数理解析研究所講究録 第2114巻 2019年 229-234

ファジィ集合の優劣関係に基づく差の評価とその数値計算法

新潟大学大学院自然科学研究科　池 浩一郎 (Koichiro Ike)
田中 環 (Tamaki Tanaka)
Graduate School of Science and Technology, Niigata University

1　はじめに

本稿では，論文 [2] に基づいて，集合の比較規準及びスカラー化手法をファジィ集合 (Zadeh [7]) の場合へと一般化した結果を紹介する．

ベクトル空間においては，凸錐から前順序を定めて順序ベクトル空間を構成できることがよく知られている．それを利用する形で，集合同士を比較するための自然な規準として 6 種類の集合の優劣関係 (set relations, [4]) が提案され，それらの変種 ([3]) も含めて広く研究が行われてきた．加えて，Gerstewitz によるベクトルのスカラー化関数 ([1]) を基にして，論文 [5] で集合のスカラー化関数が定義され，最近ではその数値計算法に関する成果も発表されている ([6])．我々は，集合を対象とした上述のような理論に対して，集合の拡張概念であるファジィ集合の場合への一般化を考える．

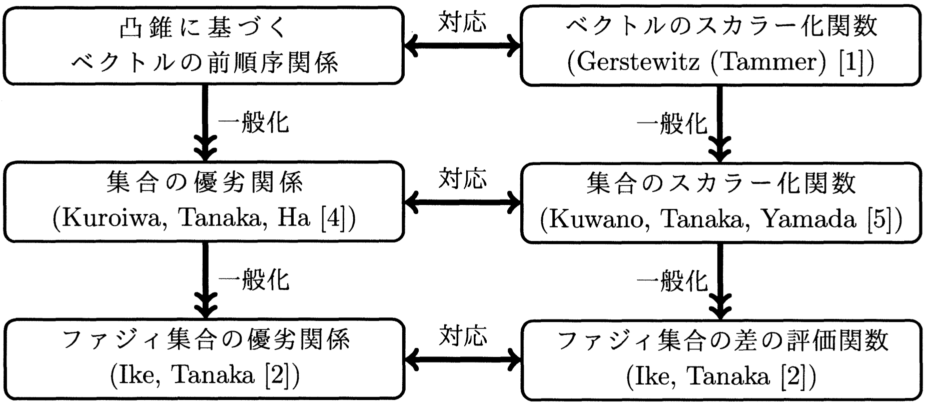

図 1　研究の位置づけ

2 準備

以下では，V を実ノルム空間，$\mathcal{P}(V)$ を V の冪集合とし，集合 A の内部，閉包，凸包をそれぞれ，$\operatorname{int} A$，$\operatorname{cl} A$，$\operatorname{co} A$ と書くことにする．$C \in \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$ を凸錐とし，V 上の前順序 $\leq_C$ を，$v_1, v_2 \in V$ に対して $v_1 \leq_C v_2 :\Longleftrightarrow v_2 - v_1 \in C$ と定める．

集合の優劣関係の定義を次のように与える．これは，論文 [4] で提案されたもの及び [5] や [6] で用いられているものの修正版であることに注意せよ．

定義 1 (集合の優劣関係, [2])**.** $A, B \in \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$ に対して

$$
\begin{aligned}
A \leq_C^{(1)} B &:\Longleftrightarrow \forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leq_C b;\\
A \leq_C^{(2L)} B &:\Longleftrightarrow \exists a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leq_C b;\\
A \leq_C^{(2U)} B &:\Longleftrightarrow \exists b \in B,\ \forall a \in A,\ a \leq_C b;\\
A \leq_C^{(2)} B &:\Longleftrightarrow A \leq_C^{(2L)} B \text{ かつ } A \leq_C^{(2U)} B;\\
A \leq_C^{(3L)} B &:\Longleftrightarrow \forall b \in B,\ \exists a \in A,\ a \leq_C b;\\
A \leq_C^{(3U)} B &:\Longleftrightarrow \forall a \in A,\ \exists b \in B,\ a \leq_C b;\\
A \leq_C^{(3)} B &:\Longleftrightarrow A \leq_C^{(3L)} B \text{ かつ } A \leq_C^{(3U)} B;\\
A \leq_C^{(4)} B &:\Longleftrightarrow \exists a \in A,\ \exists b \in B,\ a \leq_C b
\end{aligned}
$$

