共形ケーラーアインシュタイン・マックスウェル計量およびその一般化について*

埼玉大学大学院・理工学研究科　小野　肇
Hajime Ono
Graduate School of Science and Engineering,
Saitama University

1　概要

(M, J) をケーラー計量を許容する複素多様体とする．Apostolov と Maschler は [2] において, 次の 3 つの条件を満たす M 上のエルミート計量 $\tilde{g}$ のことを**共形ケーラー, アインシュタイン・マックスウェル計量（cKEM 計量）**と呼び, その存在問題を, Donaldson-藤木型のモデル（無限次元のモーメント写像）により表現し, 存在のための障害として二木型の積分不変量（**cKEM-二木不変量**）を定義した.

1. M 上の正値 C^∞ 級関数 f が存在して, $g = f^2\tilde{g}$ は M 上のケーラー計量となる.
2. $\tilde{g}$ のスカラー曲率 $s_{\tilde{g}}$ は定数である.
3. M 上のベクトル場 $J\mathrm{grad}_g f$ は, $g, \tilde{g}$ のどちらに関してもキリングベクトル場である.

本稿ではまず, 幾何学的不変式論（GIT）における Kempf-Ness の定理とその周辺について, 必要と思われる部分を復習する．続いて, その無限次元版の 1 つである Donaldson-藤木型のモデルを再考し, それをもとに, cKEM 計量の概念や, 二木型不変量, 松島・リヒネロビッツ型の定理などを一般化する（[9]）. 次に, 一般化された cKEM 計量に対する「volume extremization」について解説する．最後に, 最近 Apostolov-Calderbank により指摘された, 一般化された cKEM 計量と extremal 佐々木計量の関係（[1]）について紹介する.

*本講演の内容は二木昭人氏 (清華大学) との共同研究に基づく．　また，本研究は科研費（17K05218）の助成を受けたものである.

2　GIT とモーメント写像

まず, GIT の意味での安定性の概念は, 幾何学的対象のモジュライ空間（代数群による「よい」商）を考える際に重要であり, Mumford により導入された（例えば [12] 参照.）:

定義 2.1. $X \subset \mathbb{C}P^N$ を複素部分多様体とする. $U(N+1)$ のコンパクト部分リー群 K の複素化 $G = K^{\mathbb{C}} \subset GL(N+1;\mathbb{C})$ が X に作用しているとする. $p \in X$ に対して, p のリフト $\hat{p} \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$ の G-軌道 $G \cdot \hat{p} \subset \mathbb{C}^{N+1}$ が閉集合であるとき, p は ***G*-polystable** であるという.

簡約群 G による X の商をそのまま考えてしまうと「良い」商空間は得られない. GIT の意味での商空間 $X//G$ とは, X から安定ではない元（商をとる際悪さをする）を取り除いてしまって, 安定な元の軌道全体をパラメトライズような空間である. したがって, いつ安定になるかを判定することが重要になるが, それをシンプレクティック幾何を用いて判定するのが Kempf-Ness による次の定理である：

定理 2.2 (Kempf-Ness)**.** $X \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{C}P^N$ を複素部分多様体とする. $U(N+1)$ のコンパクト部分リー群 K の複素化 $G = K^{\mathbb{C}} \subset GL(N+1;\mathbb{C})$ が X に作用しているとする. さらに, K の $(X, \iota^*\omega_{FS})$ への作用はハミルトン作用であるとする. （モーメント写像を $\mu : M \to \mathfrak{k}^*$ とする. ）このとき,

$$p \in X \text{ は } G\text{-}polystable \iff G \cdot p \cap \mu^{-1}(0) \neq \emptyset$$

である[1].

これにより, GIT 商とシンプレクティック簡約が等しいことがわかる.

また, この有限次元の状況でも, $G \cdot p \cap \mu^{-1}(0) \neq \emptyset$ となるためのいくつかの障害が存在する：$\mathfrak{g}_p \subset \mathfrak{g}, \mathfrak{k}_p \subset \mathfrak{k}$ を p の stabilizer のリー環とする.

