二重イデアル商を用いた新しい準素分解のアルゴリズム
A New Algorithm for Primary Decomposition Using Double Ideal Quotient

石原侑樹

Yuki Ishihara

立教大学理学研究科

Graduate School of Science, Rikkyo University *

Abstract

多項式環における準素イデアル分解は可換環論や代数幾何学において基本的な道具の 1 つである．準素イデアル分解のアルゴリズムは深く研究されてきているが，それらは現在でも多くの時間がかかる傾向がある．本稿では下山-横山のアルゴリズム [3] に対し，「二重イデアル商」からの新しい視点を導入する．さらに，separator 系の代わりに二重イデアル商を用いる新しい準素イデアル分解の手法を提案する．

Abstract

Primary decomposition in a polynomial ring is a basis tool of Commutative Algebra and Algebraic Geometry. Algorithms for primary decomposition have been much studied, however, they still tend to be much time-consuming. In the paper, we introduce a new view of Shimoyama-Yokoyama algorithm [3] from "Double Ideal Quotient". Moreover, we propose a new method for primary decomposition using double ideal quotient instead of a system of separators.

1 はじめに

多項式環における準素イデアル分解は可換環論や代数幾何学において基本的な道具の 1 つである．準素イデアル分解のアルゴリズムは深く研究されてきているが，それらは現在でも多くの時間がかかる傾向がある．代表的な準素イデアル分解のアルゴリズムの 1 つとして，下山-横山のアルゴリズム [3] がある．下山-横山のアルゴリズムは根基の素イデアル分解を利用した手法で，pseudo-primary decomposition と呼ばれる孤立素因子ごとの弱い分解を利用する． この pseudo-primary decomposition では separator 系という根基の素イデアル分解から得られる有限集合の組が用いられている．そのため，separator 系の位数が大きくなったり構成する多項式たちが複雑になったりすると計算が困難になる可能性がある．それらの問題を回避するため，本稿では separator 系の代わりに二重イデアル商とその変種を用いたアルゴリズムを提案する．二重イデアル商やその変種を用いると，separator 系を使わずに pseudo-primary decomposition を計算できたり，その孤立準素成分を計算したりすることができる．例えば，イデアル I とその孤立素因子 P に対し，第二飽和商イデアル $(I:(I:P^\infty)^\infty)$ は，下山-横山のアルゴリズムにおける P-pseudo-primary component と一致する．さらに splitting tool と呼ばれる分解手法を用いて remaining component も計算することができる．また，同様の手法を用いて，部分的な根基の素イデアル分解であっても特定の pseudo-primary component を計算することができるため，より直接的な局所化計算への応用が考えられる．

*yishihara@rikkyo.ac.jp

2　準備

本稿では，$R = \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ を有理数係数の n 変数多項式環とする．特に断りのない場合，イデアルは R のイデアルとする．また，R の元 $f_1, \ldots, f_s$ から生成されるイデアルを $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ で表す．まず，準素イデアル分解の基本的な用語について定義する．

定義 1
イデアル I に対し，準素イデアルの有限集合 $\mathcal{Q}$ は $I = \bigcap_{Q \in \mathcal{Q}} Q$ を満たす時，I の準素イデアル分解と呼ばれる．本稿では準素イデアル分解は無駄のない（*irredundant*）ことを仮定する．準素イデアル分解 $\mathcal{Q}$ の元は I の準素成分と呼ばれ，準素成分の根基 $\sqrt{Q}$ は I の素因子と呼ばれる．簡単のため,「Q は I のある準素イデアル分解の準素成分」を単に「Q は I の準素成分」と表現する．準素成分 Q が素因子 P を根基に持つ時，Q は I の P-準素成分と呼ばれる．また，I の素因子全体の集合を $\mathrm{Ass}(I)$ で表す．ここで，$\mathrm{Ass}(I)$ の中で極小のものを孤立素因子，それを根基に持つ準素成分を孤立準素成分と呼ぶ．また，積閉集合 S に対し，$IR_S \cap R$ を S による I の局所化の引き戻しとする．

次に，equidimensional hull と呼ばれるイデアルの特殊な局所化操作について定義する．equidimensional hull は二重イデアル商を用いて計算できる（節 3 参照）．

定義 2 (Definition 11, [1])
I をイデアル，$\mathcal{Q}$ を I の準素イデアル分解とする．また，d を I のクルル次元とする．この時，I と同次元の準素成分の交わり

$$\mathrm{hull}(I) = \bigcap_{Q \in \mathcal{Q}, \dim(Q) = d} Q$$

を I の *equidimensional hull* と呼ぶ．この $\mathrm{hull}(I)$ は $\mathcal{Q}$ に依らずに定義できる．

