二葉双曲面を用いた実特殊線形変換群 $SL(2,\mathbb{R})$ の 3 次元モデルと, $SL(2,\mathbb{Z})$ の立方格子上のパターン

東海大学・理学部　前田　陽一
Yoichi Maeda, School of Science, Tokai University

1　はじめに

本研究では, 3 次元多様体である $SL(2,\mathbb{R})$ を 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に正射影することによって, $SL(2,\mathbb{Z})$ の元を 3 次元立方格子上の点として可視化できることを紹介する. この可視化において, 我々になじみの深い二次曲面, 二次曲線が現れる. この射影は非常に単純であるため, 群構造の可視化にも有効であると期待される. 本研究で可視化に用いるソフトウェアは, GeoGebra と Python である.

1.1　GeoGebra と Python を用いた可視化の例

図 1は, GeoGebra と Python を用いた可視化の例である. $SL(2,\mathbb{Z})$ の対称行列が単位円盤上で, 単位行列を中心にして双曲的パターンを形成していることがわかる (わかりやすいように, 測地線が描き加えられている).
この図が, Python と GeoGebra を用いて, どのように作成されるかを説明しよう.
$SL(2,\mathbb{R})$ のうち, トレースが正の対称行列の集合を Sym^+ とする. 写像 $\pi_1 : Sym^+ \to \mathbb{R}^2$ を

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{(a-d, 2b)}{a+d+2} \tag{1}$$

で定義する. この写像は, 次のようにして得られる. $SL(2,\mathbb{R})$ は 3 次元球面へ埋め込みことができ, 3 次元球面は立体射影により, 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に展開できる ([2], [4]). これにより, $SL(2,\mathbb{R})$ の元が, $\mathbb{R}^3$ 内の点に対応する. さらに, $SL(2,\mathbb{R})$ を対称行列に制限すると, 対称行列は平面上に存在する ([5]). それが, 式 (1) で定義される写像 π_1 である.
本研究では, まず, Python を用いてデータを作成しておき, そのデータを GeoGebra で可視化する. 図 1の作成手順は, 以下のとおりである.

1. Python を用いて, 付録 A にあるプログラムで $SL(2,\mathbb{Z})$ の元に対応する点の座標を計算し, データを CSV ファイルに出力する.

2. GeoGebra を起動させ, 表示メニューで「表計算・統計」を選び, 表計算ビューを表示させる.

3. 表計算ビューに, 2 次元データを CSV ファイルからコピー・ペーストする.

4. 表計算ビューの 2 次元データの範囲をドラッグして決めておき,「点のリストの作成」ツールをクリックする.

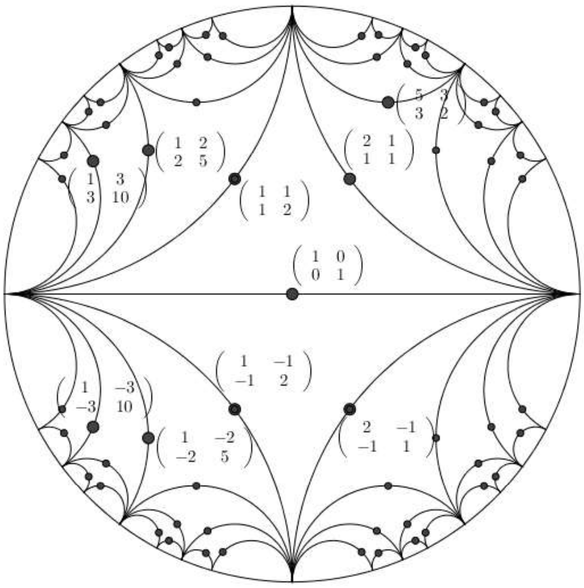

図 1: $SL(2,\mathbb{Z})$ の対称行列のポアンカレモデル.

本研究で取り扱う正射影モデルも同様の手順でできる. 3 次元の図形を表示させるため, あらかじめ表示メニューで「空間図形」を選んでおけばよい. .

2　正射影モデル

3次元球面に埋め込み, それを立体射影でユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に展開する可視化は, 全体像が把握できる点が長所であるが, $SL(2,\mathbb{Z})$ のバターンの把握が難しいという点が短所である. 本研究で取り扱う正射影モデル（$\mathbb{R}^3$ モデル）は, より単純な写像 $\pi_2 : SL(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a-d, b+c, -b+c)$$

で定義される. 図 2は, 正射影モデルの中で点在する $SL(2,\mathbb{Z})$ がなすパターンである. ある二葉双曲面に挟まれた領域に $SL(2,\mathbb{R})$ が存在していることがわかる.

この正射影モデルの特徴は, 以下のとおりである.

1. $SL(2,\mathbb{Z})$ が立方格子上に存在する.

2. 成分が一定の曲面が, すべて 2 次曲面である (図 3は d の値が 1 の曲面で, 双曲放物面である).

