平面曲線の縮閉線もどき、垂足線もどきと反転

Evolutoids, pedaloids and inversions of plane curves

北海道大学　泉屋周一
Shyuichi Izumiya
Hokkaido University

ユークリッド平面上の正則曲線の垂足曲線や縮閉線は古くから知られた特異点を持つ曲線で、その特異点はそれぞれ対応する正則曲線の変曲点や頂点に対応することが知られている（[3, 7] 参照）。ここでは、平面曲線の垂足曲線や縮閉線に類似する曲線を導入し、その性質を調べる。

$\boldsymbol{\gamma}: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を単位速度平面曲線とする。ただし、$\mathbb{R}^2$ は $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2), \boldsymbol{b}=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$ に対して標準内積 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = a_1b_1+a_2b_2$ を許容するユークリッド平面とする。このとき、以下のフルネ公式が知られている：

$$\begin{cases} \boldsymbol{t}'(s)=\kappa(s)\boldsymbol{n}(s), \\ \boldsymbol{n}'(s)=-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s), \end{cases}$$

ここで、$\boldsymbol{t}(s)=\boldsymbol{\gamma}'(s)$ は**単位接ベクトル**, $\boldsymbol{n}(s)=J(\boldsymbol{t}(s))$ は単位法線ベクトル、$\kappa(s)=x_1'(s)x_2''(s)-x_1''(s)x_2'(s)$ は $\boldsymbol{\gamma}(s)=(x_1(s),x_2(s))$ の**曲率**を表す。ただし、J は $\mathbb{R}^2$ における反時計周りの $\pi/2$ 回転を表す。一般に垂足曲線は任意に選んだ $\mathbb{R}^2$ の点に依存して定義されるが、ここではその点を原点とする。$\boldsymbol{\gamma}$ の（原点 $\boldsymbol{0}\in\mathbb{R}^2$ に対する）**垂足曲線**は

$$\mathrm{Pe}_{\gamma}(s)=\langle \boldsymbol{\gamma}(s),\boldsymbol{n}(s)\rangle \boldsymbol{n}(s)$$

と定義される平面曲線である（[3, Page 36] 参照）。垂足曲線は、定義から、考えている正則曲線の各点における法線方向に沿ったその点の接線への射影の像（接線に下ろした垂線の足）の軌跡である。垂足曲線の微分は $\mathrm{Pe}_{\gamma}'(s)=-\kappa(s)(\langle\boldsymbol{\gamma}(s),\boldsymbol{t}(s)\rangle\boldsymbol{n}(s)+\langle\boldsymbol{\gamma}(s),\boldsymbol{n}(s)\rangle\boldsymbol{t}(s))$ なので、その特異点は $\boldsymbol{\gamma}(s_0)=\boldsymbol{0}$ または $\kappa(s_0)=0$ を満たす点 s_0 である。従って、$\boldsymbol{\gamma}$ が原点を通らないと仮定すると特異点は $\kappa(s_0)=0$ を満たす点 s_0、即ち $\boldsymbol{\gamma}$ の**変曲点**である。

一方、$\boldsymbol{\gamma}$ の**縮閉線**は $\kappa(s)\neq 0$ に対して

$$\mathrm{Ev}_{\gamma}(s)=\boldsymbol{\gamma}(s)+\frac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{n}(s)$$

当研究は、竹内伸子氏（東京学芸大学）との共同研究の一部をまとめたものである。
This work was supported by Research Insitute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University..

