有限多重ゼータ値における導分関係式について

中村学園大学教育学部　村原 英樹
HIDEKI MURAHARA
FACULTY OF EDUCATION,
NAKAMURA GAKUEN UNIVERSITY

1. 多重ゼータ値の導分関係式

多重ゼータ値は，$k_r \geq 2$ となる正の整数 $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して，

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) = \sum_{1 \leq n_1 < \cdots < n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}$$

で定義される．多重ゼータ値はリーマンゼータ関数の正の整数点での値の一般化であり, その代数 (線形) 関係式のあり方は, 数学的・物理学的対象の構造を反映することが知られている．多重ゼータ値研究の関心事の 1 つとして，多重ゼータ値が張る $\mathbb{Q}$-線形空間の代数構造を把握すること，および多重ゼータ値の間の関係式を把握すること挙げられ，近年様々な角度から研究がなされている．本稿では，多重ゼータ値の関係式の中でも比較的よく知られている「導分関係式」について説明する．また，多重ゼータ値の有限類似と見なされる有限多重ゼータ値の導分関係式，およびその一般化について述べる．

導分関係式について説明するために，いくつかの準備をしよう．多重ゼータ値の分野でよく用いられる Hoffman の代数的定式化（参考文献 [2]）を若干形を変えて使用する．$\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle x, y \rangle$ とし，$\mathbb{Q}$-線形写像 $Z\colon \mathbb{Q} + y\mathfrak{H}x \to \mathbb{R}$ を $Z(1) := 1,\ Z(yx^{k_1-1} \cdots yx^{k_r-1}) := \zeta(k_1, \dots, k_r)$ で定める．$\mathfrak{H}$ の導分 (derivation) とは，$\mathbb{Q}$-線形写像 $\partial\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ で，Leibniz 則

$$\partial(w_1 w_2) = \partial(w_1) w_2 + w_1 \partial(w_2) \quad (w_1, w_2 \in \mathfrak{H})$$

を満たすものである．$\mathfrak{H}$ の生成元 x, y の行き先を決めれば導分は定まることに注意する．正の整数 $l \geq 1$ に対して，特に $\mathfrak{H}$ の導分 ∂_l を

$$\partial_l(x) := y(x+y)^l x, \quad \partial_l(y) := -y(x+y)^l x$$

で定める．導分 ∂_l は，$\partial_l(1)=0$ と $\partial_l(x+y)=0$ を満たす．このとき井原-金子-Zagier は，導分関係式と呼ばれる次の関係式を示した．

定理 1.1 (導分関係式; [5])**.** 任意の正の整数 $l\geq 1$ と $w\in\mathbb{Q}+y\mathfrak{H}x$ に対して，

$$Z(\partial_l(w))=0$$

が成り立つ．

例 1.2. 簡単な例として，以下の 2 つを挙げる．

$$\begin{aligned}
Z(\partial_2(yx)) &= Z(y^3x-yx^3)=\zeta(1,1,2)-\zeta(4)=0,\\
Z(\partial_3(yx)) &= Z(y^4x+y^2xyx-yxyx^2-yx^4)\\
&= \zeta(1,1,1,2)+\zeta(1,2,2)-\zeta(2,3)-\zeta(5)=0.
\end{aligned}$$

定理 1.1 の前身ともいえる次の関係式は，Hoffman によって得られた．

系 1.3 (Hoffman 関係式; [1])**.** $k_r\geq 2$ となる正の整数 $k_1,\ldots,k_r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{r}\zeta(k_1,\ldots,k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\ldots,k_r)=\sum_{\substack{1\leq i\leq r\\ k_i\geq 2}}\sum_{j=0}^{k_i-2}\zeta(k_1,\ldots,k_{i-1},k_i-j-1,j+2,k_{i+1},\ldots,k_r).$$

