近似 GCD の枠組みでの近似無平方分解
Approximate Squarefree Decomposition, revisited

長坂耕作

Kosaku Nagasaka*

神戸大学人間発達環境学研究科

Graduate School of Human Development and Environment, Kobe University†

Abstract

In this report, we show a new approach and method to compute a square-free part and its decomposition for polynomials with a priori error on their coefficients, based on the recent framework of approximate polynomial GCD.

1 はじめに

計算機代数における重要な基礎演算の 1 つが，与えられた多項式の無平方因子を取り出す操作となる。このとき，体 K 上の多項式環を $K[x]$ とすれば，取り出し方により次の 2 つの形での演算が定義される。

無平方分解

$f(x) \in K[x]$ の次の分解を無平方分解という。

$$f(x) = f_1(x)^1 f_2(x)^2 \cdots f_r(x)^r$$

ここで，$f_i(x) \in K[x]$ は互いに素で無平方（即ち，$\gcd(f_i, f_i') = 1$）である。

無平方部分

$f(x) \in K[x]$ の無平方部分とは，上記の分解の $f_i(x)$ を用いて，$f_1(x)f_2(x)\cdots f_r(x)$ と定義される。

これらの無平方因子の取り出しは，最大公約多項式（GCD）を用いて計算可能であるが，多項式の係数に誤差を含むと，ほとんどの多項式は容易に無平方となってしまい，本来意図した分解を行うことができない。このような誤差を有する多項式に対しては，次の近似 GCD が研究されている（略記）。

近似 GCD（次数指定型）

$f(x), g(x) \in K[x]$ と $k \in \mathbb{N}$ に対し，次数 k の $\gcd(f + \Delta_f, g + \Delta_g)$ を近似 GCD という。ただし，$\Delta_f, \Delta_g \in K[x]$ のノルムは最小化する。

近似 GCD（許容度指定型）

$f(x), g(x) \in K[x]$ と $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対し，最大の次数を持つ $\gcd(f + \Delta_f, g + \Delta_g)$ を近似 GCD という。ただし，$\Delta_f, \Delta_g \in K[x]$ のノルムは ε 以下とする。

本稿では，近似 GCD の枠組みを用いて，係数に誤差を持つ多項式の近似無平方部分や近似無平方分解を実現する方法について，現在検討中のものを報告する。

*This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 15K00016.

†nagasaka@main.h.kobe-u.ac.jp

2　先行研究

近似無平方分解に関する先行研究は，近似 GCD の研究に比べて著しく少ないが，初期の重要な 2 つの結果をまず紹介する。1 つ目が Dunaway によるもので，代数方程式 $f(x)=0$ を数値的に解くために，近似 GCD などの概念を間接的に用いた無平方分解を伴った方法を提案している [2]。2 つ目は佐々木と野田によるもので，Euclid の互除法に基づく近似 GCD を用いたアルゴリズムを提案している [10]。

近似無平方分解に関する研究は少ないが，密接に関係する先行研究として，最近接特異多項式（nearest singular polynomial）が挙げられる。最近接特異多項式とは，$f(x) \in K[x]$ に対して，$f(x)+\Delta_f(x)$ が無平方でない（重根を持つ）ようなノルム最小の摂動 $\Delta_f(x) \in K[x]$ を求めるものである [5, 7, 11, 6]。特に，Li と Zhi は，任意の根構造（例えば，二重根を 2 つと三重根を 1 つ，など）を持つ最近接特異多項式を求めるアルゴリズムを提案している [6]。

最近接特異多項式を用いると，近似無平方分解を間接的に求めることができる。ここでは例として，Li と Zhi の例題 2 に登場する次の多項式を取り上げる。

$$f(x)=x^5-3.0x^4+2.998997x^3-0.997991998x^2-0.001007004x+0.000402002$$

表 1 は，いくつかの根構造に対して最近接特異多項式を求めた場合の摂動の大きさなどをまとめたものである。ここで，根構造 $(e_1,e_2,\ldots,e_5)$ は，i 重根を e_i 個持つことを意味し，$\|\Delta_f\|_2$ は求まった最近接特異多項式における摂動量の大きさを，$\deg(d(x))$ は摂動後の多項式の無平方部分の次数（即ち，相異なる根の個数）を表している。この結果は，すべての根構造に対して最近接特異多項式を求め，その摂動量を吟味することで,（定義に依存するが）近似無平方部分を求められること示唆している。

