数理解析研究所講究録 第2116巻 2019年 115-123

Forward-backward stochastic differential equations and Newton's method *

Takahiro Tsuchiya
(suci@probab.com)

School of Computer Science and Engineering,
The University of Aizu.

1 Introduction

あるフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ 上の確率変数 ξ が与えられたとする．このとき，終端条件が付与されたシステム，

$$\begin{cases} Y(t) &= Y(0) + \int_0^t f\Big(s, \omega, Y(s), Z(s)\Big)\,\mathrm{d}s + \int_0^t Z(s)\,\mathrm{d}W(s), \quad t \in [0,T), \\ Y(T) &= \xi. \end{cases} \tag{1}$$

を満たす，ある確率過程のペア (Y, Z) を考えたい．ここで (Y, Z) は $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$ に値を取り，W は d-次元の Wiener 過程，f は可測な関数であり，一般にランダムであっても良い．式 (1) を後ろ向きの表現で書けば

$$Y(t) = \xi - \int_t^T f\Big(s, \omega, Y(s), Z(s)\Big)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z(s)\,\mathrm{d}W(s), \quad t \in [0,T]. \tag{2}$$

これは Backward stochastic differential equations (BSDEs) と呼ばれる．解 (Y, Z) の存在と一意性は [13] にあるように f に Lipschitz 程度の滑らかさと終端条件に二乗可積分性などがあれば意味を成す．

終端条件のダイナミクスを記述するために，ある確率過程 X を用いて次のように一般化したものが Forward-backward stochastic differential equations (FBSDEs) である，

$$\begin{cases} X(t) &= X(0) + \int_0^t b\Big(s, \omega, \Theta(s)\Big)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma\Big(s, \omega, \Theta(s)\Big)\,\mathrm{d}W(s), \\ Y(t) &= \varphi\left(X(T)\right) - \int_t^T f\Big(s, \omega, \Theta(s)\Big)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z(s)\,\mathrm{d}W(s). \end{cases} \tag{3}$$

このシステムを満たす三組 $\Theta \equiv (X, Y, Z) \equiv \{X(t), Y(t), Z(t)\}_{t\in[0,T]}$ は $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$ に値を取るとする．W は d-次元の Wiener 過程，b, f, σ, そして φ は可測な関数であり，一般にランダムであっても良いが以後は ω を略して係数を書く．b を例として書くが σ, f も同様とする．

$$b\Big(s, \omega, \Theta(s)\Big) = b\Big(s, \Theta(s)\Big).$$

*この論文は田口大氏（大阪大学）との共同研究成果，Newton-Kantorovitch method for decoupled forward-backward stochastic differential equations, arXiv:1806.01493 [math.PR] の要約です．

本稿の目的はFBSDEsにおいて“大域的な解”と“Newton近似法”について纏めることにある．まずは“大域的な解”について説明しよう．

1.1 Problems of FBSDEs and Our motivation

まず終端時間 $T > 0$ を決める．区間 $[0,T]$ の全域でFBSDEsの解 $\{X(t), Y(t), Z(t)\}_{t\in[0,T]}$ が定まる時解を大域的な解といい，終端時間よりも短い時間 $[0,\delta]$ で少なくとも解の存在が言えるなら局所的な解 $\{X(t), Y(t), Z(t)\}_{t\in[0,\delta]}$ ということにする．

FBSDEs (3) の解は，Stochastic differential equations (SDEs) やBSDEs (2) と比べても，かなり様相が異なる．係数に滑らかさがあるからと言って可解性が解決するわけではない．例えば [21] や [10] を参考にすると解の存在と一意性について次のようなアプローチがある．

Contraction mapping 局所的な解，すなわち小さい $[0,\delta]$ で解が構築できる，[2] and [14].

The Four Step scheme 大域的であるがマルコフ型に依存する (see e.g., [9], and [3]).

