PointLine Hyperbolic: 作図手順を排除した双曲幾何作図ツール
PointLine Hyperbolic: Construction Tool of Hyperbolic Geometry without Construction Procedure

明治大学・総合数理学部　阿原　一志
Kazushi Ahara, Faculty of Interdisciplinary Mathematical Sciences, Meiji University

1　はじめにーPointLineの由来

PointLine は明治大学阿原研究室で開発している教育用の作図ソフトウエアの総称である。これまで、ユークリッド幾何の作図のための PointLine[1] と双曲幾何（ポアンカレディスクモデル）の作図のための PointLine Hyperbolic[2] が開発・公開されている。本稿では、PointLine Hyperbolic の仕様と本ソフトウエアの応用について論ずる。

筆者は、Cinderella や GeoGebra などの動的幾何学ソフトウエアを用いた数学教材開発について研究を進めているが、その過程において動的幾何学ソフトウエアのもつ共通の仕様に疑問を持つようになった。すなわち、現状の動的幾何学ソフトウエアはすべて「作図手順がわからないと図が作れない」という仕組みになっているのである。このことを動機として「作図手順がわからずとも図を作ることができる」ような作図ツールの開発を開始した。最初はユークリッド平面の上に作図ツールを実装し、PointLine と名付けて公開した [1] 。このソフトウエアについて昨年の共同研究「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究 (2018)」において報告した [3]。のちに、双曲幾何学の作図ツールも同じアーキテクチャで構築できるかどうかを検証するために、ポアンカレディスクモデルの双曲幾何学用の PointLine を開発することにした。それが PointLine Hyperbolic である。

この活動を通して、PointLine のアイディアをほかの場面に応用する可能性について考察してみたところ、以下の 3 つのシステムの可能性が上がってきた。一つは、楕円幾何学の作図ツール PointLine Spherical(仮題)、二つ目は、HMD(ヘッドマウントディスプレイ) を用いたバーチャル空間内で PointLine を動かすシステム PointLine 3D(仮題)、三つめはポアンカレ上半空間モデルの 3 次元双曲空間で PointLine を動かすシステム PointLine Hyperbolic 3D(仮題) である。これらのシステムに共通するアーキテクチャは、作図手順にこだわらずに図を構築できるという仕様であり、具体的な構想と実装はこれから行う予定である。

2　作図手順がないことのメリット

PointLine 開発のそもそもの動機は数学教育（特に幾何学教育）における ICT 利用にあった。動的幾何学ソフトウエアは、教師（授業者）が動的な教材を作るために有用で

あることは言うまでもないが、それと同時にICT利用教育の観点からすると学習者が試行錯誤をするためのツールでもあるべきである。動的幾何学ソフトウエアにおける作図手順とは、基本的には「コンパスと定規による作図」をベースとしており、「垂線」「平行線」「中点」「円の接線」などの作図ツールたちを適切な順序で並べたものである。現在の動的幾何学ソフトウエアでは発展的に「2次曲線」「軌跡」「包絡線」などの通常の意味での作図では得られない作図ツールも使えるようになっていることを付言しておく。

しかるに「作図の初心者が何かを適当に描いてみる」ことは意外にたやすくない。素朴な例として三角形を描いた後に内接円を描くことを思い浮かべよう。もし、初学者が「三角形の内角の二等分線の交わりが内心である」ことを知らなかったとしたら、その学習者が現在ある動的幾何学ソフトウエアを用いて自力で内接円を描くことはまず不可能ではないだろうか。このたとえ話はどのように解釈されるべきだろうか?「内接円の作図法を知らない学習者は動的幾何ソフトウエアを使えない」という結論でよいだろうか。

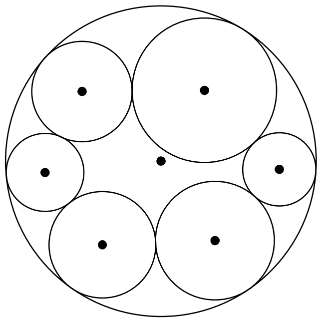

図1：動的幾何学ソフトでどのように作図するか?

もう一つ別のたとえ話をしよう。図1は著者が友人の高校教員から個人的に相談された作図の案件であるが、このようなものを動的幾何学ソフトウエアでどのような作ればよいだろうか？意外と難しいのではないだろうか。これらのたとえ話から容易に想像できるように、現在の動的幾何学ソフトウエアの仕様では、図のつくり方がわからないことが作図の障害になってしまっているのである。

そこで筆者は、(作図手順によらず) 幾何の構成要素の相互関係を指定することにより作図できることがICTの教育利用に重要な役割を果たすことを確信し、まずユークリッド幾何学においてその開発に着手した。たとえば図1であれば、図2のように（ややランダムに）大きな円を一つと小さな円を六つ描き、そののちに「円と円とを接させる」という関係づけをすることにより図1と同じ絵が得られるような仕組みを構築したのである。

