On some extended formulations of vector equilibrium problem
(ベクトル均衡点問題のいくつかの拡張定式化について)

秋田県立大学　システム科学技術学部　経営システム工学科
Faculty of Systems Science and Technology, Akita Prefectural University

荒谷　洋輔 (ARAYA, Yousuke) *　　斎藤　裕 (SAITO, Yutaka) †
木村　寛 (KIMURA, Yutaka) ‡

1　はじめに

ベクトル最適化問題の拡張である集合最適化問題は、1997年に黒岩-田中-Ha[10] によって提唱された。この問題は、集合値写像の像空間の元（集合）における大小の比較について 6 種類の順序を導入し、その順序による最適化問題を考えるというものである。その後、2011 年の Jahn-Ha よる新たな集合の順序の導入などがあり、近年における集合最適化の研究は、いろんな方面で盛んになってきている。

本稿は、京都大学数理解析研究所講究録 2011（2016 年 12 月）の続きである。まずいくつかの集合の順序を導入し、その性質を振り返る。次に、本稿の主題であるベクトル均衡点を拡張した集合均衡点問題を導入し、その妥当性を検証する。最後に、集合均衡点の存在定理について述べる。（所々に荒谷の感想もある。）

2　準備

2.1　ベクトル最適化からの準備

本稿では、Y を線形位相空間、$\mathbf{0}_Y$ を Y の原点とする。集合 $A \subset Y$ に対し、A の位相的内部、位相的閉包をそれぞれ $\mathrm{int}A$、$\mathrm{cl}A$ と表す。また、この論文で、$C \subset Y$ は閉凸錐を表すものとする。つまり、以下の条件を満たす。

(a) $\mathrm{cl}C = C$,

(b) $C + C \subseteq C$,

(c) $\lambda C \subseteq C\ \forall \lambda \in [0, \infty)$.

*(*E-mail:* **y-araya@akita-pu.ac.jp**)
†(*E-mail:* **yutakasai@akita-pu.ac.jp**)
‡(*E-mail:* **yutaka@akita-pu.ac.jp**)

尚、錐 $C \subset Y$ が solid とは $\mathrm{int}C \neq \emptyset$ を満たすことであり、pointed であるとは $C \cap (-C) = \{\mathbf{0}_Y\}$ が成立する場合である。凸錐 $C \subset Y$ によって以下のようなベクトル順序 $\leq_C$ が導入され、$(Y, \leq_C)$ は順序ベクトル空間となる。

$$\forall y_1, y_2 \in Y, \qquad y_1 \leq_C y_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} y_2 - y_1 \in C$$

もし、C が pointed ならベクトル順序 $\leq_C$ は反対称的となる。逆に一般の（実）順序ベクトル空間に対して、その順序と一意に対応する凸錐を構成することができ、その凸錐から生成される半順序が元のベクトル順序と一致することが確かめられる。

2.2 集合最適化からの準備

$\mathcal{V}$ を Y の空でない部分集合全体とする。$V_1, V_2 \in \mathcal{V}$、$\alpha \in \mathbb{R}$、$V \in \mathcal{V}$ に対して、２つの集合の和・スカラー積は以下のように定義される。

$$V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}, \qquad \alpha V := \{\alpha v \mid v \in V\}.$$

そのとき $\mathcal{V}$ は、$\{\mathbf{0}_Y\}$ を零ベクトルとするベクトル空間であることが確かめられる。

定義 2.1 (Kuroiwa-Tanaka-Ha [10])**.** $A,\ B \in \mathcal{V}$ と凸錐 $C \subset Y$ に対して、次を定義する。

$$(\mathbf{lower}) \quad A \leq_C^l B \quad \text{by} \quad B \subset A + C \qquad\qquad (\mathbf{upper}) \quad A \leq_C^u B \quad \text{by} \quad A \subset B - C.$$

命題 2.2. $A, B, D \in \mathcal{V}$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \leq_C^{l[u]} B \quad \Longrightarrow \quad (A + D) \leq_C^{l[u]} (B + D).$

(ii) $A \leq_C^{l[u]} B \quad \Longrightarrow \quad \alpha A \leq_C^{l[u]} \alpha B$ $(\alpha \geq 0)$.