The method of continuation マルコフ型を仮定しないが“monotonicity”条件がいる，[5], [15], [18].

このように多くの先人の貢献があるものの，FBSDEs (3) の大域的な解については係数が線形かつ有界，さらに一次元であっても“大域的”には解の一意性が崩れ，しかも上記の既存の方法のいずれも適応できなかった．ところが最近になって一次元の場合にdecoupling fieldという概念を用いて [10] で進展があり，さらに局所的なdecoupling fieldを連結させていくことで大域的な性質がわかってきている [4].

FBSDEsやBSDEsの枠組みは汎用性が高く，理論的に様々な応用などが沢山あるが計算機でシミュレーションなどを行う際に困難が生じる．例えばBSDEs (2) で $f \equiv 0$ であれば

$$Y(t) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t)$$

となるが，条件付き期待値が解析的に扱いやすい閉じた形になることは特別な場合を除いてあまりない．したがって計算機で実行させるときの困難が生じる．条件付き期待値を計算する手法も提示されているが決定的とは言い難く，この方面の理論的な研究の発展に寄与すべく，Newton法を用いた数値計算に向けた理論的な研究を考えたい．

2 Newton's method

2.1 Newton's Newton method

Newton法はその名の通り，Newtonの功績によるが，原型はシンボリックな計算方法であり現代のそれとはだいぶ違う．以下の説明は [8]（Web上ではJSTORから読める）を参考にした．

3次の多項式 $f(x) = x^3 - 2x - 5$ に対して $f(x) = 0$ を与える解 $x \in \mathbb{R}$ を求める．

1. 当たりをつけて解の整数値 $[x] = 2$ とわかれば初期値 $x_0 = 2$ とする
2. $x = 2 + p$ として $\underbrace{p^3 + 6p^2}_{\approx 0} + 10p - 1 = 0$ 二次以上は無視して $p \approx 0.1$.
3. 次に $p = 0.1 + q$ として $\underbrace{q^3 + 6.3q^2}_{\approx 0} + 11.23q + 0.051 = 0$ から $q \approx -0.0054$ などと繰り返す．

同じことであるが微分を用いた表記に対応させるなら，

1. f を $x_0=2$ 周りでテイラー展開する，$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots$.
2. $x=2+p$ として $0=f(2+p)=-1+10(2+p-2)+\underbrace{p^3+6p^2}_{\approx 0}\Rightarrow p\approx 0.1$
3. $x=2+p+q$ として $0=f(2+p+q)=0.051+11.23q+\underbrace{q^3+6.3q^2}_{\approx 0}\Rightarrow q\approx -0.0054$ となる．

また $p=x_1-x_0=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, $q=x_2-x_1=-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)},\cdots$ であり，

$$f(x_n)+f'(x_n)\,(x_{n+1}-x_n)=0,\quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

この表現が元祖の Newton 法といえよう．微分を用いて表現すれば幾何学的に捉えられるが，すべての $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対する $f'(x_n)$ の逆写像を必ずしも仮定する必要はなく，十分に近い $\|x-x_0\|\approx 0$ なら高次のオーダーを無視することで更に精度の高い近似解が得られることが本質的であることに注意する．

2.2 Kantorovitch's method

Newton 法は有限次元の Banach 空間 $(\mathbb{B},\|\cdot\|)$ に自然に拡張できる．この事実は Kantorovitch [6] によって示された．さらに一般の無限次元の Banach 空間上で作用する F について，$\mathrm{F}(\Theta)=0$ となる Θ を求める場合，F が Fréchet 微分可能であればアナロジーが成立する．あらすじを述べると近似列は

$$\Theta_{n+1}-\Theta_n=-\{\mathrm{F}'(\Theta_n)\}^{-1}\mathrm{F}(\Theta_n),\quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\tag{4}$$