1. $G \cdot p \cap \mu^{-1}(0) \neq \emptyset \Rightarrow \mathfrak{g}_p = \mathfrak{k}_p \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{k}_p$
2. $G \cdot p \cap \mu^{-1}(0) \neq \emptyset \Rightarrow F \equiv 0$, ここで
$$F : \mathfrak{g}_p \to \mathbb{C}, \quad F(A) := -\sqrt{-1}\mathrm{Trace}(\mu(p)A)$$
3. Hilbert-Mumford criterion

Donaldson, 藤木による無限次元モデルを考えた場合, 1 は松島・リヒネロビッツの定理, 2 は二木不変量, 3 は Yau-Tian-Donldson 予想にそれぞれ対応している.

[1] 本当はモーメント写像 μ の採り方には多少の不定性があるので, μ をしかるべき形で決定しておかないとこの主張は正しくないが, ここでは詳細は省略する.

3 cKEM 計量の一般化

複素曲面においては, cKEM 計量は Einstein-Maxwell 方程式の強エルミート解に対応しており（[10, 11] などを参照）, 重要な対象である. しかし, 果たしてその高次元化として, 上に挙げた cKEM 計量の定義が良いかどうかは今現在不明である. そこでまず, cKEM 計量に関する Donaldson-藤木型モデルについて復習しよう [2].

(M, J_0, ω) を複素 m 次元コンパクトケーラー多様体, G を reduced 自己同型群 $\mathrm{Aut}_r(M, J_0)$ の極大トーラスとする. このとき,

$$\mathcal{J} := \{J : M \text{ 上の複素構造} \mid G\text{-不変}, \omega(J\cdot, J\cdot) = \omega(\cdot, \cdot)\}$$

には G-同変ハミルトン微分同相群 $\mathrm{Ham}^G(M, \omega)$ が作用する. $J \in \mathcal{J}$ に対し, G 不変なケーラー計量 $g_J(\cdot, \cdot) := \omega(\cdot, J\cdot)$ が定まる. また, $J \in \mathcal{J}$ における「接空間」$T_J\mathcal{J}$ は

$$\{\dot{J} \in \Gamma(\mathrm{End}TM) \mid \dot{J}J + J\dot{J} = 0, \omega(\dot{J}\cdot, \cdot) + \omega(\cdot, \dot{J}\cdot) = 0\}$$

の部分空間であるとしてよい. そこで, 正値関数 $f \in C^\infty(M)$ で, ω に関する f のハミルトンベクトル場 X_f が G のリー環 $\mathfrak{g}$ に属するもの（このとき f を**キリングポテンシャル**とよぶ）を 1 つとり固定する. このとき,

$$\Omega_{f,1-2m}(\dot{J}_1, \dot{J}_2) := \frac{1}{2}\int_M \mathrm{tr}(J\dot{J}_1\dot{J}_2) f^{1-2m} \frac{\omega^m}{m!}$$

は $\mathcal{J}$ 上のシンプレクティック形式を定める.

定理 3.1 ([2])**.** $\mathrm{Ham}^G(M, \omega)$ の $(\mathcal{J}, \Omega_{f,1-2m})$ への作用はハミルトン作用であり,

$$J \mapsto \langle s_{g_{J,f}} - c_{f,-1-2m}, \cdot \rangle_{f,-1-2m}$$

がモーメント写像である. ここで,

$$g_{J,f} := \frac{g_J}{f^2}, \quad \langle \varphi, \psi \rangle_{f,-1-2m} := \int_M \varphi\psi f^{-1-2m} \frac{\omega^m}{m!}, \quad \varphi, \psi \in (C^\infty(M))^G$$

であり,

$$c_{f,-1-2m} := \frac{\displaystyle\int_M s_{g_{J,f}} f^{-1-2m} \frac{\omega^m}{m!}}{\displaystyle\int_M f^{-1-2m} \frac{\omega^m}{m!}}$$

は $J \in \mathcal{J}$ の採り方によらない定数である.

