key words and phrases. 距離射影, 準距離射影, 単調作用素, 値域条件, リゾルベント.

証明方法を提案し, 空間の条件や係数条件を弱めることに成功した. さらに, これまでは収縮射影法で利用する非線形射影は写像との相性で限定されていたが, この証明方法を利用すればこれまでと違った写像と非線形射影の組合せで収縮射影法を利用できることも示した.

また, 収縮射影法は点列を構成する際に距離射影の正確な値を求める必要があるが, 一般的に距離射影の値を求めるのは容易ではない. そこで, 木村 [10] はこの問題を解決するために, 点列に誤差を含んだ収縮射影法を測地距離空間上で提案した. 近似法において誤差を認める場合には, 誤差級数の収束を条件に課すことが多い. しかし, この手法は誤差級数の収束どころか, 誤差数列が 0 に収束しなくても, 近似法において有益な成果が得られることを提示した ([11,12] 等も参照). 本論文では, 木村 [10] の手法を用いた, バナッハ空間にける近接点法の研究 [5] を考察する. さらに, [5] で用いた非線形射影とは別の非線形射影を用いた手法も議論する.

2. 準備

E を実バナッハ空間とし, E^* を E の共役空間 (dual space) とする. E の元 x に対し, E^* の部分集合

$$Jx := \{x^* \in E^* : \|x\|^2 = \langle x, x^* \rangle = \|x^*\|^2\}$$

を対応させる写像 J を双対写像 (duality mapping) と呼ぶ. バナッハ空間 E での双対写像 J に関しては以下の性質が知られている.

(1) E の元 x に対して, Jx は空でない有界な閉凸集合となる;
(2) E が回帰的であるための必要十分条件は, J が全射になることである;
(3) E が滑らかであるための必要十分条件は, J が一価になることである;
(4) E が狭義凸であるための必要十分条件は, J が単射になることである;
(5) E が回帰的で滑らかな狭義凸なとき, E^* の双対写像 J_* は J の逆像となる.

C を回帰的な狭義凸バナッハ空間 E の空でない閉凸部分集合とする. このとき, 任意の E の元 x に対し

$$\|x - x_0\| = \min_{y \in C} \|x - y\|$$

となる C の元 x_0 が一意に存在する. そこで E の元 x に対し, このような C の元 x_0 を対応させる写像を E から C の上への距離射影 (metric projection) と呼び, P_C で表す.

C を滑らかなバナッハ空間 E の空でない閉凸部分集合とする. このとき, C から E への写像 T が (P) 型写像 (mapping of type (P)) であるとは, C の任意の元 x, y に対して

$$\langle Tx - Ty, J(x - Tx) - J(y - Ty) \rangle \geq 0$$

が成り立つことである ([2] を参照). 距離射影 P_C は (P) 型写像であることが知られている. 同様に, C から E への写像 T が (Q) 型写像 (mapping of type (Q)) であるとは, C の任意の元 x, y に対して

$$\langle Tx - Ty, (Jx - JTx) - (Jy - JTy) \rangle \geq 0$$

が成り立つことである ([2,14] を参照). T の不動点集合を $F(T) = \{p \in C : p = Tp\}$ とする.

E を回帰的なバナッハ空間とし, $\{C_n\}$ を E の空でない閉凸部分集合列とする. このとき, $\{C_n\}$ の強下極限集合 $\text{s-Li}_n C_n$ と弱上極限集合 $\text{w-Ls}_n C_n$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \operatorname*{s-Li}_n C_n &= \{x \in E : \exists \{x_n\} \subset E \ s.t.\ x_n \to x, x_n \in C_n (\forall n \in \mathbb{N})\}, \\ \operatorname*{w-Ls}_n C_n &= \{x \in E : \exists \{x_{n_i}\} \subset E \ s.t.\ x_{n_i} \rightharpoonup x, x_{n_i} \in C_{n_i} (\forall i \in \mathbb{N})\} \end{aligned}$$

と定義する. ただし, $\to$, $\rightharpoonup$ はそれぞれ点列の強収束, 弱収束を表している. また, C_0 が

$$\operatorname*{s-Li}_n C_n = C_0 = \operatorname*{w-Ls}_n C_n$$

を満たすとき, $\{C_n\}$ が C_0 にモスコ収束 (Mosco convergence) するといい,

$$C_0 = \operatorname{M-lim}_n C_n$$

と表す ([17] を参照). 1984 年に塚田 [20] はバナッハ空間の距離射影に関して次の定理を得た.