と定義される。縮閉線は$\boldsymbol{\gamma}$の接触円（曲率円）の中心点の軌跡であることが知られている。縮閉線の微分を計算すると$\mathrm{Ev}'_{\boldsymbol{\gamma}}(s) = -(\kappa'/\kappa^2)(s)\boldsymbol{t}(s)$なので、縮閉線の特異点は$\kappa'(s_0) = 0$となる点$s_0 \in I$である。すなわち$\boldsymbol{\gamma}$の**頂点**に対応する。また、縮閉線は$\boldsymbol{\gamma}$の各点から伸ばした法線族の包絡線であることが知られている（[3, 7] 参照）。また、$\boldsymbol{\gamma}$の各点から伸ばした接線族の包絡線は元の曲線$\boldsymbol{\gamma}$自身とその変曲点における接戦の和集合である。Giblin と Warder は [6] で、**縮閉線もどき**と呼ばれる$\boldsymbol{\gamma}$に付随した曲線の 1 径数族を定義した。それは、縮閉線$\mathrm{Ev}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$と元の曲線$\boldsymbol{\gamma}$の間を埋めるもので、縮閉線もどきの一つのメンバーは各点における接線からの一定の角度を持った直線族の包絡線として定義される。ここでは、縮閉線もどきの類似物として**垂足曲線もどき**を定義する。縮閉線と垂足曲線は一見なんの関係もない概念のように思えるが、それぞれ**もどき**を考えると実は興味深い関係があることがわかる（ §2 参照）。平面曲線は、古典的対象であるにもかかわらず、その性質に関しては、今だに新たな興味深い現象が発見される。さらに、空間曲線や一般次元の部分多様体などでの様々な性質を研究する実験台としての意味も大きい。実際、空間曲線に関する、縮閉線もどきや垂足曲線もどきの研究については、現在 [9] にて研究中である。また、様々な興味深い図を描くことできるが、ファイルが重くなるので、ここには図を載せない。原論文 [8] を参照してほしい。

ここで考える曲線、写像等は全てC^∞級とする。

1　垂足曲線、反転垂足曲線、原始曲線、及び 縮閉線

この節では、平面曲線に付随した垂足曲線と垂足曲線の類似概念を考える。垂足曲線は以下の円族の包絡線であることが知られている（[3, Page 166] 参照）：$G : I \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$を

$$G(s, \boldsymbol{x}) = \left\| \boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}(s) \right\|^2 - \frac{1}{4}\|\boldsymbol{\gamma}(s)\|^2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\gamma}(s) \rangle$$

と定義する。点$s_0 \in I$を止めると$G(s_0, \boldsymbol{x}) = 0$は中心を$\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}(s_0)$として原点を通る円である。このとき、以下の計算結果を得る：

$$\frac{\partial G}{\partial s}(s, \boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}, -\boldsymbol{t}(s) \rangle$$

$\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s)\}$は$\mathbb{R}^2$の正規直交基底なので、$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{t}(s) + \mu \boldsymbol{n}(s)$と書くと、$G(s, \boldsymbol{x}) = (\partial G/\partial s)(s, \boldsymbol{x}) = 0$であるための必要十分条件は$\lambda = 0$であり、かつ$\mu(\mu - \langle \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{\gamma}(s) \rangle) = 0$である。この条件は$\mu = 0$または$\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{n}(s) \rangle \boldsymbol{n}(s)$となる事を意味している。言い換えると垂足曲線$\mathrm{Pe}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$が上記の円族の包絡線である事を意味している。一変数関数芽の開折理論（[3, Page 166] 参照）から以下の特異点の分類が得られる：

命題 1.1 曲線$\boldsymbol{\gamma}$の垂足曲線$\mathrm{Pe}_{\boldsymbol{\gamma}}$は点$\mathrm{Pe}_{\boldsymbol{\gamma}}(s_0)$の近くで**通常カスプ曲線**$C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x = t^2, y = t^3\}$に局所的微分同相であるための必要十分条件は$\kappa(s_0) = 0$ *and* $\kappa'(s_0) \neq 0$を満たす事である。

点 $s \in I$ を固定すると $g_s^{-1}(0)$ は原点を通る円なので、その原点を中心とする反転像は直線となる。ここで、原点を中心として、単位円に対応する**反転** $\Psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ は

$$\Psi(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$$

と定義される。このとき、$\Psi(g_s^{-1}(0)) = \{\boldsymbol{x} \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\gamma}(s)\rangle = 1\}$ となる。従って、関数族 $F : I \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}) \longrightarrow \mathbb{R}$ を $F(s, \boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\gamma}(s)\rangle - 1$ と定義すると、

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s, \boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}(s)\rangle.$$