で定められる．この右辺における $\mathrm{F}'(\Theta_n)$ は零点での微分の逆写像だから n がいくら大きくても一般に小さくなることは期待できない．一方で $\mathrm{F}(\Theta_n)$ に着目すると平均値の定理と近似列の定義から

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(\Theta_n)&=\mathrm{F}(\Theta_n)-\mathrm{F}(\Theta_{n-1})+\mathrm{F}(\Theta_{n-1})\\&=\left\{\int_0^1\mathrm{F}'(\Theta_{n-1}+\theta(\Theta_n-\Theta_{n-1}))\mathrm{d}\theta\right\}(\Theta_n-\Theta_{n-1})-\mathrm{F}'(\Theta_{n-1})(\Theta_n-\Theta_{n-1})\\&=\left\{\int_0^1\mathrm{F}'(\Theta_{n-1}+\theta(\Theta_n-\Theta_{n-1}))-\mathrm{F}'(\Theta_{n-1})\mathrm{d}\theta\right\}(\Theta_n-\Theta_{n-1}).\end{aligned}$$

したがって，さらに微分 F' が適当な滑らかさ，例えば Lipschitz 連続，

$$\|\mathrm{F}'(u)-\mathrm{F}'(v)\|\le 2l\|u-v\|,\quad u,v\in\mathbb{B}$$

であれば，

$$\|\Theta_{n+1}-\Theta_n\|\le l\left\|\{\mathrm{F}'(\Theta_n)\}^{-1}\right\|\|\Theta_n-\Theta_{n-1}\|$$

となる．ゆえに $\left\|\{\mathrm{F}'(\Theta_n)\}^{-1}\right\|$ の有界性を示し，（Banach 空間の大きさに対応する）l を十分小さく取り直し，縮小写像原理に持ち込む．そのために局所的な議論になり，結論も局所的になる．次の章で常微分方程式や確率微分方程式でこの一連の評価をみていく．

Remark 1. 一次収束について概要を述べるため省略したが，より厳密な評価で二次収束まで示したものが Kantorovitch によって得られた結果であることを注意する．[20] の解説などが良く纏まっている．

2.2.1 Kantorovich theorem on ODEs

[17] における常微分方程式への応用について述べる．$\mathbb{R}$ 値で $[0,T]$ 上の微分可能で微分が連続関数で有界ある関数全体に supnorm をいれて Banach 空間 $\mathbb{B} := (C_b^1[0,T], \|u\| = \sup_{0\le t\le T}|x(t)|)$ とする．すると常微分方程式，

$$X(t) - X(0) = \int_0^t b(s, X(s))\mathrm{d}s, \quad 0 \le t \le T$$

の解は次で定まる F の $\mathrm{F}(u) = 0$ であると看做せる．

$$\mathrm{F}(u)(t) = u(t) - u(0) - \int_0^t b(s, u(s))\mathrm{d}s, \qquad 0 \le t \le T,\ u \in \mathbb{B}.$$

すると (4) で定まる Newton 近似列は次の線形常微分方程式の解と同値，

$$X_{n+1}(t) - X_{n+1}(0) = \int_0^t b_n(s, X_{n+1}(s))\mathrm{d}s, \quad 0 \le t \le T,$$

ただし，b_x' は x での偏微分で $b_n\Big(s,x\Big) = b\Big(s, X_n(s)\Big) + b_x'\Big(s, X_n(s)\Big)(x - X_n(s))$. さらに Fréchet 微分を計算すると

$$\mathrm{F}'(u)h(t) = \int_0^t b_x'\Big(s, u(s)\Big)h(s)\mathrm{d}s.$$

そこで微分係数一様に有界 M であれば

$$\|\mathrm{F}'(u) - \mathrm{F}'(v)\| \le 2MT\|u - v\|, \quad u, v \in \mathbb{B}. \tag{5}$$