定理 2.1 ([20]). *E をバナッハ空間とし, その共役空間 E^* がフレッシェ微分可能なノルムをもつとする. $\{C_n\}$ を E の空でない閉凸部分集合列とする. $\{C_n\}$ が C_0 にモスコ収束し, C_0 が空でないとき, E の任意の元 x に対し, $\{P_{C_n}x\}$ は $P_{C_0}x$ に強収束する.*

本論文では以下に示す関数 $\underline{g}_r$ 及び $\overline{g}_r$ が重要な役割を果たす.

定理 2.2 ([21]). *E をバナッハ空間とし, r を正の実数とする. $B_r = \{z \in E : \|z\| \leq r\}$ としたとき以下が成立する.*

(i) *E が一様凸ならば, $\underline{g}_r(0) = 0$ となる $[0, 2r]$ から $[0, \infty[$ への連続で狭義単調増加な凸関数 $\underline{g}_r$ が存在し, B_r の任意の元 x, y と $[0, 1]$ の任意の実数 α に対して*

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 \leq \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\underline{g}_r(\|x-y\|)$$

を満たす.

(ii) *E が一様に滑らかならば, $\overline{g}_r(0) = 0$ となる $[0, 2r]$ から $[0, \infty[$ への連続で狭義単調増加な凸関数 $\overline{g}_r$ が存在し, B_r の任意の元 x, y と $[0, 1]$ の任意の実数 α に対して*

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 \geq \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\overline{g}_r(\|x-y\|)$$

を満たす.

3. (P) 型リゾルベントに対する近似定理

本節では, 単調作用素から生成される (P) 型リゾルベントと呼ばれる作用素を利用した近接点法を議論する. E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とする. 多価写像 $A \subset E \times E^*$ に対して, A の定義域 (domain) と A の値域 (range) は

$$D(A) = \{x \in E : Ax \neq \emptyset\}, \ R(A) = \cup\{Ax : x \in D(A)\}$$

で定義される. 多価写像 $A \subset E \times E^*$ が単調作用素 (monotone operator) であるとは, 任意の $(x, x^*), (y, y^*) \in A$ に対して

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$

がつねに成り立つことと定義する. 単調作用素 A が極大 (maximal) であるとは, A を真に含む単調作用素 $B \subset E \times E^*$ が存在しないときいう. すなわち, $B \subset E \times E^*$ が単調作用素で, かつ $A \subset B$ であるならば, $A = B$ となるときをいう. A が極大単調作用素のとき $D(A)$ の閉包 $\overline{D(A)}$ は凸集合であることが知られている.

C を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間 E の空でない閉凸集合とし, 単調作用素 $A \subset E \times E^*$ が $r > 0$ に対して値域条件

$$D(A) \subset C \subset R(I + rJ^{-1}A) \tag{3.1}$$

を満たしているとする. このとき, C の任意の元 x に対して集合

$$P_r x = \{z \in E : 0 \in J(z - x) + rAz\}$$

を考えると, $P_r x$ は 1 点集合となる. すなわち, P_r は C から $D(A)$ への一価写像となり, C の任意の元 x に対して $P_r x = (I + rJ^{-1}A)^{-1}x$ と表せる. この P_r は (P) 型リゾルベント (the resolvent of type (P)) と呼ばれ, (P) 型写像であり $F(P_r) = A^{-1}0$ となることが知られている. なお, A が極大であれば $R(I + rJ^{-1}A) = E$ となることが知られており, $C = \overline{D(A)}$ とすれば A は値域条件 (3.1) を満たすことがわかる.

ここで (P) 型リゾルベントを用いた零点問題に関する次の近似定理を得る.

定理 3.1 ([5]). E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0$ が空でない単調作用素とする. $\{r_n\}$ を $\inf_n r_n > 0$ を満たす非負の実数列とし, C を E の空でない有界な閉凸集合とし, A が任意の自然数 n に対し値域条件

$$D(A) \subset C \subset R(I + r_n J^{-1} A)$$

を満たしているとする. また, r は B_r が C を含むような正の実数とする. $\{\delta_n\}$ を非負の実数列とし, $\delta_0 = \limsup_n \delta_n$ とする. u を E の任意の元として, 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する : $x_1 = x \in C$, $C_1 = C$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
&y_n = P_{r_n} x_n, \\
&C_{n+1} = \{z \in C_n : \langle y_n - z, J(x_n - y_n)\rangle \geq 0\}, \\
&x_{n+1} \in \{z \in C_{n+1} : \|u - z\|^2 \leq d(u, C_{n+1})^2 + \delta_{n+1}\}
\end{aligned}$$

とする. このとき

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| \leq \underline{g}_r^{-1}(\delta_0)$$

となる. さらに, $\delta_0 = 0$ のとき点列 $\{x_n\}$ は $P_{A^{-1}0} u$ に強収束する.