が成り立つ．

Proof. 定理 1.1 において，$l=1$ としたものが，この関係式である． □

次に，定理 1.1 と系 1.3 の別表記について述べよう．以下では，$\mathfrak{H}$ をその完備化 $\widehat{\mathfrak{H}}:=\mathbb{Q}\langle\langle x,y\rangle\rangle$ に埋め込んで考える．このとき，$\mathfrak{H}$ の導分 ∂_l は自然に $\widehat{\mathfrak{H}}$ に拡張されることに注意する．非負整数 m に対して，$\beta_m\colon\widehat{\mathfrak{H}}[[u]]\to\mathfrak{H}$ を $\beta_m(w)$ を w に対する u^m の係数と定義する．また Δ_u を $\widehat{\mathfrak{H}}[[u]]$ 上，

$$\Delta_u:=\exp\left(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\partial_l}{l}(-u)^l\right)$$

で与えられる自己同形写像とする．このとき上の定理 1.1 は以下のように書き換えることができる．

定理 1.4. 任意の正の整数 m と $w \in y\mathfrak{H}x$ に対して，

$$Z\left(\beta_m(1-\Delta_u)(w)\right) = 0$$

が成り立つ．

また Hoffman 関係式（系 1.3）は， 任意の $w \in y\mathfrak{H}x$ に対して，

$$Z\left(\beta_1(1-\Delta_u)(w)\right) = 0$$

が成り立つことと同値である．

2. 有限多重ゼータ値の導分関係式

正の整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して，集合 $\mathcal{A}_n$ を

$$\mathcal{A}_n := \left(\prod_p \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\right) \Big/ \left(\bigoplus_p \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\right) = \{(a_p)_p \mid a_p \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\}/\sim,$$

で定義する．ここで $(a_p)_p \sim (b_p)_p$ は，高々有限個の素数 p を除いて，$a_p = b_p$ が成り立つことを意味する．この集合 $\mathcal{A}_n$ は，各成分ごとの和と積を考えることによって，自然に $\mathbb{Q}$-代数となる．（特に $n=1$ のときの定義は Zagier による．）また正の整数 $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して，$\mathcal{A}_n$ における有限多重ゼータ値を

$$\zeta_{\mathcal{A}_n}(k_1, \ldots, k_r) := \left(\sum_{1 \leq n_1 < \cdots < n_r \leq p-1} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}} \bmod p^n\right)_p \in \mathcal{A}_n$$

で定義する．

近年 Rosen [9] は，各 $\mathcal{A}_n$ に離散位相を入れ，$\mathbb{Q}$-代数 $\widehat{\mathcal{A}}$ を自然な射影 $\mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_{n-1}$ によって，$\widehat{\mathcal{A}} := \lim_{\leftarrow n} \mathcal{A}_n$ と定義した．また $\mathbb{Z}_p$ は p-進整数環とし，自然な射影 $\pi\colon \prod_p \mathbb{Z}_p \to \widehat{\mathcal{A}}$ と $\pi_n\colon \widehat{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}_n$ をそれぞれの n に対して定めると，$\widehat{\mathcal{A}}$ における有限多重ゼータ値は次のように定義される：

$$\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(k_1, \ldots, k_r) := \pi\left(\left(\sum_{1 \leq n_1 < \cdots < n_r \leq p-1} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}\right)_p\right) \in \widehat{\mathcal{A}}.$$

簡単に確認できることとして，任意のインデックス $\boldsymbol{k} := (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^r$ に対して，$\pi_n(\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\boldsymbol{k})) = \zeta_{\mathcal{A}_n}(\boldsymbol{k})$ となることがわかる．以下記号の簡略化のため，$\boldsymbol{p} := \pi((p)_p) \in \widehat{\mathcal{A}}$ とし，さらに $\boldsymbol{p} := \pi_n \circ \pi((p)_p) \in \mathcal{A}_n$ とする．（詳細は，Rosen [9] や Seki [11] を参照されたい．）