を得る。さらに $\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{t}(s) + \mu \boldsymbol{n}(s)$ と書き表すと $F(s, \boldsymbol{x}) = \partial F/\partial s(s, \boldsymbol{x}) = 0$ であるための必要十分条件は

$$\lambda = 0,\ \mu\langle \boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{n}(s)\rangle = 1$$

である。このことは

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{\langle \boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{n}(s)\rangle}\boldsymbol{n}(s)$$

と書かれる事を意味している。曲線 $\boldsymbol{\gamma}$ の**反転垂足曲線**は $\langle \boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{n}(s)\rangle \neq 0$ と言う仮定の下で

$$\mathrm{APe}_{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \frac{1}{\langle \boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{n}(s)\rangle}\boldsymbol{n}(s)$$

と定義される。このとき、

$$\Psi \circ \mathrm{Pe}_{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \frac{\langle \boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{n}(s)\rangle \boldsymbol{n}(s)}{\|\langle \boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{n}(s)\rangle \boldsymbol{n}(s)\|^2} = \mathrm{APe}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$$

が成り立つ。$\Psi \circ \Psi = 1_{\mathbb{R}^2}$ なので、$\Psi \circ \mathrm{APe}_{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \mathrm{Pe}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ となる。定義から反転垂足曲線は直線族 $\{f_s^{-1}(0)\}_{s\in I} = \{\boldsymbol{x} \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\gamma}(s)\rangle = 1\}_{s\in I}$ の包絡線である。反転 Ψ は微分同相なので、 反転垂足曲線 $\mathrm{APe}_{\boldsymbol{\gamma}}$ は点 $\mathrm{APe}_{\boldsymbol{\gamma}}(s_0)$ の近くで通常カスプ曲線に局所微分同相であるための必要十分条件は $\kappa(s_0) = 0$ かつ $\kappa'(s_0) \neq 0$ を満たす事である。

一方、アーノルド [1, pp. 91] は、平面曲線の**原始曲線**を定義した：$\langle \boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{n}(s)\rangle \neq 0$ を満たす単位速度平面曲線 $\boldsymbol{\gamma}$ に対して、関数族 $H : I \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}) \longrightarrow \mathbb{R}$ を $H(s, \boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)\rangle$ と定義する。このとき、任意の $s \in I$ を固定すると、$h_s(\boldsymbol{x}) = H(s, \boldsymbol{x}) = 0$ は曲線の位置ベクトル $\boldsymbol{\gamma}(s)$ の端点を通り、その位置ベクトルに直交する直線の方程式である。この直線族 $\{h_s^{-1}(0)\}_{s\in I}$ の包絡線を $\boldsymbol{\gamma}$ の**原始曲線**と呼ぶ。この関数族の s に関する偏微分は $\partial H/\partial s(s, \boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{t}(s)\rangle$ なので、$\boldsymbol{\gamma}$ の原始曲線 $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{\gamma}} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ は

$$\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{\gamma}}(s) = 2\boldsymbol{\gamma}(s) - \frac{\|\boldsymbol{\gamma}(s)\|^2}{\langle \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)\rangle}\boldsymbol{n}(s)$$

と言う径数表示を持つ。定義から、垂足曲線と原始曲線は $\mathrm{Pe}_{\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{\gamma}}} = \boldsymbol{\gamma}$ and $\mathrm{Pr}_{\mathrm{Pe}_{\boldsymbol{\gamma}}} = \boldsymbol{\gamma}$ と言う関係を持つ。この事実は、$\boldsymbol{\gamma}$ の原始曲線は垂足曲線を作る過程の反対方向を向いた過程で得られる事を意味している。垂足曲線は $\boldsymbol{\gamma}$ の各点での接線を与えると決まるので、原

始曲線はちょうど、関数から原始函数を構成する過程に対応している。原始曲線の名前の由来である。さらに平面曲線 $\boldsymbol{\gamma}$ の**反転原始曲線**を

$$\mathrm{APr}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)=\Psi\circ\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)=\frac{2\langle\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{\gamma}(s)\rangle^2}{\|\boldsymbol{\gamma}(s)\|^4}\boldsymbol{\gamma}(s)-\frac{\langle\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{\gamma}(s)\rangle}{\|\boldsymbol{\gamma}(s)\|^2}\boldsymbol{n}(s)$$