と定める．

これらの優劣関係の強弱に関しては，定義より明らかに

$$
\begin{aligned}
&A \leq_C^{(1)} B \Longrightarrow A \leq_C^{(2L)} B \Longrightarrow A \leq_C^{(3L)} B \Longrightarrow A \leq_C^{(4)} B;\\
&A \leq_C^{(1)} B \Longrightarrow A \leq_C^{(2U)} B \Longrightarrow A \leq_C^{(3U)} B \Longrightarrow A \leq_C^{(4)} B;\\
&A \leq_C^{(1)} B \Longrightarrow A \leq_C^{(2)} B \Longrightarrow A \leq_C^{(3)} B \Longrightarrow A \leq_C^{(4)} B
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

次に，ファジィ集合とそれに関連する概念について確認する．V 上のファジィ集合 $\tilde{A}$ は，その所属度関数 $\mu_{\tilde{A}} : V \to [0,1]$ により特徴づけられる．各 $\alpha \in [0,1]$ に対して，$\tilde{A}$ の α-レベル集合 $[\tilde{A}]_\alpha \in \mathcal{P}(V)$ を

$$
[\tilde{A}]_\alpha := \begin{cases} \{v \in V \mid \mu_{\tilde{A}}(v) \geq \alpha\} & (\alpha \in (0,1]) \\ \operatorname{cl}\{v \in V \mid \mu_{\tilde{A}}(v) > 0\} & (\alpha = 0) \end{cases}
$$

のように定める．$[\tilde{A}]_1 \neq \emptyset$ を満たすとき，$\tilde{A}$ は正規であるという．$\tilde{A}$ をベクトル $k \in V$ だけ平行移動して得られるファジィ集合 $\tilde{A}+k$ を，$v \in V$ に対して $\mu_{\tilde{A}+k}(v) := \mu_{\tilde{A}}(v-k)$ により定める．このとき，各 $\alpha \in [0,1]$ に対して $[\tilde{A}+k]_\alpha = [\tilde{A}]_\alpha + k$ が成り立つ．以降，V 上のファジィ集合の全体，V 上の正規ファジィ集合の全体をそれぞれ，$\mathcal{F}(V)$，$\mathcal{F}_{\mathcal{N}}(V)$ と書くことにする．

3 ファジィ集合の場合への一般化

Ω を $[0,1]$ の空でない部分集合とし，ファジィ集合を比較する上で考慮すべき所属度の集まりとして解釈しよう．集合の優劣関係 (定義 1) を利用して，ファジィ集合の優劣関係を次のように定義する．

定義 2 (ファジィ集合の優劣関係, [2])．各 $j = 1, 2L, 2U, 2, 3L, 3U, 3, 4$ と $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}_{\mathcal{N}}(V)$ に対して

$$\tilde{A} \leq_C^{\Omega(j)} \tilde{B} :\Longleftrightarrow \forall \alpha \in \Omega,\ [\tilde{A}]_\alpha \leq_C^{(j)} [\tilde{B}]_\alpha$$

と定める．

強弱に関しては，集合の優劣関係と同様に

$$\begin{gathered}\tilde{A} \leq_C^{\Omega(1)} \tilde{B} \Longrightarrow \tilde{A} \leq_C^{\Omega(2L)} \tilde{B} \Longrightarrow \tilde{A} \leq_C^{\Omega(3L)} \tilde{B} \Longrightarrow \tilde{A} \leq_C^{\Omega(4)} \tilde{B};\\ \tilde{A} \leq_C^{\Omega(1)} \tilde{B} \Longrightarrow \tilde{A} \leq_C^{\Omega(2U)} \tilde{B} \Longrightarrow \tilde{A} \leq_C^{\Omega(3U)} \tilde{B} \Longrightarrow \tilde{A} \leq_C^{\Omega(4)} \tilde{B};\\ \tilde{A} \leq_C^{\Omega(1)} \tilde{B} \Longrightarrow \tilde{A} \leq_C^{\Omega(2)} \tilde{B} \Longrightarrow \tilde{A} \leq_C^{\Omega(3)} \tilde{B} \Longrightarrow \tilde{A} \leq_C^{\Omega(4)} \tilde{B}\end{gathered}$$

が成り立つ．

平行移動の方向ベクトルとして，$k \in \operatorname{int} C$ をとる．それぞれの優劣関係に基づいて 2 つのファジィ集合の差を評価する尺度として，次の関数を導入する．

定義 3 (ファジィ集合の差の評価関数, [2])．各 $j = 1, 2L, 2U, 2, 3L, 3U, 3, 4$ に対して $D_{C,k}^{\Omega(j)} : \mathcal{F}_{\mathcal{N}}(V) \times \mathcal{F}_{\mathcal{N}}(V) \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を，$\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}_{\mathcal{N}}(V)$ に対して

$$D_{C,k}^{\Omega(j)}(\tilde{A}, \tilde{B}) := \sup \left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; \tilde{A} + tk \leq_C^{\Omega(j)} \tilde{B} \right\}$$