また, (P) 型写像と (P) 型リゾルベントには以下の結果が知られている.

補助定理 3.2 ([2]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, C を E の空でない集合とする. T を C から E への写像とし, 多価写像 $A_T \subset E \times E^*$ を $A_T = J(T^{-1} - I)$ で定義する. このとき T が (P) 型写像であることと, A_T が単調作用素であることは同値である. この場合 $T = (I + J^{-1} A_T)^{-1}$ となる.

定理 3.1 と補助定理 3.2 より次の近似定理を得ることができる.

系 3.3 ([5,8]). E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を E の空でない有界な閉凸部分集合とする. また, r は B_r が C を含むような正の実数とし, T を C から C への (P) 型写像で,$F(T)$ が空でないとする. $\{\delta_n\}$ は非負の実数列であり, $\delta_0 = \limsup_n \delta_n$ とする. u を E の任意の元として, 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する : $x_1 = x \in C$, $C_1 = C$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
&C_{n+1} = \{z \in C_n : \langle Tx_n - z, J(x_n - Tx_n)\rangle \geq 0\}, \\
&x_{n+1} \in \{z \in C_{n+1} : \|u - z\|^2 \leq d(u, C_{n+1})^2 + \delta_{n+1}\}
\end{aligned}$$

とする. このとき

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| \leq \underline{g}_r^{-1}(\delta_0)$$

となる. さらに, $\delta_0 = 0$ のとき点列 $\{x_n\}$ は $P_{F(T)} u$ に強収束する.

4. (Q) 型リゾルベントに対する近似定理

本節では, 第 3 節とは違うタイプのリゾルベントを用いた零点問題に関する近似定理を議論する. C を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間 E の空でない閉凸集合とし, 単調作用素 $A \subset E \times E^*$ が $r > 0$ に対して値域条件

$$D(A) \subset C \subset J^{-1} R(J + rA) \tag{4.1}$$

を満たしているとする. このとき, C の任意の元 x に対して集合

$$Q_r x = \{z \in E : Jx \in Jz + rAz\}$$

を考えると, $Q_r x$ は 1 点集合となる. すなわち, Q_r は C から $D(A)$ への一価写像となり, C の任意の元 x に対して $Q_r x = (J + rA)^{-1} Jx$ と表せる. この Q_r は (Q) 型リゾルベント (the resolvent of type (Q)) と呼ばれ, (Q) 型写像であり $F(Q_r) = A^{-1}0$ となることが知られている. なお, A

が極大であれば $J^{-1}R(J+rA)=E$ となることが知られており, $C=\overline{D(A)}$ とすれば A は値域条件 (4.1) を満たすことがわかる.

ここで (Q) 型リゾルベントを用いた零点問題に関する次の近似定理を得る.

定理 4.1 ([5]). *E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $A\subset E\times E^*$ を $A^{-1}0$ が空でない単調作用素とする. $\{r_n\}$ を $\inf_n r_n>0$ を満たす非負の実数列とし, C を E の空でない有界な閉凸集合とし, A が任意の自然数 n に対し値域条件*

$$D(A)\subset C\subset J^{-1}R(J+r_nA)$$

を満たしているとする. また, r は B_r が C を含むような正の実数とする. $\{\delta_n\}$ を非負の実数列とし, $\delta_0=\limsup_n\delta_n$ とする. u を E の任意の元として, 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する : $x_1=x\in C$, $C_1=C$ とし, $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}&y_n=Q_{r_n}x_n,\\&C_{n+1}=\{z\in C_n:\langle y_n-z,Jx_n-Jy_n\rangle\geq 0\},\\&x_{n+1}\in\{z\in C_{n+1}:\|u-z\|^2\leq d(u,C_{n+1})^2+\delta_{n+1}\}\end{aligned}$$

とする. このとき

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|\leq \underline{g}_r^{-1}\left(\overline{g}_r\big(\underline{g}_r^{-1}(\delta_0)\big)\right)$$

となる. さらに, $\delta_0=0$ のとき点列 $\{x_n\}$ は $P_{A^{-1}0}u$ に強収束する.

