

実験数学を Jupyter Notebook でやってみる

群馬大学・総合情報メディアセンター 横山 重俊

Shigetoshi Yokoyama, Library and Information Technology Center, Gunma University

群馬大学・総合情報メディアセンター 浜元 信州

Nobukuni Hamamoto, Library and Information Technology Center, Gunma University

ライフマティックス株式会社 長久 勝

Masaru Nagaku, Lifematics

国立情報学研究所 政谷 好伸

Yoshinobu Masatani, National Institute of Informatics

国立情報学研究所 合田 憲人

Kento Aida, National Institute of Informatics

1 はじめに

数学教育，数理科学教育においてアクティブラーニング事例は数多く存在するけれど，アクティブラーニングという言葉が使われる以前から，同様の趣旨で学生の自主的な学修意欲を促す方法は様々に提案されている．筆者らが注目して来たのは，山本芳彦先生の提唱された実験数学という方法である [1]．この実験数学についての適用事例は，近年クラウドコンピューティングをはじめとする情報基盤の普及とともに，さらに広がりを見せている [2, 3, 4, 5, 6, 7]．

群馬大学はアクティブラーニングを導入することを，教育ポリシーに「アクティブラーニング等の学生の自主的な学修意欲を促す教育，授業時間外自己学修や学修の振り返りを促す教育等を幅広く行う．」として唱っている．例えば，全学部を対象に初年時の「学びのリテラシー」という枠組みで，特にその導入を強く求めている．ただ，具体的な実施方法については各講師に委ねられている，という現状がある．

一方，データサイエンス教育やプログラミング教育を主なターゲットとして UC Berkeley を中心に開発がなされて，その活用が進んでいる Jupyter Notebook [8] という対話型の計算機利用環境がある．

筆者らは実験数学の実行環境として，国立情報学研究所が中心となって開発が進んでいる CoursewareHub [10, 11] と呼ばれる Jupyter Notebook 実行基盤を活用して計算機実験による教育実践を行なって来た [12, 13, 14, 15]．CoursewareHub は Jupyter Notebook 実行基盤の一つであるオープンソースプロダクト JupyterHub [9] をベースとして，教育環境での利用に特化した機能拡張がなされたものである．

本稿では，群馬大学で実施されている二つの講義「コンピュータネットワークとセキュリティ」，「セキュリティ特論」の中で，暗号技術の基礎を学ぶアクティブラーニングの取り組み内容について報告する．特に，我々が定めた実験数学の枠組みに沿った形で，実習的実験より始め，発見的実験，検証的実験という各段階を経由して定理の証明に至る部分に焦点をあて，具体例で報告する．

2 背景

本章では、前半自主的な活動を促進する枠組みとしての実験数学について現在までの動きを述べる。後半は実行基盤として我々が選択している Jupyter Notebook についての現状を説明する。このような実験数学の枠組みを具体化する取り組みを進めることによって、実験数学という枠組みで、教材の流通を進めるための基礎が出来上がると考えている。また、その教材を実行する基盤についても遍在化させる工夫をすることで、実験数学の枠組みに沿った教材の開発・実践方法論と相まって、さらにコミュニティ全体での教材やその活用リテラシーの共有が進むことを期待している。

2.1 実験数学

計算機環境が一般化し身近なものとなることで、様々な学問分野においてそれを活用した取り組みが浸透し、経験科学、理論科学に継ぐ第3のパラダイムとして計算科学、そして第4のパラダイムであるデータセントリック科学の台頭が現実のものとなって来た。

数学分野も特に例外ではなく、数学研究および数学教育においてのデータセントリック科学に相当する実験数学の意味が益々重要になって来ている。

以下に我々の道標とした実験数学についての考え方を示した、2000年に発刊された「実験数学入門 [1]」冒頭の実験数学に関する説明文を引用させていただく。

“物理学に、物理学実験と実験物理学の使い分けがあるように、数学の実験にも、「数学実験」と「実験数学」が考えられます。2つの間に明確な区別があるわけではありませんが、次のように考えると分かりやすいのではないのでしょうか。

数学実験：的確な実験により、知識、技術を修得し、密着させる。

実験数学：多くの実験を通して、新しい知見を得る。

実験数学は、本来、数学の研究を行うときに利用される技術ですが、その特徴を図1のように考えると、単に数学研究の技術としてではなく、数学の学習の方法として有効であることがわかります。

実際に、多くの人々が、知らず知らずのうちに、実験数学方法により数学を学習し、理解して、数学という学問のすばらしい体験をしてきています。数学教育の現場においては、「例」「例題」や「演習問題」の一部が数学実験に当たると考えることができます。

また教科書などで、例えば、各テーマの導入の後の「問」として「いろいろな場合について調べてみよう」などが実験数学に当たる部分となります。このような問いに対して「自分で考えて、自分なりに納得する」ことでこの