のように定める．

これは，Gerstewitz によるベクトルのスカラー化関数 ([1])

$$\varphi_{C,k} : V \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \quad \varphi_{C,k}(v) := \inf \{ t \in \mathbb{R} \mid v \in tk - C \} \ (v \in V)$$

及び集合のスカラー化関数 ([5])

$$
\begin{aligned}
&I_{k,B}^{(j)}, S_{k,B}^{(j)} : \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \\
&I_{k,B}^{(j)}(A) := \inf \left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; A \leq_C^{(j)} B + tk \right\} \ (A \in \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}), \\
&S_{k,B}^{(j)}(A) := \sup \left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; B + tk \leq_C^{(j)} A \right\} \ (A \in \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\})
\end{aligned}
$$

(ただし，$B \in \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$，$j = 1, 2L, 2U, 3L, 3U, 4$) と同様の考え方に拠るものである．

本稿の残りでは，$j = 3L$ の場合に絞って，ファジィ集合の優劣関係と差の評価関数に関わる 2 つの重要な結果 (定理 1, 2) を紹介する．

以下は，定理 1 の条件部分を記述するための準備である．

定義 4 (ファジィ集合のコンパクト性, [2])**.** $\tilde{A} \in \mathcal{F}(V)$ とする．このとき，

$$\tilde{A} \text{ が } \Omega\text{-コンパクト} :\Longleftrightarrow \forall \alpha \in \Omega,\ [\tilde{A}]_\alpha \text{ がコンパクト}$$

と定める．

定義 5 (集合値写像の H-連続性, [1])**.** X を位相空間，$F : X \to \mathcal{P}(V)$，$x_0 \in X$ とする．このとき，

- F が x_0 で H-上連続 $:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists U \in \mathcal{N}_X(x_0),\ \forall x \in U,\ F(x) \subset F(x_0) + B_\varepsilon$;
- F が x_0 で H-下連続 $:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists U \in \mathcal{N}_X(x_0),\ \forall x \in U,\ F(x_0) \subset F(x) + B_\varepsilon$;
- F が H-上連続 (H-下連続)$:\Longleftrightarrow \forall x \in X$, F が x で H-上連続 (H-下連続)

と定める．ただし，$\mathcal{N}_X(x_0)$ は X における x_0 の近傍の全体，B_ε は零ベクトルを中心とする半径 ε の開球であり，「H」は「Hausdorff」を意味している．

定義 6 (ファジィ集合のレベル集合に関する安定性, [2])**.** $\tilde{A} \in \mathcal{F}(V)$ とする．このとき，

- $\tilde{A}$ が Ω 内での所属度の減少に対して安定
  $:\Longleftrightarrow$ 集合値写像 $\Omega \ni \alpha \mapsto [\tilde{A}]_\alpha \in \mathcal{P}(V)$ が H-上連続;
- $\tilde{A}$ が Ω 内での所属度の増加に対して安定
  $:\Longleftrightarrow$ 集合値写像 $\Omega \ni \alpha \mapsto [\tilde{A}]_\alpha \in \mathcal{P}(V)$ が H-下連続

と定める．

命題 1 (ファジィ集合のコンパクト性とレベル集合に関する安定性の関係, [2])**.** $\tilde{A} \in \mathcal{F}(V)$ とする．このとき，

$$\tilde{A}\text{ が }\Omega\text{-コンパクト} \Longrightarrow \tilde{A}\text{ は }\Omega\text{ 内での所属度の減少に対して安定}$$

が成り立つ．

定理 1 (ファジィ集合の優劣関係と差の評価関数の対応 ($3L$ 番), [2])．$\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}_{\mathcal{N}}(V)$ とする．このとき，

- $\tilde{A}$ が Ω-コンパクトならば，
$$\tilde{A} \leq^{\Omega(3L)}_{\mathrm{cl}\,C} \tilde{B} \Longleftrightarrow D^{\Omega(3L)}_{C,k}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq 0;$$
- Ω が閉，$\tilde{A}$ が Ω 内での所属度の増加に対して安定，$\tilde{B}$ が Ω-コンパクトならば，
$$\tilde{A} \leq^{\Omega(3L)}_{\mathrm{int}\,C} \tilde{B} \Longleftrightarrow D^{\Omega(3L)}_{C,k}(\tilde{A}, \tilde{B}) > 0$$

