

BSE-拡大のある IDEAL について
(ON A CERTAIN IDEAL OF BSE-EXTENSION)

高橋眞映 (SIN-EI TAKAHASI)

(山形大学、数学・ゲーム工房)
(YAMAGATA UNIV., LAB. MATH. GAMES)

ABSTRACT. The BSE-extension introduced by the auauthor and O. Hatori in 1990 is one of commutative extension for semisimple commutative Banach algebras. In 2007, J. Inoue and the author introduced an important ideal of the BSE-extension. We make a restatement of such an ideal and clarify it for a special Banach algebra.

注：BSE-拡大については、昨年羽鳥理氏が主催する RIMS 研究集会で、multiplier 拡大、Sherbert 拡大、Birtel 拡大などに代表される半単純可換 Banach 環の可換拡大の一つとして紹介した。

1. 理念

人間は見えないものを見るのが出来たら愉快でしょうね。しかしながら真理は往々にしてそこに隠されているものです：

It will be pleasant if I can watch an invisible thing. And the truth is often hidden there.

さて日本には金子みすゞと言う詩人がいました。彼女は見えないものを見ることのできる名人の一人でした。身近なところでは O. Hatori がいるでしょうか。外国では I. M. Gelfand もそのような名人でした。彼は半単純可環 Banach 環 A を所謂 Gelfand 変換を用いて、ある局所 compact Hausdorff 空間上の Banach function algebra として見たのでした。

私は 1980 年前半、この Gelfand 変換像を何かの条件で特徴付けられないかと言う特徴付け問題を、 A の multiplier algebra $M(A)$ の Helgason-Wang 変換像の特徴付け問題と並行して漠然と考えていました。ここに Helgason-Wang 変換とは所謂 Fourier-Stieltjes 変換を抽象化したものです。

2. 経緯

最初、調和解析に現れる Bochner-Schoenberg-Eberlein の定理を一般の可環 Banach 環の世界に焼き直す事によって BSE-拡大を構成しました。その後、羽鳥理先生や井上純治先生の協力を得て、Helgason-Wang 変換像の特徴付け問題の発展を見ることが出来ました (cf. [6], [3] and [4])。

1992年の暮、井上先生と札幌ビール園でジンギスカン料理を味わっていたとき、先生が「確か群環の Fourier 変換像を特徴付けた論文がある」と言い出されました。それが R. Doss の論文 [1] であります。私はこの論文の定理に現れる条件を抽象化し、擬位相と言う通常の位相条件の主要な部分を取り除いた不完全位相なるものを導入しました。これは Gelfand 空間 Φ_A の線形包のある部分集合族 \mathcal{Q} を表し、それ故 Φ_A 上の複素数値連続関数は \mathcal{Q} -連続と言う概念が生まれます。

ある擬位相 \mathcal{Q}_D を導入しますと、論文 [1] の主要定理は、「群環 $L^1(G)$ の Fourier 変換像は G の双対群上の \mathcal{Q}_D -連続な複素数値連続関数全体である」と述べる事が出来ます。

しかしながら上述の擬位相 \mathcal{Q}_D は一般の可環 Banach 環の世界に焼き直す事は困難でした。所が、井上先生は翌年出版された R. Doss の論文 [2] に注目され、そこに現れる条件を一般の可環 Banach 環の世界に焼き直し、新しい擬位相 \mathcal{Q}_{BSE}^0 を発見されました。これは群環に戻せば、論文 [2] の主要定理は、「群環 $L^1(G)$ の Fourier 変換像は G の双対群上の \mathcal{Q}_{BSE}^0 -連続な複素数値連続関数全体である」と述べる事が出来ます (尤もこれは自明でないので、少し証明が必要ですが)。もう随分昔になりますが、まだ親父もお袋も元気に米作りに励んでいた頃、僕は擬位相 \mathcal{Q}_{BSE}^0 の書かれた井上ノートを持って佐渡の実家に帰省し、一人夜中の布団の中で感動してこのノートを読んだものでした。

次節で概説する擬位相 \mathcal{Q}_{BSE}^0 が Gelfand 変換像の特徴付け問題に大きく関わって来るのです。

3. BSE-拡大の一つの閉 IDEAL

Gelfand 空間 Φ_A を持つ半単純可環 Banach 環 A を考えます。このとき、 Φ_A の線形包 $\text{span}(\Phi_A)$ の任意の元 p は

$$p = \sum_{\varphi \in \Phi_A} \hat{p}(\varphi)\varphi$$

と一意的に表現されます。ここに \hat{p} は有限な台を持つ Φ_A 上の複素数値関数を表します。

次に Φ_A の compact subsets の全体を $\mathcal{K}(\Phi_A)$ で表し、各 $K \in \mathcal{K}(\Phi_A)$ 及び $\delta > 0$ に対して、 $U_{K,\delta}$ を次の条件を持つ $\text{span}(\Phi_A)$ の元 p の全体とします：

$$\|p\|_{A^*} \leq 1 \text{ and } \exists q \in \text{span}(\Phi_A) \text{ s.t. } \|q\|_{A^*} \leq \delta, \hat{p}(\varphi) = \hat{q}(\varphi) \ (\forall \varphi \in K).$$