と定義する。このとき以下の定理がなりたつ。

定理 1.2 条件 $\langle\boldsymbol{\gamma}(s),\boldsymbol{n}(s)\rangle\neq 0$ を満たす平面曲線 $\boldsymbol{\gamma}:I\longrightarrow\mathbb{R}^2$ に対して、

$$\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)=\mathrm{APe}_{\Psi\circ\boldsymbol{\gamma}}(s)\ (i.e.\ \mathrm{APr}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)=\mathrm{Pe}_{\Psi\circ\boldsymbol{\gamma}}(s)),\ \mathrm{Pr}_{\Psi\circ\boldsymbol{\gamma}}(s)=\mathrm{APe}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)\ (i.e.\ \mathrm{APr}_{\Psi\circ\boldsymbol{\gamma}}(s)=\mathrm{Pe}_{\boldsymbol{\gamma}}(s))$$

が成り立つ。さらに、もし $\kappa(s)\neq 0$ ならば

$$\mathrm{Pr}_{\mathrm{APe}_{\boldsymbol{\gamma}}}(s)=\mathrm{APe}_{\mathrm{Pe}_{\boldsymbol{\gamma}}}(s)\ (i.e.\ \mathrm{APr}_{\mathrm{APe}_{\boldsymbol{\gamma}}}(s)=\mathrm{Pe}_{\mathrm{Pe}_{\boldsymbol{\gamma}}}(s))$$

が成り立つ。

証明　ここでは、直線族 $\{h_s^{-1}(0)\}_{s\in I}$ の包絡線であるという元々の定義を使う。関数族の定義は $H(s,\boldsymbol{x})=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}(s)\rangle-\|\boldsymbol{\gamma}(s)\|^2$ なので、$H(s,\boldsymbol{x})=0$ である必要十分条件は $\langle\boldsymbol{x},\Psi\circ\boldsymbol{\gamma}(s)\rangle=1$ が成り立つ事である。従って、直線族 $\{h_s^{-1}(0)\}_{s\in I}$ の包絡線は $\Psi\circ\boldsymbol{\gamma}$ の反垂足曲線に一致する。すなわち、$\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)=\mathrm{APe}_{\Psi\circ\boldsymbol{\gamma}}(s)$ が成り立つ。反転は $\Psi\circ\Psi=1_{\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}}$ を満たすので、

$$\mathrm{APe}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)=\mathrm{APe}_{\Psi\circ\Psi\circ\boldsymbol{\gamma}}(s)=\mathrm{Pr}_{\Psi\circ\boldsymbol{\gamma}}(s)$$

が成り立つ。もし、$\kappa(s)\neq 0$ とすると、$\mathrm{Pe}_{\boldsymbol{\gamma}}$ は正則曲線となり、$\mathrm{APe}_{\boldsymbol{\gamma}}=\Psi\circ\mathrm{Pe}_{\boldsymbol{\gamma}}$ もまた正則曲線である。前半の主張で $\boldsymbol{\gamma}$ の代わりに $\mathrm{APe}_{\boldsymbol{\gamma}}$ を使うと、

$$\mathrm{Pr}_{\mathrm{APe}_{\boldsymbol{\gamma}}}(s)=\mathrm{APe}_{\Psi\circ\mathrm{APe}_{\boldsymbol{\gamma}}}(s)=\mathrm{APe}_{\mathrm{Pe}_{\boldsymbol{\gamma}}}(s)$$

が成り立つ。 □

2　正則平面曲線の縮閉線もどきと垂足曲線もどき

Giblin-Wader[6] は平面曲線 $\boldsymbol{\gamma}$ の**縮閉線もどき**の径数表示を以下のように与えた：任意の $\phi\in[0,2\pi)$ に対して、$\kappa(s)\neq 0$ を満たす $\boldsymbol{\gamma}$ の ϕ-**縮閉線もどき**を

$$\mathrm{Ev}[\phi]_{\boldsymbol{\gamma}}(s)=\boldsymbol{\gamma}(s)+\frac{\sin\phi}{\kappa(s)}(\cos\phi\boldsymbol{t}(s)+\sin\phi\boldsymbol{n}(s))$$