また, (Q) 型写像と (Q) 型リゾルベントには以下の結果が知られている.

補助定理 4.2 ([15]). *E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, C を E の空でない集合とする. T を C から E への写像とし, 多価写像 $A_T\subset E\times E^*$ を $A_T=JT^{-1}-J$ で定義する. このとき T が (Q) 型写像であることと, A_T が単調作用素であることは同値である. この場合 $T=(J+A_T)^{-1}J$ となる.*

定理 4.1 と補助定理 4.2 より次の近似定理を得ることができる.

系 4.3 ([5,8]). *E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を E の空でない有界な閉凸部分集合とする. また, r は B_r が C を含むような正の実数とし, T は C から C への (Q) 型写像で, $F(T)$ が空でないとする. $\{\delta_n\}$ は非負の実数列であり, $\delta_0=\limsup_n\delta_n$ とする. u を E の任意の元として, 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する : $x_1=x\in C$, $C_1=C$ とし, $n\in\mathbb{N}$ に対して*

$$\begin{aligned}&C_{n+1}=\{z\in C_n:\langle Tx_n-z,Jx_n-JTx_n\rangle\geq 0\},\\&x_{n+1}\in\{z\in C_{n+1}:\|u-z\|^2\leq d(u,C_{n+1})^2+\delta_{n+1}\}\end{aligned}$$

とする. このとき

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|\leq \underline{g}_r^{-1}\left(\overline{g}_r\big(\underline{g}_r^{-1}(\delta_0)\big)\right)$$

となる. さらに, $\delta_0=0$ のとき点列 $\{x_n\}$ は $P_{F(T)}u$ に強収束する.

5. 準距離射影を用いた近似定理

定理 3.1, 4.1 は収縮射影法に距離射影を用いていたが, 別の非線形射影である準距離射影 (generalized projection) を用いても証明可能である. E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, $E\times E$ から $\mathbb{R}$ への関数 V を E の任意の元 u,v に対し

$$V(u,v)=\|u\|^2-2\langle u,Jv\rangle+\|v\|^2$$

と定義する. さらに, C を E の閉凸部分集合としたとき, 任意の E の元 x に対し

$$V(x_0,x)=\min_{y\in C}V(y,x)$$

となる C の元 x_0 が一意に存在する．そこで E の元 x に対し，このような C の元 x_0 を対応させる写像を E から C の上への準距離射影 [1] と呼び，Π_C で表す．準距離射影は (Q) 型写像であることが知られており，定理 2.1 と類似の結果も知られている．

定理 5.1 ([9])**.** E を滑らかなバナッハ空間とし，その共役空間 E^* がフレッシェ微分可能なノルムをもつとする．$\{C_n\}$ を E の空でない閉凸部分集合列とする．$\{C_n\}$ が C_0 にモスコ収束し，C_0 が空でないとき，E の任意の元 x に対し，$\{\Pi_{C_n}x\}$ は $\Pi_{C_0}x$ に強収束する．

定理 5.1 を利用すれば，準距離射影を用いて定理 3.1, 4.1 と同様の成果が得られる．証明は省略するが，定理 3.1, 4.1 の証明と同様に示せる ([5–7] 等を参照)．

定理 5.2. E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし，$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0$ が空でない単調作用素とする．$\{r_n\}$ を $\inf_n r_n > 0$ を満たす非負の実数列とし，C を E の空でない有界な閉凸集合とし，A が任意の自然数 n に対し値域条件

$$D(A) \subset C \subset R(I + r_n J^{-1}A)$$

を満たしているとする．また，r は B_r が C を含むような正の実数とする．$\{\delta_n\}$ を非負の実数列とし，$\delta_0 = \limsup_n \delta_n$ とする．u を E の任意の元として，点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する：$x_1 = x \in C$, $C_1 = C$ とし，$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
&y_n = P_{r_n} x_n, \\
&C_{n+1} = \{z \in C_n : \langle y_n - z, J(x_n - y_n)\rangle \geq 0\}, \\
&x_{n+1} \in \{z \in C_{n+1} : V(x, u) \leq \inf\{V(y, u) : y \in C_{n+1}\} + \delta_{n+1}\}
\end{aligned}$$

とする．このとき

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| \leq \underline{g}_r^{-1}(\delta_0)$$