数学実験	実験数学
実例により理解を深める こんな現象がある 実証的 数学を理解する 結果を明白に表現する	実例から予想し、証明を求める 新しい現象を見つける 発見的 数学にする、数学を作る よりよい表現を模索する

図 1: 数学実験と実験数学 ([1] より引用)

「自分で考える数学」を実現するためにそのような方法があるかということ
をテーマとして大学における「実験数学」の講義を試みました。”

この書籍で注目されるようになった実験数学という取り組みについて、2011年に発行された「実験・発見・数学体験」[6]は、数多くの実験数学例を使い、実験数学に関する噛み砕いた説明を分かりやすく展開している。この書籍での実験数学例は、整数論に主に題材を取ることで、特に計算機などの支援を得なくても手計算で体験できるものとなっている。

本稿で述べる実践例や今後の取り組みの方向性は、これらの先達の取り組みに沿った実験数学を、今後、研究、教育の場で遍在化する気配のある Jupyter Notebook 環境で実践するというものである。

2.2 Jupyter Notebook

Jupyter Notebook は、データサイエンス教育やプログラミング教育の教材として広く使われている。例えば、Project Jupyter が英語圏における Jupyter Notebook を使った教材に関するさまざまな取り組みをまとめた「A gallery of interesting Jupyter Notebooks」[16]がある。また、Jupyter Notebook 実行環境の教育・研究での活用を行なっている事例は数多く存在する [17, 18, 19]。

これらの事例の多くはデータサイエンス教育やプログラミング教育に関するものであるけれど、それらの基礎になる数学、統計学、情報学への適用も進みつつある。Jupyter Notebook の教育・研究への適用を組織的に行っている実践事例は数多く存在するが、教育への大規模な適用例としては以下の二例が代表的である。

2.2.1 Data8 [20]

UC Berkeley Data8: Foundation of Data Science コースは、経済データ、文書コレクション、地理データ、ソーシャルネットワークなど、現実のデータセットを実際に分析しながら、コンピュータプログラミングと統計的推論における重要な概念とスキルを学ぶ。教科書と課題を含むコースのためのすべての材料は、Creative Commons ライセンスの下、無料でオンライン利用可能である。さらに受講生が自分の Jupyter Notebook を編集して実行するための環境が提供されている。これは、コース用に特別に設計された Kubernetes ベースの JupyterHub と、課題を受講生の環境にロードする課題サーバから構成されている。

2.2.2 Syzygy [21]

PIMS(The Pacific Institute for the Mathematical Sciences) は Compute Canada および Cybera と協力して、研究者と教育者をサポートするために JupyterHub プラットフォーム プロジェクト Syzygy を立ち上げた。Syzygy は、既存の大学・研究機関の認証

情報を使用してクラウドでホストされ、Jupyter Notebook 実行環境へのアクセスを提供し、データサイエンスのスキル開発を促進している。

Data8, Syzygy を代表とする JupyterHub をそれらの基盤とするプロジェクトでは、Jupyter Notebook 環境をマルチユーザ化するという JupyterHub の汎用的な機能を活用して、それに Githubなどを課題提供用に利用するハイブリッドなシステム構成になっている。

3 課題

Jupyter Notebook を教育に活用する場合、前章で紹介した取り組みのように大規模な実践が始まっている。さらには、教育に特化した Jupyter Notebook 実行環境の開発も進んで来ている [11]。

また大阪大学のように、実験数学を数学科内の講義として提供している事例 [22] はあるけれど、数学科以外の受講生へ実験数学という形で講義・演習環境を提供している事例が無い。実験数学の枠組みを様々な講義に取り組む場合、その前提となる枠組みについてまだその共有化が進んでいないし、実際その枠組みに沿った教材事例も蓄積されていない。このため、数学科以外の受講生に対して実験数学の有効性を示すことができれば、さらに実験数学の適用範囲を広げることができ、アクティブラーニングの一形態として定着する可能性があると考えられる。

4 アプローチ

4.1 講義と演習をつなぐ実験数学

対面講義および e-learning 講義へのエンゲージメントやそれぞれの講義内容の理解の深度化のために、個人演習やグループ演習が効果的であると言われている。ただ、それらの演習までの移行へは、各自がそれぞれの力でハードルを越えて行くことが求められる。

本研究では、このハードルを下げ講義から演習へのスムーズな展開のために、講義と演習の間の架け橋となる媒体を用意する。

今回、その媒体として想定したのは実験数学環境である。具体的には実験数学環境には、図 2 に示すような架け橋としての役割を期待しており、講義と演習の間にあるギャップを埋める役割を果たすように設計する。