と定義する。[6] では、$\mathrm{Ev}[\phi]_{\boldsymbol{\gamma}}$ を単に縮閉線もどきと呼んでいるが、ここでは、ϕ に依存した曲線族を縮閉線もどきと呼び、それぞれ ϕ を固定したものを ϕ-縮閉線もどきと呼ぶ。ここで、関数族 $F:I\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ を $F(s,\boldsymbol{x})=\langle\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\gamma}(s),\sin\phi\boldsymbol{t}(s)-\cos\phi\boldsymbol{n}(s)\rangle$ と定義すると、$s\in I$ に対して、$f_s(\boldsymbol{x})=F(s,\boldsymbol{x})=0$ は $\boldsymbol{\gamma}(s)$ を通り、 その方向ベクトルが接ベクトル $\boldsymbol{t}(s)$ と角度が ϕ となる直線の方程式である。この直線族 $\{f_s^{-1}(0)\}_{s\in I}$ の包絡線を

求めるとそれは ϕ-縮閉線もどきとなる。さらに、$\phi=\pi/2, 3\pi/2$ の時 $\mathrm{Ev}[\phi]_{\boldsymbol{\gamma}}(s)=\mathrm{Ev}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ となり、$\phi=0,\pi$ のときは $\mathrm{Ev}[\phi]_{\boldsymbol{\gamma}}(s)=\boldsymbol{\gamma}(s)$ となる。また、微分を計算することにより、$s_0\in I$ が $\mathrm{Ev}[\phi]_{\boldsymbol{\gamma}}$ の特異点であるための必要十分条件は $\kappa^2(s_0)\cos\phi-\kappa'(s_0)\sin\phi=0$ となる事がわかる。

一方、$\boldsymbol{\gamma}$ の**垂足曲線もどき**を以下のように定義する：任意の $\psi\in[0,2\pi)$ に対して、$\boldsymbol{\gamma}$ の ψ**-垂足曲線もどき**を

$$\mathrm{Pe}[\psi]_{\boldsymbol{\gamma}}(s)=\langle\boldsymbol{\gamma}(s),\cos\psi\boldsymbol{t}(s)+\sin\psi\boldsymbol{n}(s)\rangle(\cos\psi\boldsymbol{t}(s)+\sin\psi\boldsymbol{n}(s))$$

と定義する。もし $\psi=\pi/2, 3\pi/2$ のとき、 $\mathrm{Pe}[\psi]_{\boldsymbol{\gamma}}(s)=\mathrm{Pe}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ となり、$\psi=0,\pi$ のとき、$\mathrm{Pe}[\psi]_{\boldsymbol{\gamma}}(s)=\langle\boldsymbol{\gamma}(s),\boldsymbol{t}(s)\rangle\boldsymbol{t}(s)$ となる。この $\langle\boldsymbol{\gamma}(s),\boldsymbol{t}(s)\rangle\boldsymbol{t}(s)$ は**反垂足曲線**（ [11] 参照）と呼ばれ、$\mathrm{CPe}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ と表される。

ここで、微分を計算すると

$$\begin{aligned}\mathrm{Pe}[\psi]'_{\boldsymbol{\gamma}}(s) &= \{\cos^2\psi+\kappa(s)(\cos 2\psi\langle\boldsymbol{\gamma}(s),\boldsymbol{n}(s)\rangle-\sin 2\psi\langle\boldsymbol{\gamma}(s),\boldsymbol{t}(s)\rangle)\}\boldsymbol{t}(s)\\ &+ \{\cos\psi\sin\psi+\kappa(s)(\sin 2\psi\langle\boldsymbol{\gamma}(s),\boldsymbol{n}(s)\rangle+\cos 2\psi\langle\boldsymbol{\gamma}(s),\boldsymbol{t}(s)\rangle)\}\boldsymbol{n}(s)\end{aligned}$$

