

# 空間図形教材の作成環境の整備

長野高専・一般科 濱口 直樹

Naoki Hamaguchi, National Institute of Technology (KOSEN), Nagano College

東邦大学・理学部 高遠 節夫

Setsuo Takato, Faculty of Science, Toho University

## 1 はじめに

高専や大学初年級の数学教育においては、2変数関数のグラフとなる曲面や立体などの空間図形を扱うことも多い。我々はこれまで、配付プリントやpdfスライドに加えて、タブレット上での図形や、3Dプリンタで作成した立体モデル教材を併用して設計した授業を行い、学生へのアンケートを通して、これらの教材の教育効果を検証してきた[1, 2, 3].

タブレット教材や立体モデルは、空間図形の形状の理解に役立つことは言うまでもないが、これらに「補助線」や「長さ」といった数学的情報を加えることは容易ではない。プリント教材やスライドによる説明を併用することでより効果的な教材となるが、これ以外にも、学生の様子やコメント等からうかがえる効果として、以下のような内容があげられる。

- 「タブレットがわかりやすい」「立体モデルがあると良い」「スライドによる説明で理解できた」など、学生の理解するタイミングは様々であり、教材もいろいろなスタイルがあることは効果的である。
- 回転面などの基本的な曲面によって空間図形に関するイメージがつけば、その他の図形に関する内容の理解にもつながる様子が見られた。
- タブレットを扱ったり、立体モデルを手に取りながら考えることは、学生によるコミュニケーションの機会の増加につながり、疑問に思う点やその解決に伴う教育効果が期待される。

上記の様々なスタイルの教材について、図形データはすべて  $\text{K}_{\text{E}}\text{T}_{\text{C}}\text{Cindy}$ [4] を用いて作成している。 $\text{K}_{\text{E}}\text{T}_{\text{C}}\text{Cindy}$  のパッケージのサンプル集には、空間図形の  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  形式あるいは  $\text{obj}$  形式のデータを作成するための  $\text{cindy}$  ファイルも充実してきているが、基本的な曲面や立体については、すでに作成されたものも多く、図形データが整いつつある。3Dプリンタが使用できる環境も増えてきている中、手軽に利用できるように整備を進めている。

本稿では、現在の立体モデル教材に関する情報と、これまでの空間図形に関する授業テーマおよび併用した様々なスタイルの教材例について述べる。

## 2 3Dプリンタによる立体モデル教材の改良

空間図形の併用教材として、手に取ってその形状を確認することのできる立体モデルについては、2015年より作成を始めているが、当初は光硬化性樹脂を材料とする光造形方式の3Dプリンタを利用してきた。この方式による立体モデルの特徴としては、表面が滑らかで精度も高いが、仕上げの段階でアルコール洗浄などの後処理が必要である。

一方、熱可塑性樹脂を材料とする熱溶解積層方式の3Dプリンタも、現在ではその精度が向上している。一般には、光造形方式のものに比べて安価で手に入りやすく、現在は主にこの方式で作成している。

また、2変数関数の立体モデルとして、以前は厚みをつけた曲面のみ(図1左)を作成していたが、現在は、扱いやすい大きさに「定義域」を設定し、これを底面とする四角柱または円柱を考え、上面が関数のグラフとなる立体モデル(図1右)を作成している。

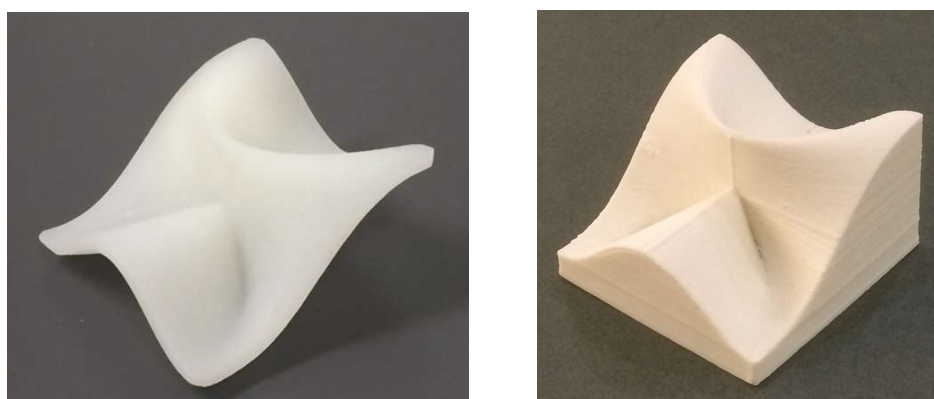


図1 光造形方式(左)と熱溶解積層方式(右)による立体モデル教材

グラフ上にいくつかの曲線をのせて作成することにより、グラフと平面の交線をイメージすることができる。さらに、なめらかさを敢えて抑えることによって現れる「等高線」は2変数関数の値に対応することとなり、ひとつの数学的情報として利用できる。