このモデルにおいて, cKEM 計量はモーメント写像の零点と同一視できる. また, この定理より G のリー環 $\mathfrak{g}$ 上の線形関数

$$\mathrm{Fut}_f(H) := \langle s_{g_{J,f}} - c_{f,-1-2m}, h \rangle_{f,-1-2m}, \quad h : H \text{ のハミルトン関数}$$

が J の採り方によらず定まり, $g_{J,f}$ が cKEM 計量となる J が存在するとき $\mathrm{Fut}_f = 0$ である.

さて, 上の定理で f のべきとして現れる $1-2m$ や $-1-2m$ は自然なものだろうか？まず任意の実数 a に対して

$$\Omega_{f,a}(\dot{J}_1, \dot{J}_2) := \frac{1}{2}\int_M \mathrm{tr}(J\dot{J}_1\dot{J}_2) f^a \frac{\omega^m}{m!}$$

と定義すると, $\mathcal{J}$ 上のシンプレクティック形式を定めることがわかる. また, 実数 b に対して, $(C^\infty(M))^G$ 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{f,b}$ を

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{f,b} := \int_M \varphi\psi f^b \frac{\omega^m}{m!}$$

により定義することもできる. このとき, 上の定理と全く同様に次のことがわかる[2];

定理 3.2 ([8, 9])**.** $\mathrm{Ham}^G(M,\omega)$ の $(\mathcal{J}, \Omega_{f,a})$ への作用はハミルトン作用であり,

$$J \mapsto \langle s_{J,f,a,b} - c_{f,a,b}, \cdot\rangle_{f,b}$$

がモーメント写像である. ここで,

$$s_{J,f,a,b} := f^{a-b-2}\{f^2 s_{g_J} + 2af\Delta_{g_J} f - a(a-1)|df|^2_{g_J}\} \tag{3.1}$$

であり,

$$c_{f,a,b} := \frac{\displaystyle\int_M s_{J,f,a,b} f^b \frac{\omega^m}{m!}}{\displaystyle\int_M f^b \frac{\omega^m}{m!}}$$

は $J \in \mathcal{J}$ の採り方によらない定数である.

この定理より G のリー環 $\mathfrak{g}$ 上の線形関数

$$\mathrm{Fut}_{f,a,b}(H) := \langle s_{J,f,a,b} - c_{f,a,b}, h\rangle_{f,b}, \quad h : H \text{ のハミルトン関数} \tag{3.2}$$

が J の採り方によらず定まり, $s_{J,f,a,b}$ が定数となる J が存在するとき $\mathrm{Fut}_{f,a,b} = 0$ である.
また, $s_{f,J,a,b}$ が一定となる J の存在に関する松島・リヒネロビッツ型の障害については, [8] において証明されている.

例えば, $a = 1-2m, b = -1-2m$ のとき $s_{J,f,a,b} = s_{g_{J,f}}$ であり, $s_{J,f,a,b}$ が一定であることは $g_{J,f}$ が cKEM 計量であることを意味する. 一般の (a,b) に対しては $s_{J,f,a,b}$ はある計量のスカラー曲率とはならない. したがって, $s_{J,f,a,b}$ の幾何学的

[2] [9] ではより一般の場合の主張が述べられている.

意味は, 今現在ではあまりよくわからない. しかし, 特定の (a,b) については幾何学的の興味深い意味があることは 5 章で紹介する. また, 単に「複素曲面上のアインシュタイン・マックスウエル方程式の強エルミート解の高次元化」と考えると, $a(2)=-3, b(2)=-5$ となる関数 $a(m), b(m)$ に対して $s_{J,f,a(m),b(m)}$ が一定となるものを考える意味はある.