このとき、 $\mathcal{Q}_{BSE}^0(A) := \{U_{K,\delta} : K \in \mathcal{K}(\Phi_A), \delta > 0\}$ は Φ_A に対する擬位相を作ります。そこで Φ_A 上の $\mathcal{Q}_{BSE}^0(A)$ -連続な複素数値連続関数の全体を $C_{BSE}^0(\Phi_A)$ で表しますと、これは A の BSE-拡大 $C_{BSE}(\Phi_A)$ の閉 ideal となります。我々は $\hat{A} = C_{BSE}^0(\Phi_A)$ となる可環 Banach 環 A を BED-algebra と呼んでいます。ここで \hat{A} は A の Gelfand 変換像を表します。従って BED-algebra を研究する事は、Gelfand 変換像の特徴付け問題の一つの解答を与えることとなります。また $M(A)$ の Helgason-Wang 変換像が A の BSE-拡大に一致するとき、 A は BSE-algebra であると言います。従って BSE-algebra を研究する事は、Helgason-Wang 変換像の特徴付け問題の一つの解答を与えることとなります。このようにして、半単純可環 Banach 環 A が与えられたとき、 A の BSE-拡大及びその閉 ideal $C_{BSE}^0(\Phi_A)$ を明らかにすることは重要であると思われます。

次節で具体的な A に対して、閉 ideal $C_{BSE}^0(\Phi_A)$ を明らかにした最新情報を述べましょう。

4. BANACH FUNCTION ALGEBRA $C_{0b}(X, \tau)$

X を局所 compact Hausdorff 空間とし、 $C_b(X)$ 及び $C_0(X)$ をそれぞれ、 X 上の有界複素数値連続関数全体の作る可環 C^* -環、無限遠点で消える複素数値連続関数全体の作る可環 C^* -環とします。更に τ を条件

$$\inf_{x \in X} \tau(x) \geq 1$$

を満たす X 上の正值連続関数とします。このとき

$$C_{0b}(X, \tau) = \{f \in C_0(X) : f\tau \in C_b(X)\},$$

と定義しますと、これはノルム

$$\|f\|_{\infty, \tau} = \sup_{x \in X} |f(x)|\tau(x)$$

のもとで X 上の natural Banach function algebra を作ります。しかしながら、もし $1/\tau$ が無限遠点で消えるならば、Tauberian でも BSE でも BED でもない I 型 Banach 環となります (cf. [5])。この不思議な Banach 環の BSE-拡大及びその重要な閉 ideal を明らかにしたのが次の定理です。

Theorem 4.1. *Let $A = C_{0b}(X)$. Then*

$$C_{BSE}(\Phi_A) = \{f \in C_b(X) : f\tau \in C_b(X)\}$$

and

$$C_{BSE}^0(\Phi_A) = \{f \in C_0(X) : f\tau \in C_0(X)\}.$$

また Banach 環の間の等距離写像の解明は重要な研究でしょう。一方 Banach 環としての同型問題も同様であります。我々のこの不思議な I 型 Banach 環達同型問題は完全に解くことができました。上の定理と合わせてその詳細を論文に纏めて何れ何処かに投稿するつもりです。従ってこの原稿は速報の意味を持ちます。

謝辞。This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

REFERENCES

- [1] R. Doss, On the Fourier-Stieltjes transform of singular or absolutely continuous measures, *Math. Z.*, **97** (1967), 77-84.
- [2] R. Doss, On the transform of a singlura or an absolutely measure, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19**(1968), 361-363.
- [3] J. Inoue and S.-E. Takahasi, On characterizations of the image of the Gelfand transform of commutative Banach algebras, *Math.Nachr.*, **280** (2007), no.1-2,105-126.
- [4] J. Inoue and S.-E. Takahasi, Segal algebras in commutative Banach algebras, *Rocky Mountain J. Math.*, **44-2**(2014), 539-589.

- [5] J. Inoue, T. Miura, H. Takagi and S.-E. Takahasi, *Classification of semisimple commutative Banach algebras of type I*, submitted.
- [6] S.-E. Takahasi and O. Hatori, Commutative Banach algebras which satisfy a Bochner-Schoenberg-Eberlein type-theorem, Proc. Amer. Math. Soc., **110-1**(1990), 149-158.