$\mathfrak{H}$ 上の $\mathbb{Q}$-線形写像 R_x を任意の $w \in \mathfrak{H}$ に対して，$R_x(w) := wx$ と定める．また $\mathbb{Q}$-線形写像 $Z_{\mathcal{A}_n}\colon \mathbb{Q} + y\mathfrak{H} \to \mathcal{A}_n$ と $Z_{\widehat{\mathcal{A}}}\colon \mathbb{Q} + y\mathfrak{H} \to \widehat{\mathcal{A}}$ をそれぞれ，$Z_{\mathcal{A}_n}(1) = Z_{\widehat{\mathcal{A}}}(1) := 1$ と $Z_{\mathcal{A}_n}(yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_r-1}) := \zeta_{\mathcal{A}_n}(k_1,\ldots,k_r)$ と $Z_{\widehat{\mathcal{A}}}(yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_r-1}) := \zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(k_1,\ldots,k_r)$ によって定め，$\mathcal{A} := \mathcal{A}_1$ とする．$\mathcal{A}$ における有限多重ゼータ値の導分関係式は，小山宏次郎氏によって予想され，著者によって示された．

定理 2.1 (有限多重ゼータ値の導分関係式; [7, Theorem 2.1])**.** 任意の正の整数 $l \geq 1$ と $w \in y\mathfrak{H}x$ に対して，

$$Z_{\mathcal{A}}(R_x^{-1}\partial_l(w)) = 0$$

が成り立つ．

この定理の証明は著者によって帰納法による証明が得られたが，その後いくつかの別証明が与えられている.（参考文献 [4] など.）

次に定理 2.1 の一般化について紹介する．非負整数 m, n に対して，$\beta_{m,n}\colon \widehat{\mathfrak{H}}[[u,v]] \to \mathfrak{H}$ を $\beta_{m,n}(w)$ を w に対する $u^m v^n$ の係数と定義する．著者は小野塚との共同研究 [8] で，井原健太郎氏によって与えられた有限多重ゼータ値の導分関係式の別証明を一般化することで，$\widehat{\mathcal{A}}$ における次の定理を示した．

定理 2.2 ($\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値の導分関係式; [8, Theorem 1.3])**.** 任意の正の整数 $l \geq 1$ と $w \in y\mathfrak{H}x$ に対して，

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} Z_{\widehat{\mathcal{A}}}\left(\beta_{m,n} R_x^{-1}\Delta_u R_x\left(w - wyu\frac{1}{1+xu}\cdot\frac{xv}{1-xv}\right)\right)\boldsymbol{p}^n\\ &= Z_{\widehat{\mathcal{A}}}(w) Z_{\widehat{\mathcal{A}}}\left(\beta_{m,0}\left(\frac{1}{1-yu}\right)\right)\end{aligned}$$

が成り立つ．

補足 2.3. $Z_{\mathcal{A}}(1,\ldots,1) = 0$ が成り立つことに注意すると（このことはよく知られている，[3, eq.(15)] などを参照），定理 2.2 は，井原健太郎氏（参考文献 [4, Section 5.3]）によって得られた次の式

$$Z_{\mathcal{A}}\left(\beta_{m,0} R_x^{-1}\Delta_u R_x(w)\right) = 0 \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

の一般化であることがわかる．これは，定理 2.1 と同値である．

定理 2.2 の系として，次の Hoffman 関係式 ([1, Theorem5.1]) の $\widehat{\mathcal{A}}$-有限多重ゼータ値での類似が得られる．

系 2.4. 任意の $w \in y\mathfrak{H}$ に対して，

$$Z_{\widehat{\mathcal{A}}}\left(R_x^{-1}\partial_1(wx)\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} Z_{\widehat{\mathcal{A}}}(wyx^n)\,\boldsymbol{p}^n - Z_{\widehat{\mathcal{A}}}(w)Z_{\widehat{\mathcal{A}}}(y)$$

が環 $\widehat{\mathcal{A}}$ で成り立つ．

最後に，定理 2.2 の証明の概略について述べよう．（詳しい証明は，[8] を参照．証明は，井原健太郎氏の証明と同様の方針で進める．）概略を述べるために，多重ゼータ値でよく使われる，2 種類の積 (調和積 $*$・シャッフル積 ш) を帰納的に次の式で定義する．

$$\begin{aligned}
1 * w &= w * 1 := w,\\
yx^{k-1}w_1 * yx^{l-1}w_2 &:= yx^{k-1}(w_1 * yx^{l-1}w_2) + yx^{l-1}(yx^{k-1}w_1 * w_2) + yx^{k+l-1}(w_1 * w_2),\\
1 \,\text{ш}\, w &= w \,\text{ш}\, 1 := w,\\
uw_1 \,\text{ш}\, vw_2 &:= u(w_1 \,\text{ш}\, vw_2) + v(uw_1 \,\text{ш}\, w_2)
\end{aligned}$$