(iii) $\leq_C^l$ と $\leq_C^u$ は、反射律と推移律が成り立つ。

定義 2.3 (Kuroiwa-Tanaka-Ha [10])**.** $A,\ B \in \mathcal{V}$ と凸錐 $C \subset Y$ に対して、次を定義する。

$$(\mathbf{weak}) \quad A \leq_C^w B \qquad \text{by} \qquad B - A \subset C.$$

命題 2.4 ([11])**.** $A, B \in \mathcal{V}$ と $y \in Y$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \leq_C^w B \quad \Longrightarrow \quad (A + y) \leq_C^w (B + y).$

(ii) $A \leq_C^w B \quad \Longrightarrow \quad \alpha A \leq_C^w \alpha B$ $(\alpha \geq 0)$.

(iii) $\leq_C^w$ は、推移律が成り立つ。

注意 1. 上記の順序を新たに「weak」と呼ぶこととする。また、$D - D \not\subset C$ を満たす $D \in \mathcal{V}$ が存在するため、任意の A、 $B \in \mathcal{V}$ に対して、$A \leq_C^w B \Longrightarrow (A + D) \leq_C^w (B + D)$ は言えない。

定義 2.5 (Kuroiwa-Tanaka-Ha [10])**.** $A,\ B \in \mathcal{V}$ と凸錐 $C \subset Y$ に対して、次を定義する。

$$[\mathbf{strong}] \quad A \leq_C^s B \quad \text{by} \quad 0_Y \in B - A - C \iff 0_Y \in A - B + C \qquad (\mathbf{A})$$

$$\iff A \cap (B - C) \neq \emptyset \iff (A + C) \cap B \neq \emptyset. \qquad (\mathbf{B})$$

注意 2. 上記の strong の定義について、Kuroiwa-Tanaka-Ha は下の行 (B) の形で定義し、その後荒谷-齋藤-木村が上の行 (A) の形と同値であることに気付いた。上記の順序を新たに「strong」と呼ぶこととする。

命題 2.6. $A, B \in \mathcal{V}$ と $y \in Y$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \leq_C^s B \implies (A+y) \leq_C^s (B+y)$.

(ii) $A \leq_C^s B \implies \alpha A \leq_C^s \alpha B$ $(\alpha \geq 0)$.

(iii) $\leq_C^s$ は、反射律が成り立つ。

命題 2.7. $A,\ B \in \mathcal{V}$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \leq_C^w B \implies A \leq_C^l B \implies A \leq_C^s B$.

(ii) $A \leq_C^w B \implies A \leq_C^u B \implies A \leq_C^s B$.

(iii) $\leq_C^l$ と $\leq_C^u$ は比較できない。

注意 3. ベクトル順序と集合順序の関係について、以下のような見方もできる。

$$\begin{array}{lcccc}
[\textbf{vector}] & b-a \in C \iff & b \in a+C \iff & a \in b-C \iff & 0_Y \in b-a-C \\
 & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\
[\textbf{set}] & B-A \subset C & B \subset A+C & A \subset B-C & 0_Y \in B-A-C \\
 & (\textbf{weak}) & (\textbf{lower}) & (\textbf{upper}) & (\textbf{strong})
\end{array}$$

（荒谷の感想） Kuroiwa-Tanaka-Ha [10] では 6 通りの集合順序を定義したが、重要度に差があるのかも知れない。つまり、上記の事実から集合順序は 6 通りの中で 1・3・5・6 が特に大切である可能性がある。

3 ベクトル均衡点問題の拡張定式化

3.1 集合均衡点問題の定義

X を空でない集合とする。まず最初に（実数値の）均衡点問題を定義する。

(EP) Find $x_0 \in X$ satisfying $F(x_0, y) \geq 0$ for all $y \in X$.

ここで、$f : X \times X \to \mathbb{R}$ は、実数値の 2 変数関数である。次に、（実数値の）均衡点問題の拡張であるベクトル均衡点問題を定義する。この問題は、以下の形で [4, 12] によって初めて導入された。

(VEP) Find $x_0 \in X$ satisfying $F(x_0, y) \not\leq_{\mathrm{int}C} \{0_Y\}$ for all $y \in X$.