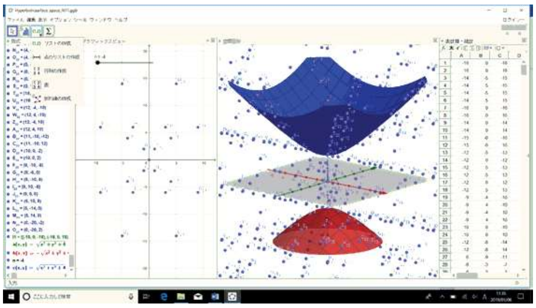

図 2: $SL(2,\mathbb{Z})$ が形成するパターン

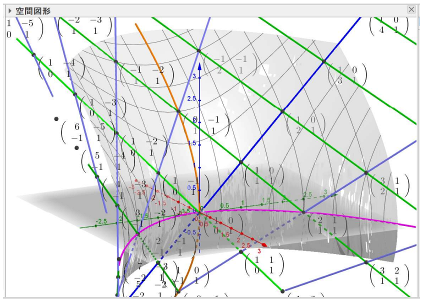

図 3: ”$d=1$” 曲面

3. Borel 部分群が, 原点を通る平面である (平面上で, 部分群の群構造を見ることができる).

4. 指数写像の像が, 原点を通る直線である.

5. 左 (右) 移動の軌道が, すべて 2 次曲線である.

6. 写像が 2 対 1 なので, 全体像を把握しにくい.

簡単のため, 以下では $a+d \geq 0$ に制限し, 写像を 1 対 1 としておく.

2.1 トレース一定曲面

$$(x,y,z) = (a-d, b+c, -b+c) \tag{2}$$

とする. 行列式 $ad-bc=1$ に注意すると,

$$x^2+y^2-z^2+4 = (a+d)^2 \geq 0,$$

となり, $SL(2,\mathbb{R})$ が二葉双曲面 $z^2 = x^2+y^2+4$ の二葉の双曲面に挟まれた領域に含まれていることがわかる. この境界曲面がトレースの値が 0 の曲面である. トレースの値によって, トレース一定曲面は, 次のように変化する.

$$\begin{cases} \text{二葉双曲面} & \text{if} \quad 0 < a+d < 2 \\ \text{二重円錐} & \text{if} \quad a+d = 2 \\ \text{一葉双曲面} & \text{if} \quad a+d > 2. \end{cases}$$

2.2 成分一定曲面

“b 一定曲面”, “c 一定曲面” は, それぞれ $y-z=2b$, $y+z=2c$ という平面となる. 特に, $c=0$ の場合, $y+z=0$ という平面は, 上三角行列からなる Borel 部分群に対応している. これは, この部分群の群構造が平面上で可視化できることを示している.

一方, “a 一定曲面”, “d 一定曲面” は双曲放物面となる. 実際, 式 (2) と $ad-bc=1$ から b,c,d を消去すると,

$$4ax = -y^2 + z^2 + 4a^2 - 4 \quad (x \leq 2a),$$

が “a 一定曲面” となる. 定義域は, $a+d \geq 0$ から導かれる.
図 3は, $d=1$ の曲面 $4x = y^2 - z^2$ である. 一般に, “d 一定曲面” は行列の積

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix},$$

で不変な曲面であり, これらの移動は, 後で見るように直線的な移動に相当する. このことは, 成分一定曲面が二重線織面であることと符合している.

2.3 指数写像の像

リー環 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の元は 3 種類 (時間的, 光的, 空間的) あるが, 指数写像の像は, すべて原点を通る直線として得られる. リー環 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の元を次の X で考えよう.

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta-\gamma \\ \beta+\gamma & -\alpha \end{pmatrix}.$$

$X^2 = (\det X)I_2$ であるので, $\det X = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2$ の符号に応じて, 3 種類の場合がある. 正規化することにより, $\det X = -1, 0, +1$ としておく. このとき指数写像は,

$$e^{tX} = C(t)I_2 + S(t)X, \quad 但し, \quad (C(t), S(t)) = \begin{cases} (\cos t, \sin t) & \text{if } \det X = -1 \\ (1, t) & \text{if } \det X = 0 \\ (\cosh t, \sinh t) & \text{if } \det X = +1 \end{cases}$$

で与えられる. よって, $\pi_2(e^{tX}) = 2S(t)(\alpha,\beta,\gamma)$ となり, 指数写像の像はいずれの場合も方向ベクトルが (α,β,γ) であるユークリッド直線として現れる.

2.4 移動によるフロー

前節の指数写像を用いると, 移動によるフローを可視化することができる. 以下では, 左移動について述べる (右移動も同様である). 前節で用いたリー環の元 X と, 三角関数, 双曲関数などをまとめた関数 $C(t), S(t)$ を用いると,

$$\begin{aligned} e^{tX}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= (C(t)I_2 + S(t)X)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= C(t)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + S(t)\begin{pmatrix} a\alpha + c(\beta-\gamma) & b\alpha + d(\beta-\gamma) \\ a(\beta+\gamma) - c\alpha & b(\beta+\gamma) - d\alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって, 式 (2) より,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-d & (a+d)\alpha + (-b+c)\beta - (b+c)\gamma \\ b+c & (b-c)\alpha + (a+d)\beta + (a-d)\gamma \\ -b+c & -(b+c)\alpha + (a-d)\beta + (a+d)\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(t) \\ S(t) \end{pmatrix}$$

となる. X が光的である場合は, フローはすべて直線となる. X が時間的 (空間的) である場合は, フローは楕円 (双曲線) となる. 図 4,5は, それぞれ, $SO(2)$ と対角行列による左移動のフローを可視化したものである どのフローも原点を通る平面上にあるという特徴を持っている.