4 Volume extremization

cKEM 計量はスカラー曲率一定計量であり, したがって, 正規化されたアインシュタイン・ヒルベルト汎関数 EH を共形類に制限したものの臨界点である. また, 正規化されたアインシュタイン・ヒルベルト汎関数は

$$\mathcal{H}_f := \{g_{J,f} \mid J \in \mathcal{J}\}$$

上一定であることがわかる. したがって, もし $\mathcal{H}_f$ に cKEM 計量が存在したとすると, キリングポテンシャル f は

$$\{\text{ キリングポテンシャル }\} \ni h \mapsto EH(g_{J,h})$$

の臨界点である. つまり, この関数の f における第一変分は $\mathcal{H}_f$ に cKEM 計量が存在するための障害を与える. 実は, それが Fut_f に一致する [5]. この事実を, 佐々木・アインシュタイン計量の存在問題における volume minimization に倣って, 本稿では cKEM 計量の volume extremization と呼ぶことにする.

全く同様に, 次が成り立つことがわかる. まず, M 上の正値関数 $h \in C^\infty(M)$ および, $a \neq 0, -1, b \neq -1$ に対して

$$EH_{a,b}(J,h) := \frac{\displaystyle\int_M s_{J,h,a,b} h^{b+1} \frac{\omega^m}{m!}}{\left(\displaystyle\int_M h^{b+1} \frac{\omega^m}{m!}\right)^{\frac{a+1}{b+1}}}$$

とおく.

定理 4.1 ([7]). *1.* 固定された J に対して, h が $EH_{a,b}(J,\cdot)$ の臨界点であるための必要十分条件は $s_{J,h,a,b}$ が定数であることである.

2. f がキリングポテンシャルであるとき, $EH_{a,b}(J,f)$ は $J \in \mathcal{J}$ によらず一定である.

3. キリングポテンシャルの集合上の関数 $EH_{a,b}$ を $EH_{a,b}(f) := EH_{a,b}(J,f)$ により定義した時, $EH_{a,b}$ の f における第一変分は $\mathrm{Fut}_{f,a,b}$ の定数倍に等しい.

例として, m 次元コンパクトトーリックケーラー多様体に対して $EH_{1-2m,-1-2m}$ は次のように求まる. (M,J,g) を m 次元コンパクトトーリックケーラー多様体とし, $\Delta\subset\mathbb{R}^m$ をそのモーメント像とする. このとき,

$$(K,a)\in\mathcal{P}_{\Delta}^{T^m}\simeq\{f_{K,a}(\mu):=\sum_{i=1}^{m}K_i\mu_i+a\,|\,f_{K,a}>0\text{ on }\Delta\}\tag{4.1}$$

に対して,

$$EH_{1-2m,-1-2m}(K,a)=\frac{4\pi}{(m!)^{\frac{1}{m}}}\frac{\displaystyle\int_{\partial\Delta}\frac{1}{f_{K,a}^{2m-2}}d\sigma}{\left(\displaystyle\int_{\Delta}\frac{1}{f_{K,a}^{2m}}d\mu\right)^{\frac{m-1}{m}}}\tag{4.2}$$

となることが分かる (cf. [2] or [5].) 特に, $m=2$ のとき,

$$EH_{-3,-5}(a,b,c)^2=8\pi^2\frac{\left(\displaystyle\int_{\partial\Delta}\frac{1}{(a\mu_1+b\mu_2+c)^2}d\sigma\right)^2}{\displaystyle\int_{\Delta}\frac{1}{(a\mu_1+b\mu_2+c)^4}d\mu}\tag{4.3}$$

の臨界点 $(a,b,c)\in\mathcal{P}_{\Delta}^{T^2}$ を求めれば, (a,b,c) に関する cKEM-二木不変量は消える. （もちろん, 臨界点以外の (a,b,c) についてはcKEM 計量は存在しない. ）$\mathbb{C}P^2,\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1$, $\mathbb{C}P^2$ の 1 点ブローアップについての計算結果は以下のとおりである：

- $M=\mathbb{C}P^2$: この場合は, 定数倍と平行移動を除いて, Δ は3点 $(0,0),(1,0),(0,1)$ の凸包である. $EH:\mathcal{P}_{\Delta}^{T^2}/\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ の臨界点は $[(0,0,1)]$ のみである. これは Fubini-Study 計量に対応しており, この他には T^2-不変な cKEM 計量は存在しない.