ここで、$F : X \times X \to Y$ は、ベクトル値の 2 変数関数である。(VEP) の解 $x_0 \in X$ は、ベクトル均衡点と呼ばれ、上記の式は以下の形で書き換えられる。

$$f(x_0, X) \notin -\mathrm{int}C \qquad \text{and} \qquad f(x_0, X) \cap (-\mathrm{int}C) = \emptyset.$$

ベクトル均衡点の存在性に関する研究は、これまでたくさんの先行研究がある。([1, 2, 4, 7, 8, 9, 12] やその参考文献を参照のこと。) ベクトル均衡点問題に関しては、次のような強い順序の問題も考えることができる。

(s-VEP) Find $x_0 \in X$ satisfying $0_Y \leq_C F(x_0, y)$ for all $y \in X$.

しかし、本稿では弱い順序の問題 (VEP) を主に取り扱う。
その後上記の問題の拡張された形として、さまざまな型のベクトル均衡点問題が研究された。

(a) $\phi(x_0, y) \subset C(x_0)$

(b) $\phi(x_0, y) \cap C(x_0) \neq \emptyset$

(c) $\phi(x_0, y) \cap \{-(C(x_0) \setminus \{0_Y\})\} = \emptyset$

(d) $\phi(x_0, y) \not\subset -(C(x_0) \setminus \{0_Y\})$

(e) $\phi(x_0, y) \cap \{-\mathrm{int}C(x_0)\} = \emptyset$

(f) $\phi(x_0, y) \not\subset -\mathrm{int}C(x_0)$

ここで、$\phi : X \times X \to \mathcal{V}$ は、集合値の 2 変数関数、$C : X \to \mathcal{V}$ は、凸錐の値をとる関数である。([9] とその参考文献を参照のこと。)
ここで、本稿の主題である 4 つの型の集合均衡点問題を定義する。この問題は、ベクトル均衡点問題 (VEP) の拡張である。ここで $\bigstar = \{w, l, u, s\}$ として、**4 つの要素（記号）の中から 1 つを選ぶものとする。**

($\bigstar$-SEP) Find $x_0 \in X$ satisfying $F(x_0, y) \not\leq^{\bigstar}_{\mathrm{int}C} \{0_Y\}$ for all $y \in X$.

ここで、$F : X \times X \to \mathcal{V}$ は集合値の 2 変数関数である。(w-SEP)[(l-SEP)、(u-SEP)、(s-SEP)] の解 $x_0 \in X$ は、w-集合均衡点 [l-集合均衡点、u-集合均衡点、s-集合均衡点] と呼ばれる。同じように、強い順序のベクトル均衡点問題 (s-VEP) の拡張である、4 つの型の（強い順序による）集合均衡点問題を定義する。

($\bigstar$-s-SEP) Find $x_0 \in X$ satisfying $\{0_Y\} \leq^{\bigstar}_C F(x_0, y)$ for all $y \in X$.

ここで、上記の分類 **(a)**、**(b)**、**(c)**、**(d)**、**(e)**、**(f)** と上記の集合均衡点問題を比較してみよう。すると、次の事が分かる。

- $F(x_0, y) \not\leq^{l}_{\mathrm{int}C} \{0_Y\} \iff 0_Y \notin F(x_0, y) + \mathrm{int}C$

  $\iff F(x_0, y) \cap (-\mathrm{int}C) = \emptyset \ (F(x_0, y) \not\leq^{s}_{\mathrm{int}C} \{0_Y\})$ **(e)**,
- $F(x_0, y) \not\leq^{u}_{\mathrm{int}C} \{0_Y\} \ (F(x_0, y) \not\leq^{w}_{\mathrm{int}C} \{0_Y\}) \iff F(x_0, y) \not\subset -\mathrm{int}C$ **(f)**,
- $\{0_Y\} \leq^{l}_C F(x_0, y) \ (\{0_Y\} \leq^{w}_C F(x_0, y)) \iff F(x_0, y) \subset C$ **(a)**,
- $\{0_Y\} \leq^{u}_C F(x_0, y) \iff 0_Y \in F(x_0, y) - C$

  $\iff F(x_0, y) \cap C \neq \emptyset \ (\{0_Y\} \leq^{s}_C F(x_0, y))$ **(b)**.