一方で $y = \{\mathrm{F}'(x)\}^{-1} h,\ \|h\| = 1$ とすると $h = \{\mathrm{F}'(x)\}\, y$ であるから

$$h(t) = y(t) - \int_0^t b_x'(s, x(s))y(s)\mathrm{d}s \Rightarrow |y(t)| \le 1 + M\int_0^t |y(s)|\mathrm{d}s, \quad 0 \le t \le T.$$

Gronwall 不等式から

$$\left\|\{\mathrm{F}'(u)\}^{-1}\right\| \le e^{MT}. \tag{6}$$

不等式 (5), (6) から縮小写像原理を用いるために $\epsilon \in (0,1)$ に対して，

$$MTe^{MT} < \epsilon$$

となるように T を小さく取ることになる．したがって得られる結果も局所的な性質のみが導き出されることになる：$\epsilon \in (0,1)$ に対し，ある $\delta \in [0,T]$ が存在して，

$$\sup_{0\le t\le\delta} |X(t) - X_{n+1}(t)| \le \epsilon \sup_{0\le t\le\delta} |X(t) - X_n(t)|.$$

2.2.2 Kantorovich theorem on SDEs

確率微分方程式については [7] を参照する．まず $b, \sigma \in C_b^1$ とする．1 次元の確率微分方程式

$$X(t) - X(0) = \int_0^t b(s, X(s))\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X(s))\mathrm{d}W(s), \quad 0 \le t \le T$$

に関しても概要は同じである．ただし，確率積分は a.s. の意味で定まるので Banach 空間を

$$\mathbb{S}^2 = \left\{X : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R} \text{ continuous, adapted} : \|X\|_{\mathbb{S}^2} = \mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le T} |X(s)|^2\right) < \infty\right\}$$

で採用した時に ω に依らずに写像,

$$\mathrm{F}(u)(t)=u(t)-u(0)-\int_0^t b(s,u(s))\mathrm{d}s-\int_0^t \sigma(s,u(s))\mathrm{d}W(s),\quad 0\le t\le T,\ u\in\mathbb{S}^2$$

が定義されるか，しかもそれは微分可能であるかなどは自明ではない．ここではその方向については深入りせず，そのような写像 F が存在したとして期待される結果について述べる．ちなみに欲しい結果は確率解析の計算によって得られる．

Newton 近似列は

$$\begin{aligned} b_n\Big(s,\omega,x\Big) &= b\Big(s,\omega,X_n(s)\Big)+b'_x\Big(s,\omega,X_n(s)\Big)(x-X_n(s))\\ \sigma_n\Big(s,\omega,x\Big) &= \sigma\Big(s,\omega,X_n(s)\Big)+\sigma'_x\Big(s,\omega,X_n(s)\Big)(x-X_n(s)). \end{aligned}$$

を用いて

$$X_{n+1}(t)-X_{n+1}(0)=\int_0^t b_n(s,X_{n+1}(s))\mathrm{d}s+\int_0^t \sigma_n(s,X_{n+1}(s))\mathrm{d}W(s),\quad 0\le t\le T.$$

伊藤公式などを用いて微分係数の有界性があれば，$M_1, M_2>0$ が存在し，

$$\|X_{n+1}-X_n\|\le M_1Te^{M_2T}\,\|X_n-X_{n-1}\|$$

となる．これを踏まえて，[7] では係数に一様有界である仮定をして，局所性的な結論を導き出している．そして大域的な収束は Newton 近似列の一様有界性が鍵となることを別証明で与えている．一方で [12] はある逐次的な不等式を評価することで直接的に大域的収束を示している．また一様有界の仮定も必要としないことを注意する．

3 Our Main result

今回の結果における要所は

- Newton 法を既存の研究を多次元 FBSDEs で展開し，
- Kantorovitch による証明方法によらず，つまり局所性に落とし込むことなく，大域的な一次収束を示す．
- 鍵は近似列の定義は Newton's Newton 法にあるように逆写像を用いず定義し，さらに時間に関する縮小性を評価することにある．