この実験数学環境を受講生毎に用意することで、他の受講生とは独立に、他への影響や他からの影響を気にすることなく、伸び伸びと実験に興じることができ

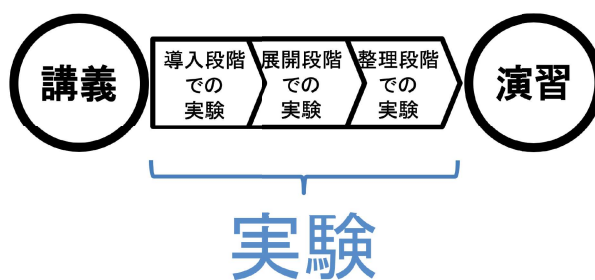


図 2: 講義・演習における実験の位置付け

ることを目指すことができる。具体的には、ギャップを小さくする目的で、対話性が高く、メディアとして馴染み易いと期待できるノートブック形式を選択し、ノートブック上で様々な実験ができる環境を、今回研究対象となる講義・演習環境とする。ノートブック形式としては第2章の背景に述べたように、最近活用が進んできている Jupyter Notebook を採用した。

この Jupyter Notebook 環境を活用することで、使い勝手の良い実験数学環境が作れる、という仮説を持って教育実践している。授業の流れの中での実験を以下のように三段階に位置付ける。以下に実験の位置付けについて我々が参考にしている「何のために実験するのか（授業における実験のあり方）[23]」より一部引用する。

“(1) 導入段階での実験

この段階では講義の内容に則した演示実験を行うことで受講生全体に共通の問題意識を持ってもらう。さらには次の展開段階での実験の模範となる必要もあり、講師が行う演示実験と同一の内容を同一のノートブックを用いて各受講生が追実験する体験を持つ時間を取ることも肝要である。

(2) 展開段階での実験

この段階の中には次の3つの実験がある。

実習的実験（訓練的実験）：講師の演示実験の追実験を含み以降の実験が実施できるための訓練的な内容を持つ実験である。

発見的実験（探検的実験）：漠然とした予想のもとに実験し、結果を整理し、考察する。

検証的実験：問題を把握し、それに対する予想し、それを検証するための実験を行う。

(3) 整理段階での実験

この段階の中には次の3つの実験がある。

学習結果を整理するための実験，学習を定着させるための実験，発展的意欲をもたせる実験”

これらのそれぞれの段階に沿った的確な実験を、受講生に実行してもらうことを継続的に行うことで、受講者のエンゲージメントを向上できる可能性がある。展開段階の実験あるいは整理段階の実験をさらに発展させることで、個人演習やグループ演習への導入とすることができると考えられるし、さらにはそれぞれの演習のアウトプットを Jupyter Notebook 形式で行うことで受講生間、あるいはグループ間の成果共有を促進することも狙える。