しかしながら，この方法で近似無平方部分などを計算するには，すべての根構造に対して最近接特異多項式を求める必要がある。そして可能性のある根構造の個数は，$f(x)$ の次数が 5, 15, 25 の場合，それぞれ 7, 176 , 1958 とかなり大きくなる。実際のところ，根構造の個数は，$n=\deg(f)$ とすれば分割数 $p(n)$ で与えられ，分割数 $p(n)$ は少なくとも $e^{2\sqrt{n}}/14$ 以上であることが知られている [8]。即ち，この方法で近似無平方部分や近似無平方分解を求める場合，そのアルゴリズムは多項式時間とはならない。

根構造	$(3,1,0,0,0)$	$(1,2,0,0,0)$	$(2,0,1,0,0)$	$(0,1,1,0,0)$	$(1,0,0,1,0)$
$\|\Delta_f\|_2$	0.182707e-3	0.402327e-3	0.593679e-3	0.398911e-2	0.390635e-0
$\deg(d(x))$	4	3	3	2	2

表 1: 最近接特異多項式と近似無平方分解

数は多くないが，近年の近似 GCD に基づく近似無平方分解の先行研究も存在する [1, 4]。Kaltofen らは，STLN (Structured Total Least Norm) に基づく近似 GCD の手法を用いて，k 重根を持つ最近接特異多項式の計算方法を提案している。Diaz-Toca と Gonzalez-Vega は，Barnett の方法（Bezout 行列）に基づく近似 GCD を使った近似無平方分解の方法を提案している（$f^{(i)}$ で i 次導関数を表すとすれば，$\gcd(f,f^{(1)},\ldots,f^{(k)})$ を順次独立に計算する方法）。しかしながら，この方法では，i 重因子をそれぞれ独立に求めるため，与えられた多項式 $f(x)$ に対して摂動の上限を設けることができず，佐々木と野田の方法と同じく，既存の無平方分解アルゴリズムにおける GCD 計算を近似 GCD 計算に置き換えただけに過ぎない。近似 GCD のように，指定された次数に対して摂動量を最小化することや，指定され摂動量の上限内で次数を最大化することは難しい。

3　近似無平方部分と近似無平方分解の問題定義

前章で述べたように，近似無平方部分や近似無平方分解の研究は進んでいないため，近似 GCD と異なり，その明確な定義は与えられていない。本稿では，ひとまず，解くべき問題を明確にするため，以下に記すような新しい定義を与える。

近似無平方部分と近似無平方分解

$f(x) \in K[x]$ に対して，次式を満たす次数最小の $d(x) \in K[x]$ を，許容度 ε の近似無平方部分と呼ぶ。

$$f(x) + \Delta_f(x) = d(x) \times \gcd\left(f(x) + \Delta_f(x),\ \frac{\partial}{\partial x}(f(x) + \Delta_f(x))\right)$$

ここで，$\Delta_f(x) \in K[x]$ は $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ を最小化し，$\deg(\Delta_f) \leq \deg(f)$ かつ $\|\Delta_f\| \leq \varepsilon\ \|f\|$ を満たすとする。また，上記の $f(x) + \Delta_f(x)$ の無平方分解を，許容度 ε の近似無平方分解と呼ぶ。

具体的な問題としては，近似 GCD と同じく次の 2 つが考えられる。

次数指定型

$f(x) \in K[x]$ と $k \in \mathbb{N}$ に対して，次数 k の近似無平方部分とその近似無平方分解を求める。

許容度指定型

$f(x) \in K[x]$ と $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して，許容度が ε 以下の近似無平方部分とその近似無平方分解を求める。