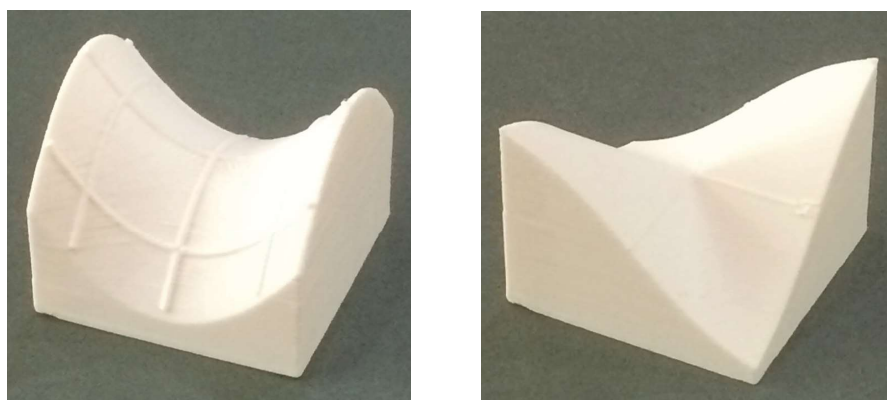


図2 曲線や座標軸を加えた立体モデル教材

### 3 授業テーマと教材例

本節では、これまで扱ってきた内容について、熱溶解積層方式での作成により改良を加えた立体モデルやタブレット教材とあわせて紹介する。なお、本稿におけるタブレット教材の描画にはフリーの3Dビューアである Meshlab を用いている。

#### 3.1 回転体の体積

回転体の体積は、高等学校における積分の授業でも学ぶ内容であり、空間図形を本格的にイメージする機会としては初期の重要な段階である。教材として双曲線の回転体を取り上げ、回転双曲面の性質についても触れることができるよう、表面に直線をのせている。

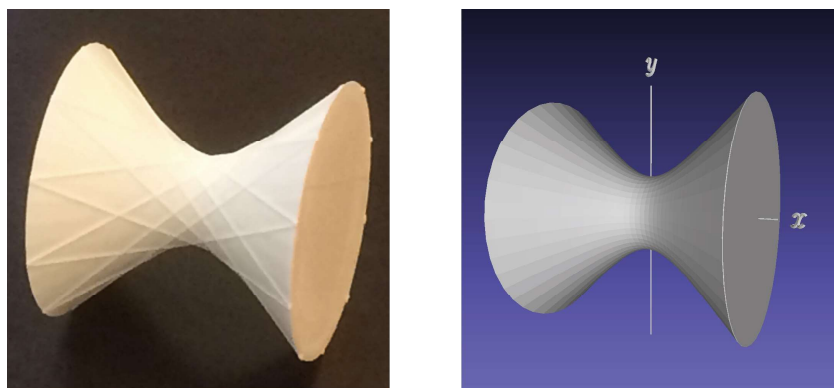


図3 回転体の立体モデルとタブレット教材

区分求積による説明として、まずは円柱の体積について総和の極限をとるというイメージしやすい内容で理解してから、一般の立体についても、断面積を積分することによって体積が求められるという内容の理解につなげることを想定している。