講義内で行う実験は図2に示す段階を意識して実施する。

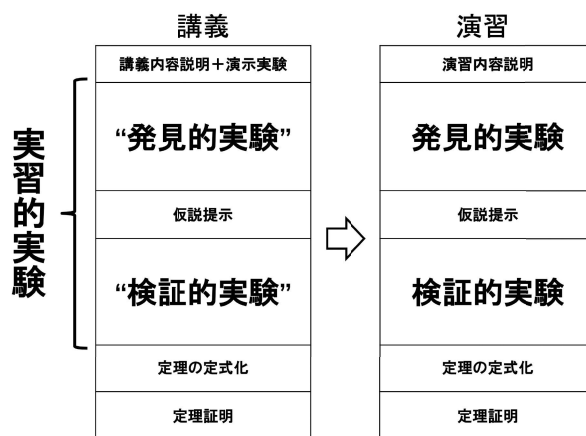


図 3: 想定する実験数学の枠組み

実習的実験：講師の演示実験の追実験を含む訓練的な内容を持つ実験

発見的実験：漠然とした予想のもとに実験し、結果を整理し、考察する実験

検証的実験：問題を把握し、それに対する予想し、それを検証するための実験

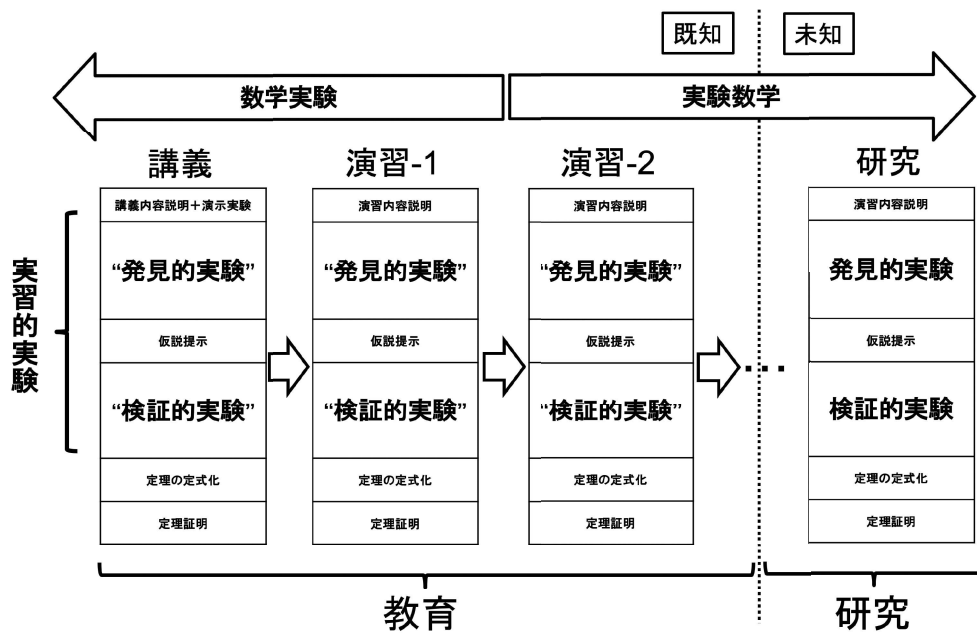


図 4: 実験数学の枠組み (俯瞰)

具体的な取り組みとしては、図 2 を詳細化した図 3 の枠組みを利用する。

講義の中で講師による該当主題の説明とそれに対応する演示実験を行なったのち、受講生による、演示実験を繰り返す形での実習的実験を実施する。この実習的実験は模擬的な発見的実験により帰納的観察を行うことで、仮説を提示してもらう。その後、提示された仮説に沿った模擬的な検証実験を実施し、その仮説の確からしさを観察する体験を持つ。その結果を仮説を定理として定式化してもらい、最終的に定理証明を行う。

次のステップとして、講義で扱った主題を発展させる形で演習問題を提示し、受講生主体で発見的実験を実施し、仮説提示、検証的実験、定理の定式化、定理証明までを体験する。今回、これを実験数学の枠組みとして提案する。

さらに教育から研究までの広い範囲を同様の枠組みで俯瞰すると図 4 の全体像となる。これは [6] に述べられている、以下の手順を繰り返し実施することにもあたる。

- “ (1) 受講生がよく知っていることから話を始める。
- (2) 講義の途中で、受講生が自ら計算できる材料を用意する。
- (3) 受講生がよく知っていることのすぐそばに、今までは知らなかった面白いものがあることを体験できる。”

4.2 実験数学の数学、統計学や情報などへの広範囲適用

元々 Jupyter Notebook 環境はデータサイエンス教育とプログラミング教育を主なターゲットとして開発運用されているため、これら分野のノートブック教材はすでに多数開発が続けられている。今回の実験を講義と演習の架け橋とするという発想を明確に意識し、前述の各段階の実験内容を加味したものにカスタマイズさせることで、データサイエンス教育とプログラミング教育以外の分野である数学教育、情報教育などの講義演習環境

およびその上で利用できるノートブック開発の考え方に共通性を持たせることを目指す。このことを通じてこれら教育分野間の親和性を達成でき、さらにもっと広範囲な適用領域を探れると考えている [12, 13, 14].

5 実践

5.1 群馬大学で実施する実験数学対象講義

群馬大学で筆者ら自身が関係する実験数学実践講義は以下の二講義である。それぞれの講義内容を簡単に説明する。

(1) コンピュータネットワークとセキュリティ (学部)

コンピュータネットワークやセキュリティ技術がどのように動作するのかを具体例を使って実験して学ぶ。具体的にはコンピュータネットワーク概要, オペレーティングシステム, ネットワーク機能, セキュリティ機能, インターネットの全体像, LAN の基本技術, WAN の基本技術, ルーティング, DNS, 電子メール, Web サービス, 暗号技術, セキュアネットワーク, クラウドコンピューティング, コンピュータネットワークとセキュリティの今後, について紹介する。

(2) セキュリティ特論 (大学院)

暗号の背景となる代数学, 数論の基礎理論から, 暗号の応用に至るこれらの技術を学ぶ。さらに事例研究と演習を通じてそれらを実践的に習得する。具体的には以下の項目を実施する。インターネットセキュリティ概説 (インターネット上の脅威/インターネットセキュリティ実現に向けて), 暗号化技術 (共有鍵暗号/公開鍵暗号/暗号解読), 認証技術 (電子認証の種類/認証レベル), 認証機関 (認証機関の役割/認証機関の構成と仕組み/認証機関のコンポーネント), セキュア通信 (暗号系プロトコル/VPN/セキュア HTTP/VLAN/Firewall), 事例研究と演習。

5.2 実験数学実践

5.2.1 コンピュータネットワークとセキュリティ (学部)

この講義の中でセキュリティの根幹に位置する技術として暗号技術について時間を取って解説し, さらに各種実験を Jupyter Notebook 環境を用いて実施している。この際, 第4章のアプローチに書いた通り各段階の実験を意識して授業を組み立てることで受講生の参加性を向上させることを試みている。