- $M=\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1$: $p\geq 1$ に対して Δ_p を $(0,0),(p,0),(p,1),(0,1)$ の凸包とする.

$1\leq p\leq 2$ のときは, EH は唯 1 つの臨界点 $[(0,0,1)]$ を持つ. これは, 定曲率計量の直積計量に対応しており, この他には T^2-不変な cKEM 計量は存在しない.

一方, $p>2$ の場合は, 3 つの臨界点[3]

$$[(0,0,1)],\quad\left[\left(\pm1,0,\frac{1}{2}\left(\frac{p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p-2}}\mp p\right)\right)\right]$$

を持つ. $[(0,0,1)]$ は定曲率計量の直積計量, 残りの 2 つの臨界点は LeBrun による例（[10], または, 2 章の $m=2$ のケース）に対応しており, この他には T^2-不変な cKEM 計量は存在しない.

[3] この場合は EH は凸にならない!!

• $M = \mathbb{C}P^2$ の 1 点ブローアップ : $0 < p < 1$ に対して Δ_p を $(0,0),(p,0),(p,1-p),(0,1)$ の凸包とする.

$0 < p < 1$ に対して,

$$\left[\left(1, 0, \frac{p(1-\sqrt{1-p})}{2\sqrt{1-p}+p-2}\right)\right] \tag{4.4}$$

は EH の臨界点である. LeBrun の例 [11] がこれに対応する.

$\frac{8}{9} < p < 1$ の場合にはさらに 2 つの臨界点

$$\left[\left(-1, 0, \frac{p(3p \pm \sqrt{9p^2-8p})}{2(p \pm \sqrt{9p^2-8p})}\right)\right] \tag{4.5}$$

が存在する. これも LeBrun の例 [11] が対応している.

次に $0 < \alpha < \beta < 1$ を

$$F(p) := p^4 - 4p^3 + 16p^2 - 16p + 4 = 0.$$

の実解とする. $\alpha \le p \le \frac{8}{9}$ のときは, 最初に挙げた臨界点しか存在しない.

しかし, $0 < p < \alpha$ のときは, 最初に挙げた臨界点の他に 2 つの臨界点

$$\left[\left(p^2 - 4p + 2 \pm \sqrt{F(p)}, \pm 2\sqrt{F(p)}, p^2 + 2p - 2 \mp \sqrt{F(p)}\right)\right] \tag{4.6}$$

が存在する. この場合は cKEM-二木不変量は消えるが, 今現在, 対応する cKEM 計量が存在するかどうかはわかっていない[4].

一般の $EH_{a,b}$ も, 上の計算と全く同様に, $\mathcal{P}_\Delta^{Tm}$ 上の有理関数となり, 基本的には全く同様に $\mathrm{Fut}_{f,a,b}$ が消える f を求めることができる.

5 Extremal 佐々木計量との関係

さて, (3.1) で定義された $s_{J,f,a,b}$ は一般の a, b に対しては幾何学的な意味は明確ではない. しかし, $a = -m-1, b = -m-3$ の場合に Apostolov-Calderbank [1] により, extremal 佐々木計量との関連があることがわかったのでここで簡単に紹介する[5].

(M, L) を偏極多様体とし, ケーラー形式は $\omega \in c_1(L)$ とする. このとき, L 上には曲率が ω となるエルミート内積が一意に定まり, L^* の単位ベクトルからなる S^1-束 $\pi : S(L^*) \to M$ 上には自然に regular な佐々木構造 (η, ξ, Φ, g) が入る. ここ

[4] 実はこの場合には cKEM 版 K-安定性であることを数値的に確認できる [7]（ただし厳密な証明は今のところ出来ていない. ）これと, [2] の結果を合わせると cKEM 計量の存在が言える.