つまり、下記の関係がある。

- (s-SEP) = (l-SEP) = **(e)** $\subset$ (u-SEP) = (w-SEP) = **(f)**
- (w-s-SEP)= (l-s-SEP) = **(a)** $\subset$ (u-s-SEP) = (s-s-SEP) = **(b)**

一般に l 型と u 型は比較できないが、集合均衡点問題に限ると、常に l 型 $\subset u$ 型となることが分かる。本稿では、順序錐 $C \subset Y$ は Y の原点を含むと仮定しているので、**(c)** と **(d)** は取り扱わない。さらに、本稿では弱い順序の問題 (l-SEP)・(u-SEP)、つまり **(e)**・**(f)** を主に取り扱う。

(荒谷の感想) 荒谷は近年、集合値写像における Ekeland の変分原理などの研究を行ってきた。その中で、反射律と推移律は重要であり、そのせいもあって、集合最適化問題において l 型・u 型以外は有用性が低いと考えていた。しかし、どうやらそれは認識の誤りであるようだ。また、他の多くの研究者も l 型以外はあまり考える価値がないと思っている節がある。しかし、本稿の研究でそれは否定され、集合最適化の研究の奥深さを感じている。

3.2 集合均衡点問題と集合最適化問題との関連

ベクトルの場合では、ベクトル均衡点問題（VEP）をベクトル最適化問題 (VOP) へ次の方法で落とすことができる。

$$\text{(VEP)} \to \text{(VOP)} \qquad f(x_0, y) = g(y) - g(x_0)$$

ここで、$g : X \to Y$ はベクトル値関数である。私たちは以下のような「弱い順序」と「強い順序」による集合最適化問題を考える。

[weak type]

(★-SOP) Find $x_0 \in X$ satisfying $G(y) \not\leq^{\bigstar}_{\mathrm{int}C} G(x_0)$ for all $y \in X$.

[strong type]

(★-s-SOP) Find $x_0 \in X$ satisfying $G(x_0) \leq^{\bigstar}_{C} G(y)$ for all $y \in X$.

ここで、X は空でないある集合、$G : X \to \mathcal{V}$ は集合値写像である。

ベクトルの場合と同様に、私たちは集合均衡点問題を集合最適化問題に落とすことを考える。「集合」は等式を考える際に移項が自由にできないので、以下の 4 つの型を考える必要がある。

(I) $F(x_0, y) = G(y) - G(x_0)$

(II) $F(x_0, y) + G(x_0) = G(y)$

(III) $F(x_0, y) - G(y) = -G(x_0)$

(IV-l) $0_Y \in F(x_0, y) - G(y) + G(x_0)$

(IV-u) $F(x_0, y) - G(y) + G(x_0) \subset -C$

すると、次の事が分かる。

- **(l-s-SEP)** の場合

$$\begin{aligned}
\text{(I)} &\implies \textbf{(weak-s-SOP)}\\
\text{(II)} &\implies \textbf{(lower-s-SOP)}\\
\text{(III)} &\implies \textbf{(upper-s-SOP)}\\
\text{(IV-}l\text{)} &\implies \textbf{(strong-s-SOP)}
\end{aligned}$$

- **(u-s-SEP)** の場合

$$
\begin{aligned}
\text{(I)} &\implies \textbf{(strong-s-SOP)}\\
\text{(II)} &\implies \textbf{(upper-s-SOP)}\\
\text{(III)} &\implies \textbf{(lower-s-SOP)}\\
(\text{IV-}u) &\implies \textbf{(weak-s-SOP)}
\end{aligned}
$$

このようにして、集合均衡点問題はいくつかの集合最適化問題を含んでいることが分かった。(弱い順序の方はこのままではうまく行かず、集合値写像 F, G に何らかの条件を付け加える必要がある。それらは今後の課題である。）同様にして、いくつかの集合鞍点問題も含んでいることも確認できる（[3] を参照)。**よって、本稿の定式化はベクトル均衡点問題の１つの拡張として妥当と言える**と筆者は考えている。他の拡張方法の可能性については、今後の課題である。

（荒谷の感想）集合均衡点問題は、ベクトル均衡点問題のアナロジーである部分が多いだろうと予想していたが、実際はもっと複雑でありとても驚いている。今後は、均衡解の構造の研究も重要な課題になるかも知れない。

4 集合均衡点問題の存在定理（u 型）

2016 年に Han-Huang[8] は、一般化ベクトル均衡点問題（l 型集合均衡点問題）を、以下の Fan-KKM の定理を利用して解の存在定理を発表した。