となる．さらに，$\delta_0 = 0$ のとき点列 $\{x_n\}$ は $\Pi_{A^{-1}0}u$ に強収束する．

定理 5.3. E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし，$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0$ が空でない単調作用素とする．$\{r_n\}$ を $\inf_n r_n > 0$ を満たす非負の実数列とし，C を E の空でない有界な閉凸集合とし，A が任意の自然数 n に対し値域条件

$$D(A) \subset C \subset J^{-1}R(J + r_n A)$$

を満たしているとする．また，r は B_r が C を含むような正の実数とする．$\{\delta_n\}$ を非負の実数列とし，$\delta_0 = \limsup_n \delta_n$ とする．u を E の任意の元として，点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する：$x_1 = x \in C$, $C_1 = C$ とし，$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
&y_n = Q_{r_n} x_n, \\
&C_{n+1} = \{z \in C_n : \langle y_n - z, Jx_n - Jy_n\rangle \geq 0\}, \\
&x_{n+1} \in \{z \in C_{n+1} : V(x, u) \leq \inf\{V(y, u) : y \in C_{n+1}\} + \delta_{n+1}\}
\end{aligned}$$

とする．このとき

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| \leq \underline{g}_r^{-1}\left(\overline{g}_r\left(\underline{g}_r^{-1}(\delta_0)\right)\right)$$

となる．さらに，$\delta_0 = 0$ のとき点列 $\{x_n\}$ は $\Pi_{A^{-1}0}u$ に強収束する．

参考文献

[1] Ya. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Dekker, New York, 1996, 15–50.

[2] K. Aoyama, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Three generalizations of firmly nonexpansive mappings: Their relations and continuity properties*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 131–147.

[3] K. Aoyama, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a family of mappings of type (P) and applications*, Proceedings of Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, Yokohama Publishers, 2009, 1–17.

[4] F. E. Browder, *Nonlinear maximal monotone operators in Banach space*, Math. Ann., **175** (1968), 89–113.

[5] T. Ibaraki, *Approximation of a zero point of monotone operators with nonsummable errors*, Fixed Point Theory Appl., **2016** 2016:48, 14 pp.

[6] T. Ibaraki, *Iterative approximation with errors of zero points of monotone operators in a Banach space*, Yokohama Math. J., **63** (2017), 91–109

[7] T. Ibaraki and S. Kajiba, *A shrinking projection method for generalized firmly nonexpansive mappings with nonsummable errors*, Josai Mathematical Monographs, **11** (2018), 105–120.

[8] T. Ibaraki and Y. Kimura, *Approximation of a fixed point of generalized firmly nonexpansive mappings with nonsummable errors*, Linear Nonlinear Anal., **2** (2016), 301–300.

[9] T. Ibaraki, Y. Kimura and W. Takahashi, *Convergence theorems for generalized projections and maximal monotone operaters in Banach spaces*, Abstra. appl. Anal., **2003** (2003), 621–629.

[10] Y. Kimura, *Approximation of a fixed point of nonexpansive mapping with nonsummable errors in a geodesic space*, Proceedings of the 10th International Conference on Fixed Point Theory and Its Applications, 2012, pp. 157–164.

[11] Y. Kimura, *Approximation of a fixed point of nonlinear mappings with nonsummable errors in a Banach space*, Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces IV (Kitakyushu, Japan), (L. Maligranda, M. Kato, and T. Suzuki eds.), 2014, pp. 303–311.

[12] Y. Kimura, *Approximation of a common fixed point of a finite family of nonexpansive mappings with nonsummable errors in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal. **15** (2014), 429–436.

[13] Y. Kimura and W. Takahashi, *On a hybrid method for a family of relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **357** (2009), 356–363.

[14] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive type mappings in Banach spaces*, SIAM J. Optim. **19** (2008), 824–835.

[15] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) **91** (2008), 166–177.

[16] B. Martinet, *Régularsation d'inéquations variationnells par approximations successives* (in French), Rev. Francaise Informat. Recherche Opérationnelles **4** (1970), 154–158. 383–390.

[17] U. Mosco, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Adv. in Math. **3** (1969), 510–585.

[18] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and proximal point algorithm*, SIAM J. Control. Optim. **14** (1976), 877–898.

[19] W. Takahashi, Y Takeuchi and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.

[20] M. Tsukada, *Convergence of best approximations in a smooth Banach space*, J. Approx. Theory **40** (1984), 301–309.

[21] H. K. Xu, *Inequalities in Banach spaces with applications*, Nonlinear Anal. **16** (1991), 1127–1138.