[5] $m = 2$ のときは $a = -3, b = -5$ であり, cKEM と一致する. この a, b の採り方のほうが, cKEM よりも, アインシュタイン・マックスウエル方程式の強エルミート解の高次元化としてよいのかもしれない.

で, 接触形式 η は曲率形式が ω となる接続形式, ξ は S^1-作用の generator である. また, 佐々木計量 g は

$$g = d\eta \circ (\Phi \otimes id) + \eta \otimes \eta$$

により与えられる. ここで, キリングポテンシャル f が与えられたとする. このとき, $S(L^*)$ 上に新たに佐々木構造 $(\eta^f, \xi^f, \Phi^f, g^f)$ が与えられる（[1] では CR-twist と呼ばれ, また, Boyer-Galicki の本 [4] では deformation of type I と呼ばれる. ）ここで,

$$\eta^f = (\pi^* f)^{-1}\eta,\ \ \xi^f = (\pi^* f)\xi + (X_f)^{\mathrm{hol}}\ \ (()^{\mathrm{hol}} : \text{水平リフト}),\ \ \Phi^f = \Phi - \Phi\circ(\xi^f \circ \eta^f),$$

$$g^f = d\eta^f \circ (\Phi^f \otimes id) + \eta^f \otimes \eta^f$$

である. もちろん, 一般のキリングポテンシャルに対して $(\eta^f, \xi^f, \Phi^f, g^f)$ は irregular である. 横断的ケーラー構造に関するスカラー曲率の変換公式[6]より, 次が得られる.

定理 5.1 ([1]). *g^f が extremal 佐々木計量ことと, $s_{J,f,-m-1,-m-3}$ がキリングポテンシャルであることは同値である.*

特に, 複素曲面上の cKEM 計量に対し, $s_{J,f,-3,-5}$ は定数であるから, 今まで知られていなかった 5 次元 extremal 佐々木計量が得られる.

参考文献

[1] V. Apostolov and D. Calderbank, The CR geometry of weighted extremal Kähler and Sasaki metrics, preprint, arXiv:1810.10618.

[2] V. Apostolov and G. Maschler, Conformally Kähler, Einstein-Maxwell geometry, Journal of the European Mathematical Society, Volume 21, Issue 5, 1319–1360, (2019).

[3] A. Besse, Einstein manifolds, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1987.

[4] C. Boyer and K. Galicki, Sasakian Geometry, Oxford University Press, 2008.

[5] A. Futaki and H. Ono, Volume minimization and conformally Kähler, Einstein-Maxwell geometry, J. Math. Soc. Japan Volume 70, Number 4, 1493–1521, (2018).

[6] A. Futaki and H. Ono, Conformally Einstein-Maxwell Kähler metrics and structure of the automorphism group, Math. Z. 292, no. 2, 571–589, (2019).

[6]Tanaka-Webstar スカラー曲率に関する変換公式.

[7] A. Futaki and H. Ono, On the existence problem of Einstein-Maxwell Kähler metrics, preprint, arXiv:1803.06801.

[8] A. Lahdili, Automorphisms and deformations of conformally Kähler, Einstein-Maxwell metrics, J. Geom. Anal. 29, no. 1, 542–568, (2019).

[9] A. Lahdili, Kähler metrics with constant weighted scalar curvature and weighted K-stability, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 119, no. 4, 1065–1114, (2019).

[10] C. LeBrun, The Einstein-Maxwell equations, Kähler metrics, and Hermitian geometry, J. Geom. Phys., 91, 163–17, (2015).

[11] C. LeBrun, The Einstein-Maxwell equations and conformally Kähler geometry, Commun. Math. Phys., 344, 621–653 (2016).

[12] D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, Geometric invariant theory. Third edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2), 34. Springer-Verlag, Berlin, 1994.