例として，先ほどの例とは異なる次の多項式を取り上げる（例題 2[11]）。

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 + 2.03x^4 - 0.9398x^3 - 2.0296x^2 - 0.0602x - 0.0004 \\ &\approx (x - 1.0)(x + 0.01)(x + 0.02)(x + 1.0)(x + 2.0) \end{aligned}$$

次数指定型で $k = 3$ とした場合（相異なる根が 3 つ），その近似無平方部分は，

$$\begin{aligned} & 0.2x^3 + 0.0784134x^2 - 0.270894x - 0.00207157 \\ \Rightarrow\ & x^3 + 0.392067x^2 - 1.35447x - 0.0103578 \approx (x - 0.988609)(x + 0.00763061)(x + 1.37305) \end{aligned}$$

となり，その近似無平方分解は，

$$\begin{aligned} & (0.0427363x - 0.0422495)\left(5.07998x^2 + 7.0138x + 0.0532238\right)^2 \\ \Rightarrow\ & (x - 0.988609)\left(x^2 + 1.38068x + 0.0104772\right)^2 \approx (x - 0.988609)(x + 0.00763061)^2(x + 1.37305)^2 \end{aligned}$$

となる。このときの許容度は $\varepsilon = 0.0461578$ である。次数指定型で $k = 2$ とした場合（相異なる根が 2 つ），その近似無平方部分は，

$$0.2x^2 + 0.05907x - 0.127149 \Rightarrow x^2 + 0.29535x - 0.635744 \approx (x - 0.66322)(x + 0.958571)$$

となり，その近似無平方分解は，

$$(0.988921x - 0.655873)^2(1.08611x + 1.04111)^3 \Rightarrow (x - 0.66322)^2(x + 0.958571)^3$$

となる。このときの許容度は $\varepsilon = 0.190452$ である。許容度指定型で $\varepsilon = 1.0\text{e-}1$ とした場合，その近似無平方部分は，

$$\begin{aligned} & 0.2x^3 + 0.0784134x^2 - 0.270894x - 0.00207157 \\ \Rightarrow\ & x^3 + 0.392067x^2 - 1.35447x - 0.0103578 \approx (x - 0.988609)(x + 0.00763061)(x + 1.37305) \end{aligned}$$

となり，その近似無平方分解は，

$$\begin{aligned} & (0.0427363x - 0.0422495)\left(5.07998x^2 + 7.0138x + 0.0532238\right)^2 \\ \Rightarrow\quad & (x - 0.988609)\left(x^2 + 1.38068x + 0.0104772\right)^2 \approx (x - 0.988609)(x + 0.00763061)^2(x + 1.37305)^2 \end{aligned}$$

となる。このときの許容度は $\varepsilon = 0.0461578$ である。許容度指定型で $\varepsilon = 1.0\text{e-}4$ とした場合，その近似無平方部分は，

$$\begin{aligned} & 0.1243x^4 + 0.250466x^3 - 0.120573x^2 - 0.250472x - 0.00372742 \\ \Rightarrow\quad & x^4 + 2.01501x^3 - 0.970011x^2 - 2.01506x - 0.0299872 \\ & \approx (x - 1.00001)(x + 1.00003)(x + 2.0)(x + 0.0149931) \end{aligned}$$

となり，その近似無平方分解は，

$$\begin{aligned} & \left(0.0178181x^3 + 0.0356364x^2 - 0.017818x - 0.0356373\right)(7.49152x + 0.112321)^2 \\ \Rightarrow\quad & \left(x^3 + 2.00001x^2 - 0.999998x - 2.00006\right)(x + 0.0149931)^2 \\ & \approx (x - 1.00001)(x + 1.00003)(x + 2.0)(x + 0.0149931)^2 \end{aligned}$$