定義 4.1. K をベクトル空間 X の空でない部分集合とする。集合値写像 $F : K \to 2^X$ が KKM 写像であるとは、K の任意の有限部分集合 $\{y_1, y_2, \cdots y_n\}$ について、以下が成り立つときである。

$$
\operatorname{conv}(\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} F(y_i).
$$

ここで、$\operatorname{conv}(\{y_1, y_2, \ldots, y_n\})$ は、$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ の凸包である。

定理 4.2 (Fan-KKM Theorem [6]). K をハウスドルフ線形位相空間 X の空でない部分集合、$F : K \to 2^X$ を閉集合の値をとる KKM 写像であるとする。もし、$F(x_0)$ がコンパクトとなるような $x_0 \in K$ が存在するなら、$\bigcap_{y \in K} F(y) \neq \emptyset$ である。

前章で私たちは、u 型集合均衡点問題は l 型問題の解の集合を含むことから、u 型問題の存在性の研究の重要性を示した。そこで、私たちは Han-Huang[8] を参考に u 型の存在定理を得た。

定義 4.3 (荒谷-斎藤-木村 [3])**.** $D \subset X$ をベクトル空間 X の空でない凸集合とする。集合値写像 $F : D \times D \to \mathcal{V}$ が、diagonally u-C-convex であるとは、任意の $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset D$ と $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \cdots n$、$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ について、次が成り立つことである。

$$
F\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \subset \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, x_i\right) - C
$$

$$
\left[F\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq_C^u \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, x_i\right)\right].
$$

定理 4.4 (荒谷-斎藤-木村 [3]). X をノルム空間、$F : X \times X \to \mathcal{V}$ を集合値写像、$K \subset X$ を X のコンパクトで凸な部分集合とする。次を仮定する。

(i) 任意の $x \in K$ に対して、$F(x,x) \not\subset -\mathrm{int}C$ $[F(x,x) \not\leq^{u}_{\mathrm{int}C} 0_Y]$、

(ii) 任意の $y \in K$ に対して、$\{x \in K \mid F(x,y) \not\subset -\mathrm{int}C\}$ は閉集合、

(iii) $F(\cdot;\cdot)$ は *diagonally u-C-convex*。

そのとき、(u-SEP) の解集合は空でない。

参考文献

[1] Q. H. Ansari and J. C. Yao, *An existence result for the generalized vector equilibrium problem*, Appl. Math. Lett. **12** (1999), 53–56.

[2] Y. Araya, K. Kimura and T. Tanaka, *Existence of vector equilibria via Ekeland's variational principle*, Taiwanese J. Math. 12 (2008) 1991–2000.

[3] Y. Araya, Y. Saito and Y. Kimura, *On some extended formulations of vector equilibrium problem and its existence theorems*, submitted.

[4] M. Bianchi, N. Hadjisavvas and S. Schaible, *Vector equilibrium problems with generalized monotone bifunctions*. J. Optim. Theory Appl. 92, 527–542 (1997).

[5] E. Blum and W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student 63, 123–145 (1994).

[6] K. Fan, *A generalization of Tychonoff's fixed point theorem*, Math. Ann. 142, 305–310 (1960/1961).

[7] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer and C. Zălinescu *Variational methods in partially ordered spaces*, Springer-Verlag, New York 2003.

[8] Y. Han and N. Huang, *Existence and stability of solutions for a class of generalized vector equilibrium problems*, Positivity 20, 829–846 (2016).

[9] E. M. Kalmoun, *Vector equilibrium problems as a unified approach*, Nonlinear Analysis and Convex Analysis, S. Akashi, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), pp. 137–148. Yokohama Publishers, Yokohama (2003).

[10] D. Kuroiwa, T. Tanaka and T.X.D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal. 30, 1487–1496 (1997).

[11] I. Kuwano, T. Tanaka and S. Yamada, *Characterization of nonlinear scalarizing functions for set-valued maps*, Nonlinear Analysis and Optimization, S. Akashi, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), pp. 193–204. Yokohama Publishers, Yokohama (2009).

[12] W. Oettli, *A remark on vector-valued equilibria and generalized monotonicity*, Acta Math. Vietnam. 22, 213–221 (1997).