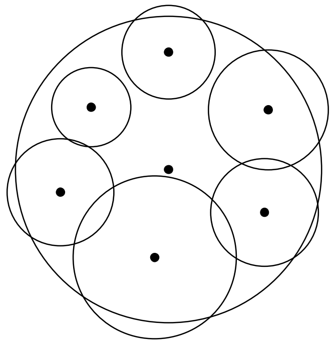

図２：7 つの円を描き、関係づけにより図 1 を得る

PointLine では「中点」「2 点を同じ点にする」「点を直線の上に載せる」「点を円の上に載せる」「２線分を等長にする」「2 線分を直交させる」「円と直線を接させる」「円と円とを接させる」というモジュールが準備されているが、これらを**基本モジュール**と呼ぶことにして、点・線分・円に対して、基本モジュールによる関係づけが自由に行えるようなシステムを提供した。

3　双曲幾何学版にむけて

ポアンカレモデルをネイティブとする作図ツールは珍しい（シンデレラにはそのようなモードがあるが、ほかの作図ツールでは極めて珍しい。）そもそも双曲幾何学には「コンパスと定規」的な作図の枠組みがないこともあり、ユークリッド平面上の作図によりポアンカレモデルなどのモデル上の幾何学を実現するのが通例である。しかし、「2 点を通る双曲直線」「1 点を通り、1 双曲直線に直交するような双曲直線」「2 点の双曲中点」など、双曲幾何学に関する作図は、徒手空拳の状態では GeoGebra であっても相当な工夫が必要である。([4] を参照のこと。) このことから、ポアンカレモデルをネイティブに実現するような作図ツールは（双曲幾何の学習者にとっても研究者にとっても）そもそも一定の意味があるものと考えられる。

そのうえで、作図手順に縛られない双曲幾何作図ツールは双曲平面の上の作図を行う上で、十分に有益であると考えられる。図 2 は、PointLine Hyperbolic のスクリーンショットの例である。アーキテクチャについてはユークリッド版の応用ではあるものの、その実装はユークリッド版に比べて技術的な困難が伴う。その理由については次章で説明する。

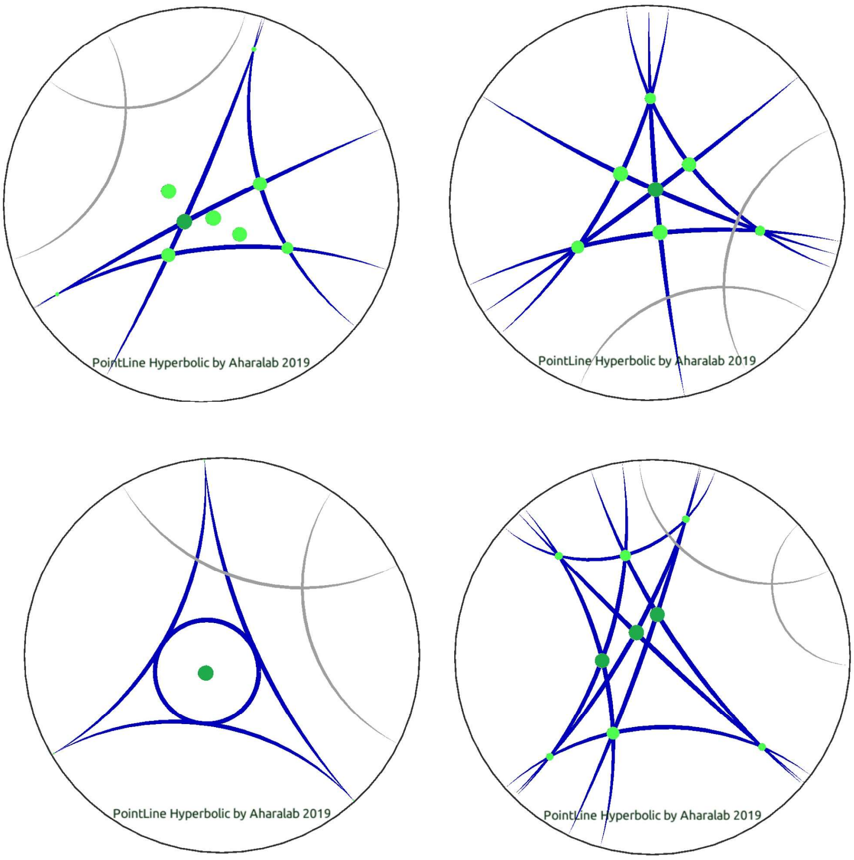

図 3：PointLine Hyperbolic からのスクリーンショット

4　PointLine におけるマルコフ過程の問題

PointLine は新しい数学の力学系の問題も提供する。話を簡単にするために最初はユークリッド平面で説明する以下のようなマルコフ過程を考えてみよう。ここで、A, B, C は平面上の点（位置ベクトル）であり、$0 < \epsilon << 1$ は正の定数であるとする。3 つのベクトル値関数を

$$\begin{aligned} F_A(A, B, C) &:= (1-\epsilon)A + \epsilon(-B + 2C) \\ F_B(A, B, C) &:= (1-\epsilon)B + \epsilon(-A + 2C) \\ F_C(A, B, C) &:= (1-\epsilon)C + \epsilon(A + B)/2 \end{aligned}$$