となるので、$s_0\in I$ が $\mathrm{Pe}[\psi]_{\boldsymbol{\gamma}}$ の特異点であるための必要十分条件は

$$\kappa(s_0)\langle\boldsymbol{\gamma}(s),\boldsymbol{t}(s)\rangle=\cos\psi\sin\psi,\ \kappa(s_0)\langle\boldsymbol{\gamma}(s),\boldsymbol{n}(s)\rangle=-\cos^2\psi$$

である、[8] では縮閉線もどきと垂足曲線もどきには以下の興味深い関係がある事を示した。

定理 2.1 $\boldsymbol{\gamma}$ は $\kappa(s)\neq 0$ かつ $\kappa^2(s)\sin\psi+\kappa'(s)\cos\psi\neq 0$ を満たすと仮定する。このとき、$\boldsymbol{\gamma}$ の ψ-垂足曲線もどきは $\boldsymbol{\gamma}$ の $\psi+\pi/2$-縮閉線もどきに一致する。すなわち、

$$\mathrm{Pe}[\psi]_{\boldsymbol{\gamma}}(s)=\mathrm{Pe}_{\mathrm{Ev}[\psi+\pi/2]_{\boldsymbol{\gamma}}}(s)$$

が成り立つ。

上の定理の二つ目の仮定は、$(\psi+\pi/2)$-縮閉線もどきが正則である事を意味する。$\psi=0$ とすると以下の系が得られる

系 2.2 ([11]) $\kappa(s)\neq 0,\ \kappa'(s)\neq 0$ と仮定すると、$\boldsymbol{\gamma}$ の反垂足曲線は $\boldsymbol{\gamma}$ の縮閉線の垂足曲線に一致する。すなわち、

$$\mathrm{CPe}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)=\mathrm{Pe}_{\mathrm{Ev}_{\boldsymbol{\gamma}}}(s)$$

が成り立つ。

3　フロンタルの縮閉線もどきと垂足曲線もどき

前節まででは、正則曲線の縮閉線もどきと垂足曲線もどきを考えたが、縮閉線もどきと垂足曲線もどきは一般的には特異点を持つ。しかし、定理 2.1 では正則曲線の縮閉線もどきの垂足曲線を考える必要があった。従って、ある種の特異曲線に対して垂足曲線の概念

を拡張する必要がある。ユークリッド平面に於いて微分幾何学を応用可能な特異曲線として自然な概念として**フロンタル（曲線）**がある [4, 5]。

$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}) : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$ が $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})^*\theta = 0$ を満たすとき**ルジャンドル曲線**と呼ぶ。ただし、θ は単位接円束 $T_1\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times S^1$ 上の接触 1 形式とする（ [2] 参照）。上記の条件は、任意の $t \in I$ に対して $\langle \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t), \boldsymbol{\nu}(t) \rangle = 0$ を満たすことに同値である。正則とは限らない曲線 $\boldsymbol{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ が**フロンタル（曲線）**であるとは $\boldsymbol{\nu} : I \longrightarrow S^1$ が存在して $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})$ がルジャンドル曲線となることである。さらに $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})$ がはめ込み（正則曲線）の時、 $\boldsymbol{\gamma}$ は**フロント（波頭線）**と呼ばれる。フロンタルの微分幾何は [5] に於いて構成された。

ルジャンドル曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu}) : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$ に対して、$\boldsymbol{\gamma}$ に沿った単位ベクトル場 $\boldsymbol{\mu}(t) = J(\boldsymbol{\nu}(t))$ を考えると、以下のフルネ型公式が成り立つ [5]：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\nu}}(t) = \ell(t)\boldsymbol{\mu}(t), \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}(t) = -\ell(t)\boldsymbol{\nu}(t), \end{cases}$$