となる。このときの許容度は $\varepsilon = 0.0000155888$ である。

4 アルゴリズム

本報告を行った時点では細かな部分の検討中であり，前章で導入した定義に基づく問題を解くアルゴリズムの概要について示しておく。

次数指定型のアルゴリズム

入力: $f(x) \in K[x]$, $k \in \mathbb{N}$
出力: $f(x)$ の k 次の近似無平方部分とその近似無平方分解

1. 構造化行列を用いた近似 GCD アルゴリズムにより，k 次の近似無平方部分を求める。
2. 得られた $f(x) + \Delta_f(x)$ の無平方分解により，近似無平方分解を求める。
3. 最小二乗法による反復法で摂動の最小化を行う。

許容度指定型のアルゴリズム

入力: $f(x) \in K[x]$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
出力: $f(x)$ の許容度 ε の近似無平方部分とその近似無平方分解

1. **for** $k = 1, \ldots, \deg(f)$ **do**
   - $f(x)$ の k 次の近似無平方部分とその近似無平方分解を求める（上のアルゴリズム）
   - 得られた許容度が ε 以下ならば，結果を出力する。

それぞれのステップで採用する下位のアルゴリズムには，様々な選択肢がありえる。例えば，構造化行列を用いた近似 GCD アルゴリズムとしては，STLN に基づくアルゴリズム [4] や，多項式行列に対するアルゴリズム [3] を近似 GCD に応用したアルゴリズムなどが考えられる。得られた $f(x) + \Delta_f(x)$ の無平方分解は，無平方でない多項式に十分近いと考えられるため，単純に Musser の方法 [9] における GCD を近似 GCD に置き換えたアルゴリズムで計算可能と思われる。

今後は，この新たな定義に基づく近似無平方部分と近似無平方分解に適した近似 GCD アルゴリズムの選定や数値実験などを行い，アルゴリズムの完成を目指したい。

参 考 文 献

[1] Diaz-Toca, G. M., Gonzalez-Vega, L., 2006. Computing greatest common divisors and squarefree decompositions through matrix methods: the parametric and approximate cases. Linear Algebra Appl. 412 (2-3), 222–246.

[2] Dunaway, D. K., 1974. Calculation of zeros of a real polynomial through factorization using Euclid's algorithm. SIAM J. Numer. Anal. 11, 1087–1104.

[3] Giesbrecht, M., Haraldson, J., Labahn, G., 2017. Computing the nearest rank-deficient matrix polynomial. In: ISSAC'17—Proceedings of the 2017 ACM International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. ACM, New York, pp. 181–188.

[4] Kaltofen, E., Yang, Z., Zhi, L., 2006. Approximate greatest common divisors of several polynomials with linearly constrained coefficients and singular polynomials. In: ISSAC'06—Proceedings of the 2006 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. ACM, New York, pp. 169–176.

[5] Karmarkar, N., Lakshman, Y. N., 1996. Approximate polynomial greatest common divisors and nearest singular polynomials. In: ISSAC'96—Proceedings of the 1996 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. ACM, New York, pp. 35–39.

[6] Li, Z., Zhi, L., 2013. Computing the nearest singular univariate polynomials with given root multiplicities. Theoret. Comput. Sci. 479, 150–162.

[7] Zhi, L., Wu, W., 1998. Nearest singular polynomials. J. Symbolic Comput. 26 (6), 667–675, symbolic numeric algebra for polynomials.

[8] Maróti, A., 2003. On elementary lower bounds for the partition function. Integers 3, A10, 9.

[9] Musser, D. R., 1971. Algorithms for Polynomial Factorization. Ph.D. Thesis, Technical Report #134. Computer Science Department, University of Wisconsin.

[10] Sasaki, T., Noda, M.-T., 1989. Approximate square-free decomposition and root-finding of ill-conditioned algebraic equations. J. Inform. Process. 12 (2), 159–168.

[11] Zhi, L., Noda, M.-T., Kai, H., Wu, W., 2004. Hybrid method for computing the nearest singular polynomials. Japan J. Indust. Appl. Math. 21 (2), 149–162.