と定める。ここで

$$\begin{aligned} A^{(n+1)} &= F_A(A^{(n)}, B^{(n)}, C^{(n)}) \\ B^{(n+1)} &= F_B(A^{(n)}, B^{(n)}, C^{(n)}) \\ C^{(n+1)} &= F_C(A^{(n)}, B^{(n)}, C^{(n)}) \end{aligned}$$

によるマルコフ過程を考えれば、これは「C が A, B の中点にある」ような図へと安定的に収束する。（この過程は線形な過程なので、固有値が 1 以下であることを確認することにより確かめられる。）

ここで「安定的に収束する」という言葉の意味を確認しよう。何らかのマルコフ過程の極限として図が得られたとすると、その図を合同変換で移したものも同様に定常的な（あるいは別の形から始めて極限と得られる）図の一つであると考えられる。このことから、安定と言ってはいるがその実際は「合同変換による微動に関しても安定的に動作する」ことが要請されている。つまりどような微動を与えられても、その微動を継承して回転・平行移動により動き続けることが起こりえないことが要請されているのである。また、この考察は相似変換についても同じことが考えられ、「相似変換による微動に関しても安定的に動作する」ことが要請されている。つまり、どのような微動を与えられても、その微動を継承して相似縮小（または拡大）し続けてしまうようでは、作図ツールとしての要請を満たさないのである。（注意：双曲幾何で考えるときには相似変換は除外してよい。）

話を戻すと、上記過程は次のような性質を持つ

(性質 A)　A, B, C のうちの（すべてではない）任意のいくつかを固定する（たとえば上の過程の第 2 式を $B^{(n+1)} = B^{(n)}$ と交換する）ことによって「C が A, B の中点にあるような図へと安定的に収束する」という性質は保たれる。

PointLine には（Hyperbolic の場合においても）「中点」「2 点を同じ点にする」「点を直線の上に載せる」「点を円の上に載せる」「 2 線分を等長にする」「2 線分を直交させる」「円と直線を接させる」「円と円とを接させる」という基本モジュールが設置されており、これらを自由に組み合わせることが可能になっている。そこで次のような問題が考えられる。

(問題 B)　上記の基本モジュールのそれぞれが、上記**性質 A** を持つような定常マルコフ過程であるとしたとき、基本モジュールを組み合わせて作成した図に対しても、性質 A は保たれるか。そのような基本モジュールを実現するような定常マルコフ過程のシステムは存在するか。

現状の PointLine では、基本モジュールのすべては上記の性質 A を満たすように作られているが、残念ながら基本モジュールを組み合わせた作図の中には、性質 A を満たさないものが存在していることがわかっている。もちろん、基本モジュールの設計が十分でない可能性も当然考えられることから、問題 B は未解決である。このことについて、著者は否定的な結論（どのような基本モジュールのマルコフ過程に対しても、性質 A を満たさないような組み合わせの作図がありうる）と予想している。

問題 B は双曲幾何学についても全く同じ問いを発することが可能である。現段階では性質 A をもつような、基本モジュールを実現する双曲版マルコフ過程の存在は確認できており、それによって PointLine Hyperbolic は構成されている。

たとえば、2 点 A, B の中点を C とするようなモジュールにおいては、

$F_A(A,B,C) :=$ BC を $2:1$ に双曲外分する点と A とを $\epsilon : 1-\epsilon$ に双曲内分する点
$F_B(A,B,C) :=$ AC を $2:1$ に双曲外分する点と B とを $\epsilon : 1-\epsilon$ に双曲内分する点
$F_C(A,B,C) :=$ AB の双曲中点と C とを $\epsilon : 1-\epsilon$ に双曲内分する点

のように、ユークリッドにおける過程を（双曲計量を前提とした）作図法の言葉に置きなおすことによって得ることが構想され、実際にその方法により基本モジュールのそれぞれについて、性質 A を満たす（と観察される）双曲版マルコフ過程は実装することが可能である。ただし、そもそもこの方法によって構成した過程が性質 A を満たすかどうかすら未解決問題である。そのうえで問題 B は依然として未解決であり、これからの課題である。

References

[1] PointLine, `aharalab.sakura.ne.jp/PointLine/index.html`

[2] PointLine Hyperboilc, `aharalab.sakura.ne.jp/PointLine/Hindex.html`

[3] 阿原一志、「作図手順の概念を持たない作図ソフトウェアの提案」京都大学数理解析研究所講究録 2067(2019)

[4] 阿原一志「作図で身につく双曲幾何学」（共立出版）(2017)