ただし、$\ell(t) = \langle \dot{\boldsymbol{\nu}}(t), \boldsymbol{\mu}(t) \rangle$ である。さらに任意の $t \in I$ において $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \beta(t)\boldsymbol{\mu}(t)$ を満たす $\beta(t)$ が存在する。 対 (ℓ, β) は**ルジャンドル曲線** $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})$ **の曲率**と呼ばれる。定義から $t_0 \in I$ が $\boldsymbol{\gamma}$ の特異点であるための必要十分条件は $\beta(t_0) = 0$ を満たすことである。さらに、正則曲線 $\boldsymbol{\gamma}$ に対しては、$\boldsymbol{\mu}(t) = \boldsymbol{t}(t)$ かつ $\ell(t) = \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|\kappa(t)$ が成り立つ。また、ルジャンドル曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})$ がはめ込み (すなわち、 $\boldsymbol{\gamma}$ が波頭線である）ための必要十分条件は任意の $t \in I$ に対して、$(\ell(t), \beta(t)) \neq (0, 0)$ が成り立つことである。ゆえに、$t_0 \in I$ がフロンタル $\boldsymbol{\gamma}$ の変曲点であることは $\ell(t_0) = 0$ を満たすことと同値である。より詳しいルジャンドル曲線の性質に関しては原論文 [4, 5] を参照してほしい。

論文 [5] では、任意の $t \in I$ に対して $\beta(t) = \alpha(t)\ell(t)$ を満たす $\alpha(t)$ が存在するようなフロンタル $\boldsymbol{\gamma}$ に対して**縮閉線**を

$$\mathcal{E}v_{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \boldsymbol{\gamma}(t) - \alpha(t)\boldsymbol{\nu}(t)$$

と定義した。さらに、$\mathcal{E}v_{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ は一般的にはフロンタルで、$\boldsymbol{\gamma}$ が波頭線の場合は $\mathcal{E}v_{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ も波頭線となることが知られている [4, 5]。

任意の $t \in I$ に対して $\beta(t) = \alpha(t)\ell(t)$ を満たす $\alpha(t)$ が存在するようなルジャンドル曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})$ に対して、$\boldsymbol{\gamma}$ の ϕ**-縮閉線もどき**を

$$\mathcal{E}v_{\boldsymbol{\gamma}}[\phi](t) = \boldsymbol{\gamma}(t) - \alpha(t)\sin\phi(\cos\phi\boldsymbol{\mu}(t) + \sin\phi\boldsymbol{\nu}(t))$$

と定義する。定義から、$\mathcal{E}v_{\boldsymbol{\gamma}}[0](t) = \mathcal{E}v_{\boldsymbol{\gamma}}[\pi](t) = \boldsymbol{\gamma}(t)$ かつ $\mathcal{E}v_{\boldsymbol{\gamma}}[\pi/2](t) = \mathcal{E}v_{\boldsymbol{\gamma}}[3\pi/2](t) = \mathcal{E}v_{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ が成り立つ。このとき、直接的計算により以下が示される。

命題 3.1 ([8]) 任意の $t \in I$ に対して $\beta(t) = \alpha(t)\ell(t)$ を満たす $\alpha(t)$ が存在するようなルジャンドル曲線 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})$ に対して、ϕ-縮閉線もどき $\mathcal{E}v_{\boldsymbol{\gamma}}[\phi]$ はフロンタルである。さらに、任意の $t \in I$ に対して、$\ell(t) \neq 0$ を満たすとき、 ϕ-縮閉線もどき $\mathcal{E}v_{\boldsymbol{\gamma}}[\phi]$ は波頭線である。

ここで、フロンタル $\boldsymbol{\gamma}$ の ψ**-垂足曲線もどき**を

$$\mathcal{P}e[\psi]_{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \langle \boldsymbol{\gamma}(t), \cos\psi\boldsymbol{\mu}(t) + \sin\psi\boldsymbol{\nu}(t) \rangle (\cos\psi\boldsymbol{\mu}(t) + \sin\psi\boldsymbol{\nu}(t))$$

と定義する。ψ-垂足曲線もどきは、フロンタル $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu})$ になんの仮定もなく定義できることに注意する。このとき、それぞれ

$$\mathcal{P}e_{\gamma}(t)=\mathcal{P}e[\pi/2]_{\gamma}(t)=\mathcal{P}e[3\pi/2]_{\gamma}(t),\quad \mathcal{CP}e_{\gamma}(t)=\mathcal{P}e[0]_{\gamma}(t)=\mathcal{P}e[\pi]_{\gamma}(t)$$