以下, 暗号技術に関する講義と Jupyter Notebook 環境を用いた実験の実践について報告する。

暗号技術に関する講義の内容は以下の4節よりなる。(1) 暗号の基本, (2) 対称鍵暗号系, (3) 鍵共有法と公開鍵暗号への導入, (4) 公開鍵暗号

講義の中では後半の鍵共有法や公開鍵暗号の理解のために, フェルマーの小定理, オイラーの定理やユークリッドの互除法など初等整数論の片鱗にも触れる。Jupyter Notebook

講義側の演習実験と実習の実験では、オイラーの定理の特別な場合であるフェルマーの小定理についての実験を行う。

それを基礎として、演習側ではオイラーの定理のうち RSA 暗号の説明に必要な一対素数の積の場合について、受講生主体で発見的実験と検証の実験を実施する。一般の場合のオイラーの定理については、その定式化について紹介するにとめても、今回の主題については十分であると考えている。もちろん、必要に応じて、さらなる演習素材として発展させることもできる。

図3に示した想定する実験数学の枠組みに、今回の題材「フェルマーの小定理」と「オイラーの定理」を当てはめた講義から演習への展開例を図8に示す。

実際の講義で使用した Jupyter Notebook を以下に示す。

図9はフェルマーの小定理に関する発見的実験を行うための部分を示している。

この中で変数 n の値を様々な素数に変化させてセルを実行し計算結果の表を眺めることで、仮説を提示できるまで帰納的観察を続けてもらうことを期待している。

当然、変数 n に素数以外の値を入れて素数の場合との違いを観察する受講生が出てくることも想定している。

次にフェルマーの小定理に関する発見的実験後に検証の実験を実施してもらうために図10の Jupyter Notebook を用意した。

図10はフェルマーの小定理に関する検証の実験を行うための部分を示している。この中で変数リスト n -list に検証したいだけの素数列を記入し、セルを実行することで一挙にそれらの素数に関する計算結果が得られ、提示した仮説を検証できる。

この Jupyter Notebook を利用して受講生は自分の指定した整数 n についてフェルマーの小定理の成立する場合と成立し

講義(フェルマーの小定理)

講義内容説明+演習実験
nが素数pの場合 $a^x \pmod n$の計算
仮説提示 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$
nが素数pの場合 $a^x \pmod n$の計算 を大量に実施
定理の定式化 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$
定理証明

演習(オイラーの定理)

演習内容説明
nが素数積pqの場合 $a^x \pmod n$の計算
仮説提示 $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \pmod pq$
nが素数積pqの場合 $a^x \pmod n$の計算 を大量に実施
定理の定式化 $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \pmod pq$
定理証明



図8: 講義から演習への展開例

```

法をnとすべき要について計算実験してみましょう！
法をnを素数にした場合とそうでない場合について何か大きな違いがわかりますか？

In [1]: n = 17
data=np.zeros((n-1,n-1))
for i in range(1,n):
    for j in range(1,n):
        data[i-1][j-1] = int((i**j) % n)
df = pd.DataFrame(data, dtype='int')
df = df.rename(columns=lambda s: 'a'+str(s+1), index=lambda s: 'a'+str(s+1))
df

Out[1]:
a**1 a**2 a**3 a**4 a**5 a**6 a**7 a**8 a**9 a**10 a**11 a**12 a**13 a**14 a**15 a**16
a=1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1
a=2  2  4  8  16 15 13 9  1  2  4  8  16 15 13 9  1
a=3  3  9  10 13  5 15 11 16 14 8  7  4 12  2  6  1
a=4  4 16 13  1  4 16 13  1  4 16 13  1  4 16 13  1
a=5  5  8  6 13 14  2 10 16 12 9 11  4  3 15  7  1
a=6  6  2 12  4  7  8 14 16 11 15  5 13 10  9  3  1
a=7  7 15  3  4 11  9 12 16 10  2 14 13  6  8  5  1
a=8  8 13  2 16  9  4 15  1  8 13  2 16  9  4 15  1
a=9  9 13 15 16  8  4  2  1  9 13 15 16  8  4  2  1
a=10 10 15 14  4  6  9  5 16  7  2  3 13 11  8 12  1
a=11 11  2  5  4 10  8  3 16  6 15 12 13  7  9 14  1
a=12 12  8 11 13  3  2  7 16  5  9  6  4 14 15 10  1
a=13 13 16  4  1 13 16  4  1 13 16  4  1 13 16  4  1
a=14 14  9  7 13 12 15  6 16  3  8 10  4  5  2 11  1
a=15 15  4  9 16  2 13  8  1 15  4  9 16  2 13  8  1
a=16 16  1 16  1 16  1 16  1 16  1 16  1 16  1 16  1

発見した法則を教えてください。

In [ ]: ANSWER_1 = input("PROBLEM_1= 発見した法則を記入してください。")
print("ANSWER_1 ==", ANSWER_1)