FBSDEs (3) における解 (X,Y,Z) を近似列 (X_n,Y_n,Z_n) を Newton 法のアナロジーで構成する．まず準備として終端時間を $T>0$ とする．$m\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^2_m &= \left\{Y:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}^m \text{ continuous, adapted} : \|Y\|_{\mathbb{S}^2_m}=\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le T}|Y(s)|^2\right]<\infty\right\},\\ \mathbb{H}^2 &= \left\{Z:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}^{m\times d} \text{ adapted} : \|Z\|_{\mathbb{H}^2}=\mathbb{E}\left[\int_0^T |Z(s)|^2\,\mathrm{d}s\right]<\infty\right\}, \end{aligned}$$

各々の Banach 空間 $\mathbb{S}^2_l$，$\mathbb{S}^2_m\times\mathbb{H}^2$ は

$$\|X\|^2=\|X\|^2_{\mathbb{S}^2_l},\quad \|(Y,Z)\|^2=\|Y\|^2_{\mathbb{S}^2_m}+\|Z\|^2_{\mathbb{H}^2}.$$

また FBSDEs の解を取り扱う Banach 空間 $\mathbb{S}^2_l \times \mathbb{S}^2_m \times \mathbb{H}^2$ の norm は

$$\|(X,Y,Z)\|^2 = \|X\|^2 + \|(Y,Z)\|^2.$$

そして φ, b, f, σ に適当な滑らかさを仮定して，

$$\begin{aligned} X_{n+1}(t) &= X_{n+1}(0) + \int_0^t b_n\Big(s,\omega,\Theta_{n+1}(s)\Big)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_n\Big(s,\omega,\Theta_{n+1}(s)\Big)\,\mathrm{d}W(s), \\ Y_{n+1}(t) &= \varphi_n(X_{n+1}(T)) - \int_t^T f_n\Big(s,\omega,\Theta_{n+1}(s)\Big)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_{n+1}(s)\,\mathrm{d}W(s). \end{aligned} \tag{7}$$

$\varphi_n(x) = \varphi(X_n(T)) + \nabla_x\varphi(X_n(T))(x - X_n(T))$, $x \in \mathbb{R}^l$ であり，係数 b_n, σ_n, f_n は (3) の状態変数 $\theta = (x,y,z) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$ に関して 1 次近似したものとする：

$$b_n\Big(s,\omega,\theta\Big) = b\Big(s,\omega,\Theta_n(s)\Big) + \nabla_\theta b\Big(s,\omega,\Theta_n(s)\Big)(\theta - \Theta_n(s)), \quad (s,\omega,\theta) \in [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d},$$

同様に σ_n, f_n も定義する．すると線形な係数 b_n, σ_n, f_n であるから三組 $\Theta_n \equiv (X_n, Y_n, Z_n)$ を定義できそうに思えるが，先に注意したように $b_n, \sigma_n, f_n \in C^1_b$ であっても一般に well-defined でない．

そこで論文 [16] では特に X（の拡散係数）は (Y,Z) に関係しない decoupled FBSDEs,

$$\begin{cases} X(t) &= X(0) + \int_0^t b(s,X(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s,X(s))\,\mathrm{d}W(s), \\ Y(t) &= \varphi(X(T)) - \int_t^T f(s,X(s),Y(s),Z(s))\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z(s)\,\mathrm{d}W(s). \end{cases} \tag{8}$$

のときに次を示した．

Theorem 2 ([16])**.** *b, σ, f, φ は（空間 x に関して）微分可能，微分係数は (s,ω)-a.e. で一様に有界，さらに*

$$\mathbb{E}\left(|X(0)|^2 + \int_0^T \Big|b\Big(s,\omega,0\Big)\Big|^2 + \Big|\sigma\Big(s,\omega,0\Big)\Big|^2 + \Big|f\Big(s,\omega,0,0,0\Big)\Big|^2\,\mathrm{d}s\right) < \infty,$$