が成り立つ．

この定理は，実数 a, b に関する自明な同値性

$$a \leq b \Longleftrightarrow b - a \geq 0; \quad a < b \Longleftrightarrow b - a > 0$$

に対してのある種の一般化であると言える．

最後に，論文 [6] での議論を拡張することで得られる，ファジィ集合の差の評価関数の数値計算法を扱う．一般に，$\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}_{\mathcal{N}}(V)$ に対して

$$D^{\Omega(3L)}_{C,k}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \inf_{\alpha \in \Omega} \sup \left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; [\tilde{A}]_\alpha + tk \leq^{(3L)}_C [\tilde{B}]_\alpha \right\},$$

$A, B \in \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$ に対して

$$\sup \left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; A + tk \leq^{(3L)}_C B \right\} = \inf_{b \in B} \sup_{a \in A} \sup \left\{ t \in \mathbb{R} \mid a + tk \leq_C b \right\},$$

$C = \bigcap_{l=1,\ldots,q} \{v \in V \mid \langle p_l, v \rangle \geq 0\}$ ($p_1, \ldots, p_q \in V^* \setminus \{\theta\}$)，$a, b \in V$ に対して

$$\sup \left\{ t \in \mathbb{R} \mid a + tk \leq_C b \right\} = \min_{l=1,\ldots,q} \left\langle \frac{p_l}{\langle p_l, k \rangle}, b - a \right\rangle$$

がそれぞれ成り立つ (ただし，V^* は V の双対空間，θ は V^* の零ベクトル)．これらを用いることで，次の定理が導かれる．

定理 2 (ファジィ集合の差の評価関数の数値計算法 ($3L$ 番), [2])．$C = \bigcap_{l=1,\ldots,q} \{v \in V \mid \langle p_l, v \rangle \geq 0\}$ ($p_1, \ldots, p_q \in V^* \setminus \{\theta\}$)，$\Omega = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\omega\} \subset [0, 1]$，$\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}_{\mathcal{N}}(V)$

とし，各 $h=1,\dots,\omega$ について $[\tilde{A}]_{\alpha_h}=\mathrm{co}\left\{a_1^h,\dots,a_{m_h}^h\right\}$，$[\tilde{B}]_{\alpha_h}=\mathrm{co}\left\{b_1^h,\dots,b_{n_h}^h\right\}$ $(a_1^h,\dots,a_{m_h}^h,b_1^h,\dots,b_{n_h}^h\in V)$ と表されるとする．このとき，

$$
\begin{aligned}
&D_{C,k}^{\Omega(3L)}(\tilde{A},\tilde{B})\\
&=\min_{h=1,\dots,\omega}\min_{j=1,\dots,n_h}\sup\left\{t\in\mathbb{R}\;\middle|\;\langle p_l,k\rangle\,t+\sum_{i=1}^{m_h}\left\langle p_l,a_i^h\right\rangle\lambda_i\le\left\langle p_l,b_j^h\right\rangle\ (l=1,\dots,q),\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left.\lambda_i\ge 0\ (i=1,\dots,m_h),\ \sum_{i=1}^{m_h}\lambda_i=1\right\}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

この等式より，定理の条件を満足する場合においては，$(\sum_{h=1}^{\omega}n_h)$ 個の線型計画問題を解いてそれらの最適値の最小値を求めることによって，$D_{C,k}^{\Omega(3L)}(\tilde{A},\tilde{B})$ の値を計算できることが分かる．さらに，定理 1 を利用すれば，$\tilde{A}\le_{\mathrm{cl}\,C}^{\Omega(3L)}\tilde{B}$ 及び $\tilde{A}\le_{\mathrm{int}\,C}^{\Omega(3L)}\tilde{B}$ が成り立つか否かを判定することも可能となる．

参考文献

[1] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, and C. Zălinescu. *Variational methods in partially ordered spaces.* Springer-Verlag, New York, 2003.

[2] K. Ike and T. Tanaka. Convex-cone-based comparisons of and difference evaluations for fuzzy sets. Submitted.

[3] J. Jahn and T. X. D. Ha. New order relations in set optimization. *J. Optim. Theory Appl.*, 148(2):209–236, 2011.

[4] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T. X. D. Ha. On cone convexity of set-valued maps. *Nonlinear Anal.*, 30(3):1487–1496, 1997.

[5] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada. Unified scalarization for sets and set-valued Ky Fan minimax inequality. *J. Nonlinear Convex Anal.*, 11(3):513–525, 2010.

[6] H. Yu, K. Ike, Y. Ogata, Y. Saito, and T. Tanaka. Computational methods for set-relation-based scalarizing functions. *Nihonkai Math. J.*, forthcoming.

[7] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.