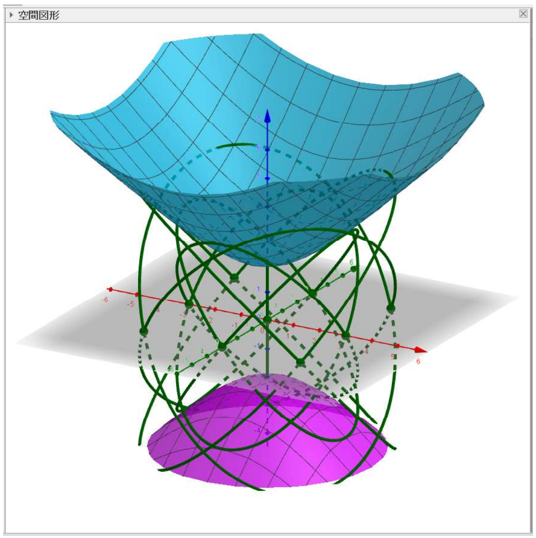

図 4: 回転行列による左移動のフロー

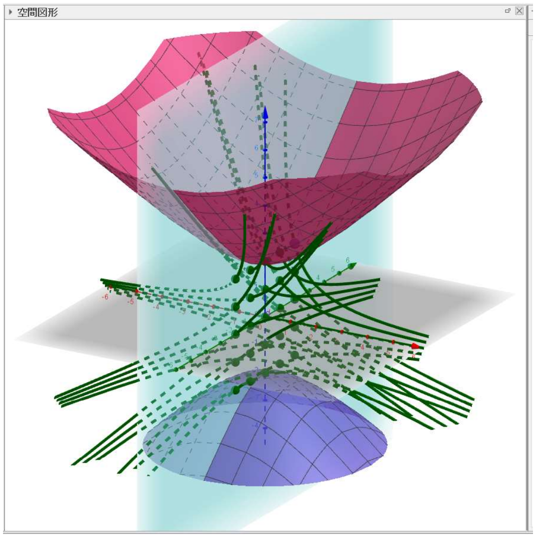

図 5: 対角行列による左移動のフロー

これらのフローを GeoGebra で描かせるためには, Sequence コマンドと Curve コマンドを使う. 図 4の作図では,

$Sequence(Sequence(Curve(3icos(s){-}3jsin(s), 3jcos(s){+}3isin(s), sqrt(9i{+}9j{+}4)sin(s), s, 0, 2\ \pi\ ), i, -1, 1), j, -1, 1)$

と入力バーに入力して描画できる.

A 付録: python のプログラム

以下では, python のソースプログラムを紹介する.

```
import csv

with open('SL2Z_data.csv','w',newline="") as f: #ファイルを開く
    writer = csv.writer(f)
    N=30
```

```
    for a in range(-N,N+1):
        for b in range(-N,N+1):
            for d in range(-N,N+1):
                if (a*d-b*b)==1 and a+d>0:
                    x=(a-d)/(a+d+2)
                    y=2*b/(a+d+2)
                    writer.writerow([x,y])

f.close()                                               #ファイルを閉じる
```

参考文献

[1] 前田陽一：「動的幾何学ソフトウェアによる実特殊線形変換群 SL(2,R) の 3 次元モデル」, 数理解析研究所講究録 **1951**, (2015), 49–53.

[2] Maeda, Y. : *Active Learning with Dynamic Geometry Software*. ICCSA 2017, Part IV, LNCS **10407**, (2017), 228–239.

[3] 前田陽一：「実特殊線形変換群 $SL(2,\mathbb{R})$ の 3 次元モデルと部分群の可視化」, 数理解析研究所講究録 **2067**, (2018), 74–84.

[4] Maeda, Y. : *Embedding of Real Special Linear Group $SL(2,\mathbb{R})$ into the Three-dimensional Sphere and a Hyperbolic Pattern of Symmetric Matrices of $SL(2,\mathbb{Z})$*. Proceedings of the Sixth TKU-KMITL Joint Symposium on Mathematics and Applied Mathematics (MAM2018), (2018), 71–76. http://data.sm.u-tokai.ac.jp/mam2018/wp-content/uploads/2018/06/Proceeding_MAM2018.pdf

[5] 前田陽一：「実特殊線形変換群 $SL(2,\mathbb{R})$ の 3 次元球面への埋め込みと, $SL(2,\mathbb{Z})$ の対称行列が形作る双曲的パターン」, 数理解析研究所講究録 **2105**, (2019), 174–180.