とする．このとき，decoupled FBSDEs (8) の解が存在し，T と係数 b, σ, f の微分で定まる定数 $C > 0$ が存在する：$X_0(0) = X(0)$ を満たす任意の初期値 $(X_0, Y_0, Z_0) \in \mathbb{S}^2_l \times \mathbb{S}^2_m \times \mathbb{H}^2$ に対して

$$\|(X - X_{n+1}, Y - Y_{n+1}, Z - Z_{n+1})\| \le C2^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

特別な係数における BSDEs における Newton 法を議論した [19] の拡張となっている．さらにこの結果は，二次収束に関する確率収束の結果 [1] を拡張する．すなわち，時間に関して局所的な確率的な二次収束だけでなく，十分大きな n に対して大域的に確率的二次収束することもわかる．

3.1 Key estimations

計算の詳細な証明は [16] に譲るが鍵となる部分をここで解説しておく．簡単のため ODEs の場合について本質的な評価を行う．まず，

$$\mathrm{G}(u)(t) := u(t) - (0) - \mathrm{F}(u)(t), \quad 0 \le t \le T,\ u \in \mathbb{B},$$

と写像を定義する．すると G，F′ を用いて

$$X(t) = X(0) + \mathrm{G}(X)(t),$$
$$X_{n+1}(t) = X(0) + \mathrm{G}(X_n)(t) + \mathrm{F}'(X_n)(X_{n+1} - X_n)(t), \quad 0 \le t \le T.$$

そこで $M = \sup\{b'_x(s,x) : 0 \le s \le T,\ x \in \mathbb{R}^l\}$ とおけば，

$$|\mathrm{G}(X)(t) - \mathrm{G}(X_n)(t)| \le M \int_0^t \sup_{0\le u\le s} |X(u) - X_n(u)| \mathrm{d}s,$$
$$|\mathrm{F}'(X_n)(X_{n+1} - X_n)(t)| \le M \int_0^t \sup_{0\le u\le s} |X(u) - X_{n+1}(u)| \mathrm{d}s + M \int_0^t \sup_{0\le u\le s} |X(u) - X_n(u)| \mathrm{d}s$$

そして Gronwall 不等式から時間に関する縮小性が得られる．ある $C_0 > 0$ があって

$$\sup_{0\le t\le t'} |X(t) - X_{n+1}(t)| \le C_0 \int_0^{t'} \sup_{0\le u\le s} |X(u) - X_n(u)| \mathrm{d}s, \quad 0 \le t' \le T.$$

すると逐次的に

$$\sup_{0\le t\le T} |X(t) - X_{n+1}(t)| \le \frac{(C_0T)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{0\le u\le T} |X(u) - X_0(u)|.$$

であるから次が示せる．

$$\|X - X_{n+1}\|^2 \le \epsilon^{n+1} e^{C_0T/\epsilon} \|X - X_0\|^2, \quad \epsilon \in (0,1). \tag{9}$$

概要の解説のため ODEs に話を絞ったが，伊藤公式と Burkholder-Davis-Gundy 不等式など使えば FBSDEs の Forward X についても (9) と同じ評価が得られる．ただし，Backward (Y,Z) についてはもう一つ工夫が必要となる．具体的には $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し, 重み付きノルムを導入することで上手く示せる．特に計算上で扱う $\alpha > 0$ であるときに $\|\cdot\|$ と同値な norm になる．

$$\|(Y,Z)\|_\alpha^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le T} e^{\alpha s}|Y(s)|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}|Z(s)|^2 \,\mathrm{d}s\right].$$

4　結び

通常のニュートン近似の収束は有限次元であっても関数の凸性 [11, page 453]，もしくは初期値を解に十分に近く取る条件を仮定する [6, Theorem **XVI**]．実際に既存の研究は空間方向に着目して Kantorovitch による評価を行うことで，局所的であるものの Newton 法の収束を導き出している．本研究では時間方向の縮小性の評価もあわせて行うことで，decoupled FBSDEs の枠組みで Newton 法を構成し，直接的に大域的な一次収束を示すことができた．関連研究を一般化するだけでなく，確率二次収束のように先行結果をより強い形で示せることがわかった．

参考文献

[1] Kazuo Amano, *Newton's method for stochastic differential equations and its probabilistic second-order error estimate.*, Electron. J. Differ. Equ. **2012** (2012), 8.