と表し、$\mathcal{P}e_{\gamma}(t)$ はフロンタル $\boldsymbol{\gamma}$ の**垂足曲線** $\mathcal{CP}e_{\gamma}(t)$ はフロンタル $\boldsymbol{\gamma}$ の**反垂足曲線**と呼ばれる。フロンタル $\boldsymbol{\gamma}$ の ψ-垂足曲線もどきがフロンタルとなる事を直接証明するのは難しいが、以下の事は直接計算から示すことができる。

命題 3.2 ([8, 10]) $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu})$ をルジャンドル曲線とする。任意の $t\in I$ に対して、 $\boldsymbol{\gamma}(t)=\delta(t)\boldsymbol{\sigma}(t)$ を満たすような $\delta(t)$ と $\boldsymbol{\sigma}:I\longrightarrow S^1$ が存在すると仮定する。このとき、$\boldsymbol{\gamma}$ の垂足曲線 $\mathcal{P}e_{\gamma}(t)$ はフロンタルである。

ここでは、$\boldsymbol{\gamma}(t)\neq 0$ の時、上記の仮定が成り立つことに注意する。[8] では、定理 2.1 の一般化である以下の定理が示された。

定理 3.3 ([8]) 任意の $t\in I$ に対して、$\beta(t)=\alpha(t)\ell(t)$ を満たす $\alpha(t)$ が存在するルジャンドル曲線 $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu})$ に対して、

$$\mathcal{P}e[\psi]_{\gamma}(t)=\mathcal{P}e_{\mathcal{E}v_{\gamma}[\psi+\pi/2]}(t)$$

が成り立つ。

命題 3.2 と定理 3. 3 の系として以下が成り立つ。

系 3.4 $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\nu})$ をルジャンドル曲線とする。任意の $t\in I$ に対して、 $\boldsymbol{\gamma}(t)=\delta(t)\boldsymbol{\sigma}(t)$ かつ $\mathcal{E}v_{\gamma}[\psi+\pi/2](t)=\delta(t)\boldsymbol{\sigma}(t)$ を満たすような $\delta(t)$ と $\boldsymbol{\sigma}:I\longrightarrow S^1$ が存在すると仮定する。この時、ψ-垂足曲線もどき $\mathcal{P}e[\psi]_{\gamma}$ はフロンタルである。

参考文献

[1] V. I. Arnol'd, *Dynamical Systems VIII*, Encyclopedia of Mathematical Sciences Vol. 39 Springer, 1989.

[2] V. I. Arnol'd, *Singularities of Caustics and Wave Fronts*, Mathematics and its Applications, **62**, Kluwere Academic Publications, 1990.

[3] J. W. Bruce and P. J. Giblin, *Curves and singularities* (*second edition*), Cambridge University press, 1992.

[4] T. Fukunaga and M. Takahashi, Evolutes of fronts in the Euclidean plane, Journal of Singularities, **10**, 92–107 (2014)

[5] T. Fukunaga and M. Takahashi, Evolutes and involutes of frontals in the Euclidean plane, DEMONSTRATIO MATHEMATICA, **XLVIII**, 147–166 (2015)

[6] P. J. Giblin and J. P. Warder, Evolving Evolutoids, American Mathematical Monthly, 871–889 (2014)

[7] S. Izumiya, M. C. Romero Fuster, M. A. Soares Ruas and F. Tari, *Differential Geometry from a singularity theory viewpoint*, World Scientific Publishing, Hackensack, 2015

[8] S. Izumiya and N. Takeuchi, Evolutoids and pedaloids of plane curves, Preprint (2019)

[9] S. Honda, S. Izumiya and N. Takeuchi, Focaloids, evolutoids and pedaloids of space curves, In preparation (2019)

[10] Y. Li and D-H. Pei, Pedal curves of frontals in the Euclidean plane, Math. Methods Appl. Sci. **41**, 1988–1997 (2018)

[11] C. Zwikker, *The Advanced Geometry of Plane Curves and Their Applications*, New York Dover, 1963