続いて，splitting tool と呼ばれる分解を与える手法を紹介する．命題 3 の特殊な場合は [2] の Lemma 1 にも記載されている．

補題 3 (Proposition 3.53, [4])
I と J をイデアルとする．十分大きい整数 m に対し，

$$I = (I : J) \cap (I + J^m)$$

が成り立つ．

ここで，separator 系と呼ばれる有限集合の組を導入する．separator 系は下山-横山のアルゴリズムにおいて基本的な道具となる．

定義 4 (Definition 2.5, [3])
イデアル I に対し，

$$\sqrt{I} = P_1 \cap \cdots \cap P_r$$

を根基の素イデアル分解とする．この時，R の有限部分集合の組 $\{S_1, \ldots, S_r\}$ で，

$$S_i \cap P_i = \phi, \quad S_i \cap P_j \neq \phi \quad (i \neq j)$$

を満たすものを I の *separator* 系 と呼ぶ．

以下のように，separator 系を用いると，イデアル I を孤立素因子ごとに分けた弱い分解を得ることができる．

命題 5 (Theorem 2.7, [3])
$\{S_1,\ldots,S_r\}$ をイデアル I の *separator* 系とする．また，各 i に対し，$\overline{Q_i}=IR_{S_i}\cap R$，$s_i=\prod_{s\in S_i}s$ とし，k_i を $(I:s_i^{k_i})=\overline{Q_i}$ を満たす自然数とする．さらに， $I'=I+\langle s_1^{k_1},\ldots,s_r^{k_r}\rangle$ とする．この時,

$$I=\overline{Q_1}\cap\cdots\cap\overline{Q_r}\cap I' \tag{1}$$

が成り立つ．

命題 5 の (1) を I の pseudo-primary decomposition と呼ぶ．また，各 $\overline{Q_i}$ を P_i-pseudo-primary component，I' を I の remaining component と呼ぶ（Definition 2.8, [3] 参照）．下山-横山のアルゴリズムは pseudo-primary decomposition と splitting tool を用いて，孤立素因子ごとに準素成分を求めていくアルゴリズムである．以下に概略を記述する．

アルゴリズム 1 (下山-横山のアルゴリズム [3])
入力 $I\subset\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_n]$: イデアル
出力 I の準素イデアル分解

1. 根基 $\sqrt{I}$ の素イデアル分解 $\sqrt{I}=P_1\cap\cdots\cap P_r$ を計算する
2. $P_1,\cdots,P_r$ から *separator* 系 $\{S_1,\ldots,S_r\}$ を計算する
3. *separator* 系から *pseudo-primary decomposition* $I=\overline{Q_1}\cap\cdots\cap\overline{Q_r}\cap I'$ を計算する
4. $\overline{Q_i}$ の極大独立集合を計算し，$\overline{Q_i}$ の孤立 P-準素成分 Q_i を得る．また，*splitting tool* から，$\overline{Q_i}=Q_i\cap I_i''$ を満たす I_i'' を求める
5. I' と I_i'' に対し，*1* から *4* を再帰的に実行する
6. 再帰的な計算も含め途中得られたすべての $\{Q_i\}$ のうち，無駄なものを除いたものを I の準素イデアル分解として返す

3 二重イデアル商を用いた準素イデアル分解

この節では separator 系の代わりに二重イデアル商を用いたアルゴリズムについて解説する．前節の下山-横山のアルゴリズムの Step 3 において， pseudo-primary decomposition を求める際に separator 系を利用している．孤立素因子の数が膨大な場合やセパレータ系に含まれる多項式が複雑な場合，pseudo-primary decomposition の計算に時間がかかる可能性がある．また，セパレータ系を用いた手法の場合，根基の完全な素イデアル分解が分かっていないと，pseudo-primary component を求めることはできない．これは，局所化など特定の情報だけを計算したい場合には，余分な素因子まで計算してしまうことになる．一方，二重イデアル商とその変種を用いると，部分的に孤立素因子が分かっている場合でも pseudo-primary component やその孤立準素成分を計算することができる．

定義 6 (Sect.3, [1])
イデアル I と J に対し，イデアル商を 2 回操作したイデアル

$$(I:(I:J))$$

を I と J の二重イデアル商（*double ideal quotient*）と呼ぶ．

二重イデアル商を用いると，equidimensional hull を計算することができる．

命題 7 ([4], Proposition 3.41)
I を余次元が c のイデアル，$u = \{a_1, \dots, a_c\} \subset I$ を長さが c の正則列とする．この時，

$$\mathrm{hull}(I) = (\langle u \rangle : (\langle u \rangle : I))$$

が成り立つ．

二重イデアル商の変種として，イデアル商を飽和イデアル（saturation）に置き換えた第二飽和商イデアル（the second saturated quotient）が定義される．