[2] Fabio Antonelli, *Backward-Forward Stochastic Differential Equations*, Ann. Appl. Probab. **3** (1993), no. 3, 777–793.

[3] François Delarue, *On the existence and uniqueness of solutions to FBSDEs in a non-degenerate case*, Stochastic Processes and their Applications **99** (2002), no. 2, 209–286.

[4] Alexander Fromm and Peter Imkeller, *Existence, Uniqueness and Regularity of Decoupling Fields to Multidimensional Fully Coupled FBSDEs*, Tech. report, 2018.

[5] Y. Hu and S. Peng, *Solution of forward-backward stochastic differential equations*, Probability Theory and Related Fields **103** (1995), no. 2, 273–283.

[6] L Kantorovitch, *The method of successive approximations for functional equations*, Acta Math. **71** (1939), 63–97.

[7] Shigetoku Kawabata and Toshio Yamada, *On Newton's method for stochastic differential equations.*, Sur deux estimations d'intégrales multiples., 1991, pp. 121–137.

[8] Nick Kollerstrom, *Thomas Simpson and 'Newton's method of approximation': An enduring myth*, The British Journal for the History of Science **25** (1992), no. 3, 347–354.

[9] Jin Ma, Philip Protter, and Jiongmin Yong, *Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly — a four step scheme*, Probability Theory and Related Fields **98** (1994), no. 3, 339–359.

[10] Jin Ma, Zhen Wu, Detao Zhang, and Jianfeng Zhang, *On well-posedness of forward-backward SDEs – a unified approach.*, Ann. Appl. Probab. **25** (2015), no. 4, 2168–2214.

[11] J M Ortega and W C Rheinboldt, *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Classics in Applied Mathematics, vol. 30, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000.

[12] Y Ouknine, *Approximation de newton pour les équations différentielles stochastiques*, Stochastics and Stochastic Reports **45** (1993), no. 3-4, 237–247.

[13] Etienne Pardoux and Shige Peng, *Adapted solution of a backward stochastic differential equation*, Systems & Control Letters **14** (1990), no. 1, 55–61.

[14] Etienne Pardoux and Shanjian Tang, *Forward-backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic PDEs*, Probability Theory and Related Fields **114** (1999), no. 2, 123–150.

[15] Shige Peng, Zhen WU Siam J Control Optim, and Zhen Wu, *Fully Coupled Forward-Backward Stochastic Differential Equations and Applications to Optimal Control*, SIAM Journal on Control and Optimization **37** (1999), no. 3, 825–843.

[16] Dai Taguchi and Takahiro Tsuchiya, *Newton-Kantorovitch method for decoupled forward-backward stochastic differential equations*, arXiv:1806.01493 [math.PR] (2018).

[17] Giovanni Vidossich, *Chaplygin's method is Newton's method*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **66** (1978), no. 1, 188–206.

[18] Jiongmin Yong, *Finding adapted solutions of forward–backward stochastic differential equations: method of continuation*, Probability Theory and Related Fields **107** (1997), no. 4, 537–572.

[19] Niwa Yoshiyuki, *Newton's method for backward stochastic differential equations*, Master's thesis, 2003.

[20] Eberhard Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. I: Fixed-point theorems. Transl. from the German by Peter R. Wadsack.*, 1986.

[21] Jianfeng Zhang, *Backward stochastic differential equations. From linear to fully nonlinear theory.*, New York, NY: Springer, 2017.