（ただし，$k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $u, v \in \{x, y\}$ とし，w, w_1, w_2 は $\mathbb{Q} + y\mathfrak{H}$ の word とする．またこれらの積は，$\mathbb{Q}$-双線形であることを仮定する．）この調和積 $*$ とシャッフル積 ш は，それぞれ可換かつ推移的であることが知られている．従って，$\mathbb{Q} + y\mathfrak{H}$ は，それぞれこの調和積 $*$ とシャッフル積 ш について，$\mathbb{Q}$-可換代数となる．(詳細は [2] を参照．)

定理 2.2 の証明には，次の 2 つの命題を用いる．

命題 2.5. 任意の w_1, $w_2 \in \mathbb{Q} + y\mathfrak{H}$ に対して，

$$Z_{\widehat{\mathcal{A}}}(w_1 * w_2) = Z_{\widehat{\mathcal{A}}}(w_1)Z_{\widehat{\mathcal{A}}}(w_2)$$

が環 $\widehat{\mathcal{A}}$ で成立する．

命題 2.6 (Jarossay [6], 関 [10, Theorem 6.4])**.** 任意の w_1, $w_2 = yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_r-1} \in \mathbb{Q} + y\mathfrak{H}$ について,

$$
\begin{aligned}
&Z_{\widehat{\mathcal{A}}}(w_1 \,ш\, w_2)\\
&= (-1)^{k_1+\cdots+k_r} \sum_{l_1,\ldots,l_r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \left[\prod_{i=1}^{r}\binom{k_i+l_i-1}{l_i}\right] Z_{\widehat{\mathcal{A}}}(w_1 yx^{k_r+l_r-1}\cdots yx^{k_1+l_1-1})\boldsymbol{p}^{l_1+\cdots+l_r}
\end{aligned}
$$

が環 $\widehat{\mathcal{A}}$ で成立する.

上記の命題を下の式に適用すれば，定理の証明が得られる.

命題 2.7 (井原-金子-Zagier [5, Corollary 3])**.** 任意の $w \in \mathbb{Q} + y\mathfrak{H}$ に対して,

$$\frac{1}{1-yu} * w = \frac{1}{1-yu} \,ш\, \Delta_u(w).$$

が成立する.

References

[1] M. E. Hoffman, *Multiple harmonic series*, Pacific J. Math. **152** (1992), 275–290.

[2] M. E. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra **194** (1997), 477–495.

[3] M. E. Hoffman, *Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums*, Kyushu J. Math. **69** (2015), 345–366.

[4] Y. Horikawa, K. Oyama, and H. Murahara, *A note on derivation relations for multiple zeta values and finite multiple zeta values*, arXiv:1809.08389.

[5] K. Ihara, M. Kaneko, and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math. 142 (2006), 307–338.

[6] D. Jarossay, *An explicit theory of* $\pi^{\mathrm{un,crys}}(\mathbb{P}^1 - \{0, \mu_N, \infty\})$, arXiv:1412.5099.

[7] H. Murahara, *Derivation relations for finite multiple zeta values*, Int. J. Number Theory **13** (2017), 419–427.

[8] H. Murahara and T. Onozuka, *Derivation relation for finite multiple zeta values in* $\widehat{\mathcal{A}}$, J. Aust. Math. Soc. (to appear).

[9] J. Rosen, *Asymptotic relation for truncated multiple zeta values*, J. Lond. Math. Soc. (2) **91** (2015), 554–572.

[10] S. Seki, *Finite multiple polylogarithms*, doctoral dissertation.

[11] S. Seki, *The* $\boldsymbol{p}$*-adic duality for the finite star-multiple polylogarithms*, Tohoku Math J. (2) **71** (2019), 111–122.

(Hideki Murahara) Nakamura Gakuen University Graduate School, 5-7-1, Befu, Jonan-ku, Fukuoka, 814-0198, Japan

E-mail address: hmurahara@nakamura-u.ac.jp