定義 8 (Proposition 22, [1])
I と J をイデアルとする．この時，$(I : (I : J^\infty)^\infty)$ を第二飽和商イデアルと呼ぶ．

第二飽和商イデアルは pseudo-primary component の生成に用いることができる．また，equidimensional hull と組み合わせることで，完全な準素イデアル分解をせずに特定の孤立準素成分を求めることもできる．

定理 9 (Lemma 32, Proposition 36, [1])
I をイデアル，P を I のある孤立素因子とする．この時，

$$(I : (I : P^\infty)^\infty)$$

は I の *P-pseudo-primary component* と一致する．さらに，

$$Q = \mathrm{hull}((I : (I : P^\infty)^\infty))$$

は I の孤立 P-準素成分となる．

最後に，splitting tool を使って次のような分解が得られる．これを用いることで，節 2 で説明した pseudo-primary decomposition の remaining component を計算することができる．

命題 10
十分大きい自然数 m に対し，

$$I = (I : (I : P^\infty)^\infty) \cap (I + (I : P^\infty)^m)$$

が成り立つ．

証明 R はネーター環より，ある自然数 k が存在して，$(I : (I : P^\infty)^\infty) = (I : (I : P^\infty)^k)$ が成り立つ．$J = (I : P^\infty)^k$ とおくと，補題 3 より，十分大きい自然数 m に対し，$I = (I : J) \cap (I + J^m)$ が成り立つため主張が従う． ∎

定理 9 と命題 10 を組み合わせることで，以下のように separator 系を用いない pseudo-primary decomposition のアルゴリズムが構築できる．このアルゴリズムでは，根基の素イデアル分解が部分的に分かっていたとしても，pseudo-primary component や孤立準素成分を計算することができる．そのため，特定の準素成分だけを求めたい局所化などの計算に利用することができる．

Algorithm 1 二重イデアル商を用いた pseudo-primary decomposition

Require: $I \subset \mathbb{Q}[X]$：イデアル

Ensure: I の pseudo-primary decomposition

```
I' ← I
{P_1, ..., P_r} ← 根基 √I の素イデアル分解
for i = 1 to r do
    \overline{Q}_i ← (I' : (I' : P_i^∞)^∞)
    m ← 等号 I' = \overline{Q}_i ∩ (I' + (I' : P_i^∞)^m) を満たす整数
    I' ← (I' + (I' : P_i^∞)^m)
end for
return I = \overline{Q_1} ∩ ··· ∩ \overline{Q_r} ∩ I'
```

4　まとめと今後の課題

下山-横山のアルゴリズムは準素イデアル分解の代表的なアルゴリズムの 1 つである．その pseudo-primary decomposition の計算には separator 系が用いられているため，separator 系の位数が膨大だったり内部の多項式が複雑だと計算が困難になる可能性がある．そこで，本稿では separator 系の代わりに二重イデアル商を用いた pseudo-primary decomposition のアルゴリズムを提案した．また，二重イデアル商を用いると根基の完全な素イデアル分解をせず特定の pseudo-primary component を計算できるため，効率的な局所化計算への応用も期待される．今後の課題としては，二重イデアル商の効率的な実装および計算機実験による下山-横山のアルゴリズムとの比較，またどのような構造のイデアルに対し効果性が発揮されるかの分析が挙げられる．

参　考　文　献

[1] Ishihara, Y., Yokoyama, K.: Effective Localization Using Double Ideal Quotient and Its Implementation. Lecture Notes in Computer Science, Springer, Cham. vol 11077, 272-287 (2018)

[2] Matzat, B.H., Greuel, G.-M., Hiss, G.: Primary decomposition: algorithms and comparisons. In: Matzat, B.H., Greuel, G.M., Hiss, G. (eds.) Algorithmic Algebra and Number Theory, pp. 187-220. Springer, Heidelberg (1999). https://doi.org/10.1007/978-3-642-59932-3_10

[3] Shimoyama, T., Yokoyama, K.: Localization and primary decomposition of polynomial ideals. J. Symb. Comput. 22(3), 247-277 (1996)

[4] Vasconcelos, W.: Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry. Algorithms and Computation in Mathematics. Springer, Heidelberg (2004)