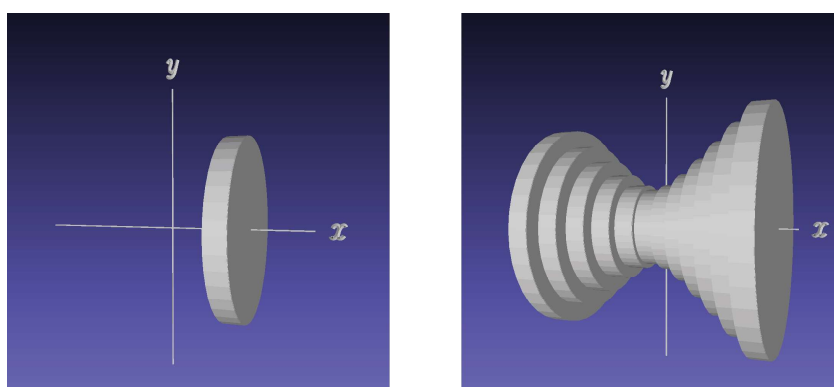


図4 区分求積に関するタブレット教材

### 3.2 原点で極限值を持たない関数

2変数関数  $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  は、原点で極限值を持たない関数としてよく取り上げられる。

$$x \text{ 軸に沿って原点に近づくとき } z = \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$y \text{ 軸に沿って原点に近づくとき } z = \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

したがって、原点において極限值は存在しない。

極限値の存在しない例として理解できたとしても、この計算だけでは2変数関数のグラフと関連づけて理解することは難しい。2変数関数の学習としては、初期の段階の内容であり、線画によるプリント教材の図形に加えて、タブレット教材や立体モデル教材でそのグラフの形状を理解することが重要であると考えられる。

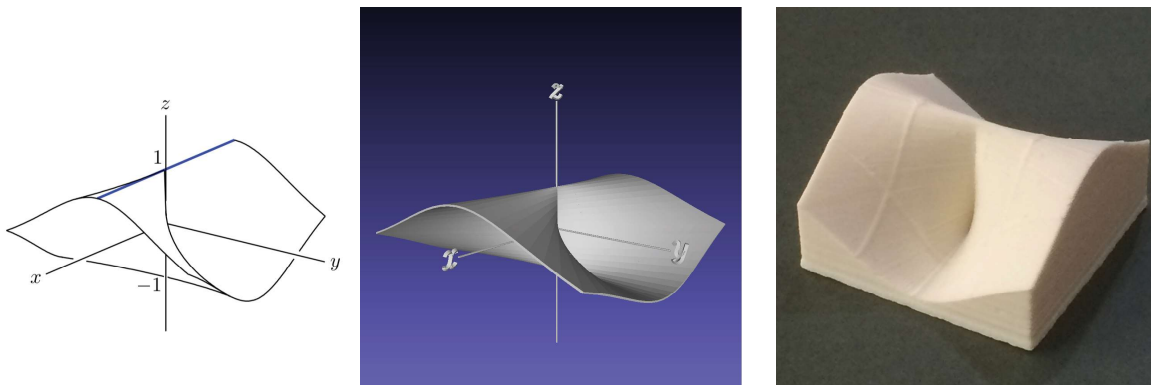


図5 原点で極限值を持たない関数のグラフ

### 3.3 極大値と極小値

2変数関数  $z = 1 - (2x^2 + y^2) \exp\{-(x^2 + y^2)\}$  は、極大値と極小値を持つ。このことは図6左の線画でもわかりやすいが、鞍点の存在は立体モデルやタブレット教材をあわせて考えた方が確認しやすい。