```

図9: フェルマーの小定理の発見的実験

```

発見した法則について計算実験で検証してみましょう！
法則は正しい立っていますか？

In [12]: n_list=[3,5,7,11,13,17,19,23,29] # primes

In [13]: pd.set_option("display.max_columns", 70)
pd.set_option("display.max_rows", 300)
for n in n_list:
    data=np.zeros((n-1,n-1))
    for i in range(1,n):
        for j in range(1,n):
            data[i-1][j-1] = int((i**j) % n)
    df = pd.DataFrame(data, dtype='int')
    df = df.rename(columns=lambda s: 'a'+str(s+1), index=lambda s: 'a'+str(s+1))
    df
    print('-----')
    print('mod('+str(n)+')')
    display(df)

Out[13]:
mod(19)
a**1 a**2 a**3 a**4 a**5 a**6 a**7 a**8 a**9 a**10 a**11 a**12 a**13 a**14 a**15 a**16 a**17 a**18
a=1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1
a=2  2  4  8 16 13  7 14  9 18 17 15 11  3  6 12  5 10  1
a=3  3  9  8  5 15  7  2  6 18 16 10 11 14  4 12 17 13  1
a=4  4 16  7  9 17 11  6  5  1  4 16  7  9 17 11  6  5  1
a=5  5  6 11 17  9  7 16  4  1  5  6 11 17  9  7 16  4  1
a=6  6 17  7  4  5 11  9 16  1  6 17  7  4  5 11  9 16  1
a=7  7 11  1  7 11  1  7 11  1  7 11  1  7 11  1  7 11  1
a=8  8  7 16 11  5  4  6  7 16 11  5  4  6  7 16 11  5  4
a=9  9  4 16 11  5  4  6  7 16 11  5  4  6  7 16 11  5  4
a=10 10 15 14  4  6  9  5 16  7  2  3 13 11  8 12  1
a=11 11  2  5  4 10  8  3 16  6 15 12 13  7  9 14  1
a=12 12  8 11 13  3  2  7 16  5  9  6  4 14 15 10  1
a=13 13 16  4  1 13 16  4  1 13 16  4  1 13 16  4  1
a=14 14  9  7 13 12 15  6 16  3  8 10  4  5  2 11  1
a=15 15  4  9 16  2 13  8  1 15  4  9 16  2 13  8  1
a=16 16  1 16  1 16  1 16  1 16  1 16  1 16  1 16  1
a=17 17  1 17  1 17  1 17  1 17  1 17  1 17  1 17  1
a=18 18  1 18  1 18  1 18  1 18  1 18  1 18  1 18  1

発見した法則を証明してみてください。

In [ ]: ANSWER_2 = input("PROBLEM_2= 発見した法則を証明してください。ネット上にある証明へのリンクでも結構です。")
print("ANSWER_2 ==", ANSWER_2)

```

図10: フェルマーの小定理の検証の実験

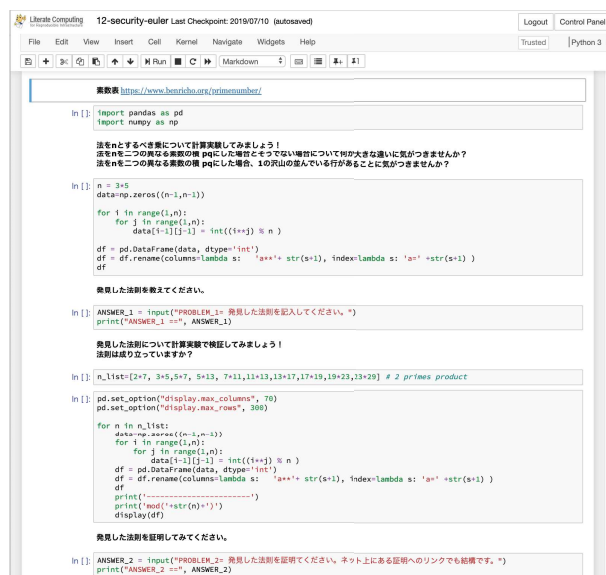
ない場合について様々な検証が行える。

授業ではこの検証的実験の後にフェルマーの小定理の証明を行う。

さらに発展形としては同じ Jupyter Notebook を使って n として二つの素数 p, q の積の形をしたものを指定して、その際に生成される計算結果表を眺めることでオイラーの定理の検証も行える。

これは授業の中で検証的実験ではなく、発見的実験として扱う進め方も可能である。なお、実際の Jupyter Notebook では、これらの実験を支援するために n を一つの値として実行するだけではなく、その n 値群自体をリストとして定義することで、自分の試したい n 値群について一気に実験できるように構成している。

図 11 はオイラーの定理に関する発見的実験と検証的実験を行うための Jupyter Notebook (実行前) を示している。この中で変数 n の値を様々な素数積に変化させてセルを実行し、計算結果表を眺めることで、仮説を提示できるまで帰納的観察を続けてもらうことを期待している。



```
import pandas as pd
import numpy as np

n = 3*5
data=np.zeros((n-1,n-1))
for i in range(1,n):
    for j in range(1,n):
        data[i-1][j-1] = int(((i+j) % n))
df = pd.DataFrame(data, dtype='int')
df = df.rename(columns={'lambda': 'a'+str(s+1), 'index': 'a'+str(s+1)})
df

ANSWER_1 = input("PROBLEM_1= 発見した法則を記入してください。")
print("ANSWER_1 =", ANSWER_1)

n_list=[2*7, 3*5*7, 5*13, 7*11, 11*13, 13*17, 17*19, 19*23, 23*29] # 2 primes product
pd.set_option("display.max_columns", 70)
pd.set_option("display.max_rows", 300)

for n in n_list:
    data=np.zeros((n-1,n-1))
    for i in range(1,n):
        for j in range(1,n):
            data[i-1][j-1] = int(((i+j) % n))
    df = pd.DataFrame(data, dtype='int')
    df = df.rename(columns={'lambda': 'a'+str(s+1), 'index': 'a'+str(s+1)})
    df
    print("-----")
    print("mod("+str(n)+")")
    display(df)

ANSWER_2 = input("PROBLEM_2= 発見した法則を証明してください。ネット上にある証明へのリンクでも結構です。")
print("ANSWER_2 =", ANSWER_2)
```

図 11: オイラーの定理に関する実験群

5.2.2 セキュリティ特論 (大学院)

大学院生向けのセキュリティ特論では、前述の学部向け講義と同様に Jupyter Notebook を用いた実験環境を使った講義・演習に加えて、講義後半、各受講生の研究テーマに関連するセキュリティ課題をターゲットとした事例研究を行った。この事例研究のアウトプットの一つの形態として課題解決のための実装を Jupyter Notebook を用いることとした。実際の課題として提案されたものは暗号通貨、情報教育でのノートブック利用、QR コード決済、アンケート分析、オンラインショップにおける国際比較などであった。

6 評価

受講生の実験実施は確実なものとして定着して来ている。少なくとも Jupyter Notebook が実授業で運用可能であることを確認した。

具体的には、学部講義においては、200 人程度の同時登録、60 人程度の同時利用においても 1 名の講師で実施可能であることは確認できた。ただし、これが当初の講義と演習の架け橋となって教育的効果につながっていることの確認まで評価が出来ないまま試行錯誤を繰り返している。

また、教育現場での各受講生の参加度は向上し、受講生間のコミュニケーションも増大していることは事実であるけれど、それらが教室全体に対する質問や提言などの形として現れる事例はまだ少ない。現状は講義時間が主体となる構成であるため、教室内の受講生がそういう活性化した状態に到達する前に講義時間が終了してしまっていることが阻害要因となっている可能性もある。このため、講義時間内の実験実施時間への配分や受講生への動機付けなどさらに教育実践における改善を進める必要がある。前述のフェルマーの小定理に関する発見的実験を行う前に「時計の世界の整数論」[24]という動画を観てもらい、さらに講師側で演示実験をした。その後、冪乗表を眺めてもらい、各自そこに現れる法則を見つけてもらう試みを実施した。講師側での誘導を伴うことで何とかフェルマーの小定理相当の仮説を導けた。

また、大学院講義においては各受講生の課題提出の形態として Jupyter Notebook が講義・演習との連結性からも十分利用可能であることを確認できた。

7 今後の進め方

本稿で提案した実験数学の枠組みに沿った教材を開発し、教育の現場で利用することで枠組み自体の改善につなげて行きたい。具体的には、今回は数論に関する実験数学であったけれど、データサイエンスへの活用を踏まえた数学分野での実験数学に根ざす教材を Jupyter Notebook として開発し普及させる。このため教材自身の共有化に加えて、その実行環境である CoursewareHub の普及もクラウド技術の適用などにより促進して行く。さらに本稿で提案した実験数学の枠組みに沿った教材を開発し、教育の現場で利用することで枠組み自体の改善につなげて行きたい。これまでの Jupyter Notebook 開発や、それを使った教育実践の際に講義時間内に実施した実験内容や実験結果のクラス内での即時の共有をいくつか試行し、実感として、架け橋となるメディアとして Jupyter Notebook 教材を発展させるための一つの方向として有望であると感じている。今後は受講生や講師が実施する実験のリアルタイムでの共有とそれに対するフィードバック活動の充実していきたい。このため、全体の進捗状況の把握や実験内容や実験結果の即時の共有ができる仕組みを発展させる。大規模授業やリモート授業にも対応できることが必要であるので、それを考慮し発展させて行きたい [13, 15]。