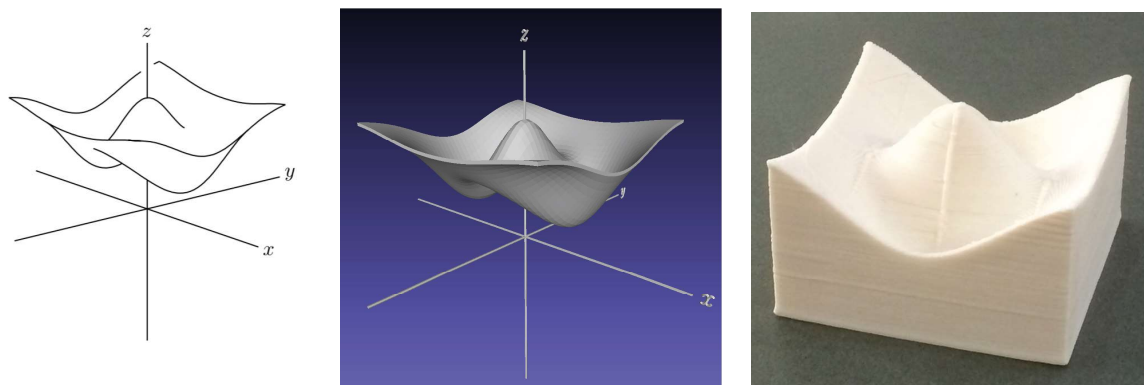


図6 極大値と極小値の教材

### 3.4 円柱相貫

同じ半径の2つの直円柱が直交するときの共通部分の体積（実際はその上半分）を求める問題は、2重積分の演習としてよく利用される。内容については理解しやすいが、その形状を理解することは容易ではない。この場合も、立体モデルやタブレット教材を利用することで形状をとらえ、そこには表し難い数学的情報を備えたプリント教材も併用して計算を行うことで、求めた内容の理解が深まるものと期待される。

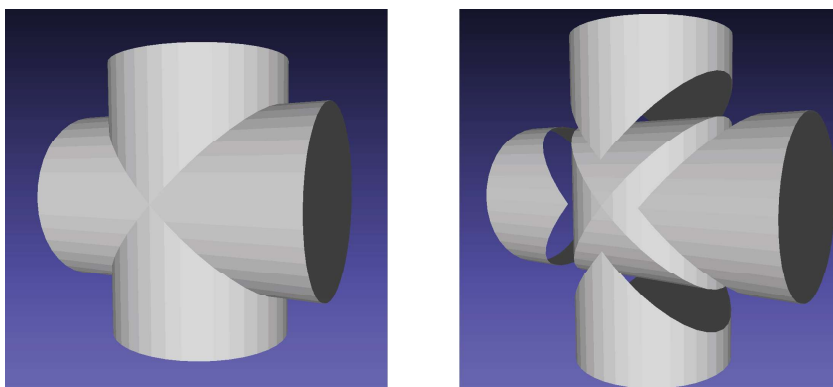


図7 円柱相貫に関するタブレット教材

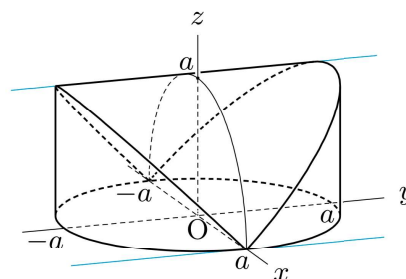


図8 円柱相貫に関する立体モデル教材とプリント教材

## 4 まとめと今後の課題

これまで、いくつかの授業テーマについて、配付プリントやpdfスライド、タブレット、および立体モデルを併用した図形教材を用いて設計した授業を行い、その教育効果を確認してきた。

K<sub>E</sub>T<sub>C</sub>indyの整備が進み、空間図形のデータの処理時間も短縮されたことによって、特に立体モデルについての改良もしやすくなっている。

前節までにあげたものを含め、これまで扱ってきた図形教材について、cindy ファイルとそのスクリプト (txt ファイル)、3D ビューアによって PC でも描画できるタブレット教材のための obj ファイル、3D プリンタで作成するための stl ファイルなどを下記に公開し、随時更新を進めている。

<https://hamax5.github.io>

教材としては、立方体の回転 [1] 等のフリップアニメーションを含む pdf スライドも追加していく予定である。

今後も、それぞれの教育機関の環境に合わせ、利用しやすい教材となるようさらに整備を進めたい。

## 5 謝辞

本研究は JSPS 科研費 18K02948 の助成を受けたものである。

## 参考文献

- [1] 濱口直樹, 大島利雄, 高遠節夫: 「多面体からできる回転体の教材作成とその利用について」, 京都大学数理解析研究所講究録 2105, pp.19–25, 2019.
- [2] 濱口直樹, 高遠節夫: 「空間図形の理解を助ける授業設計とその評価 —スライド・タブレット・立体モデルの併用—」, 京都大学数理解析研究所講究録 2067, pp.170–176, 2018.
- [3] 濱口直樹, 大島利雄, 高遠節夫: 「立体モデルおよびスライド・タブレットを併用した数学教材の開発」, 城西大学数学科教職課程紀要 1(2), pp.2006–2013, 2017.
- [4] Kaneko M., Yamashita S., Kitahara K., Maeda Y., Nakamura Y., Kortenkamp U, Takato S.: KeTCindy— Collaboration of Cinderella and KeTpic. Reports on CADGME 2014 Conference Working Group, The International Journal for Technology in Mathematics Education, 22(4), pp.179–185, 2015