まとめると、以下の二点を中心に今後活動を展開して行く。

(1) 教育効果に関する評価

この種の Notebook 教材を利用した実験環境の利用を促進するためには本来の目的である教育効果についての評価結果を提示する必要があると考えている。

(2) 講義演習環境の基盤

この活動を支える CoursewareHub を中心とする講義演習環境の教育機関での利用導入へのハードルを下げるためには、上述の活動に合わせて、その基盤自身へのアクセスを容易化する必要がある。このため利用時にオンデマンドで CoursewareHub をクラウド内に簡単に構築し利用できる枠組みを提供したい。この方向で実施可能であると考えているのは、国立情報学研究所が開発する学認クラウドオンデマンド構築サービス [25] を活用した CoursewareHub 環境構築と運用である。具体的には CoursewareHub 用のアプ

リケーションテンプレートと呼ばれる実行可能な構築・運用手順書（これ自身も Jupyter Notebook 形式）を開発することを予定している。

参考文献

- [1] 山本芳彦, 実験数学入門, 岩波書店, 2000 年
- [2] 数学教育協議会, 銀林浩, 実験数学のすすめ: 課題に取り組む楽しい授業, 国土社 1993
- [3] ジミー・ドイ: シミュレーションに基づく統計的推論とアクティブ・ラーニングの授業事例, 数学科におけるデータサイエンス (1), 日本数学教育学会誌, 101(3), pp.28-39.
- [4] 原田耕平, 世紀の科学教育における実験・観察・課題研究: 数学分野から, 日本科学教育学会年会論文集 19 巻 (1995), 9-10
- [5] 清水克彦, 実験数学による創造性の育成についての検討: テクノロジーによる帰納・類比, そして推測の導入, 日本科学教育学会年会論文集 / 34 巻 (2010)
- [6] 小池正夫, 実験・発見・数学体験, 数学書房, 2011 年
- [7] 清水克彦, 目代充寿, Mathematica for Student を用いた実験数学の教材開発, 数理解析研究所講究録 第 1780 巻 2012 年 213-220
- [8] "Project Jupyter", <https://jupyter.org/>, (参照 2019-09-09)
- [9] "JupyterHub", <https://jupyter.org/hub>, (参照 2019-09-09)
- [10] "CoursewareHub", <https://github.com/NII-cloud-operation/>, (参照 2019-09-09)
- [11] 長久勝, 政谷好伸, 合田憲人. Notebook による講義・演習環境の開発. 第 27 回教育学習支援情報システム研究会 2019 年 3 月 22 日 情報処理学会
- [12] 横山重俊, 浜元信州, 政谷好伸, Jupyter Notebook を活用したアクティブラーニングへのトライアル 暗号技術教育を例に, 2019 年度 数学教育学会 夏季研究会 (関西エリア)
- [13] 横山重俊, 浜元信州, 政谷好伸, Jupyter Notebook を活用した実験数学におけるリアルタイム進捗収集ツール, 2019 年度 数学教育学会 夏季研究会 (関東エリア)
- [14] 横山重俊, 浜元信州, 政谷好伸, 合田憲人, Jupyter Notebook を活用した情報教育実践, 情報処理学会 情報教育シンポジウム SSS2019
- [15] 桑田喜隆, 石坂徹, 小川 祐紀雄, 政谷好伸, 長久勝, 横山重俊, 浜元信州, 第 24 回人工知能学会 知識流通ネットワーク研究会, 2019 年 03 月

- [16] "A gallery of interesting Jupyter Notebooks" :
<https://github.com/jupyter/jupyter/wiki/A-gallery-of-interesting-Jupyter-Notebooks> , (参照 2019-09-09)
- [17] A Gallery of JupyterHub Deployments: <https://jupyterhub.readthedocs.io/en/stable/gallery-jhub-deployments.html>, (参照 2019-09-09)
- [18] 京都大学工学部 情報基礎演習 : <https://github.com/Johokiso-enshu/textbook> , (参照 2019-09-09)
- [19] ゲノム博物学入門 : <https://github.com/CropEvol/lecture> , (参照 2019-09-09)
- [20] Data8: <http://data8.org>, (参照 2019-9-09)
- [21] Syzygy: <http://syzygy.ca>, (参照 2019-9-09)
- [22] 大阪大学 数学科紹介: <http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/mathematics02.html> , (参照 2019-09-09)
- [23] 森本雄一, なぜ生徒実験をしなければならないのか -高校における物理授業実践からの考察 <http://repository.hyogo-u.ac.jp/dspace/bitstream/10132/2599/1/YY-M07204G.pdf> (参照 2019-09-09)
- [24] 時計の世界の整数論: <http://tsujimotter.info/maths4pg/2/> , (参照 2019-9-09)
- [25] 竹房あつ子, 佐賀一繁, 丹生智也, 横山重俊, 合田憲人, 学認クラウドオンデマンド構築サービスの推進, AXIES 2018 年度年次大会