正整数インデックスに対する多変数荒川-金子ゼータ関数の解析接続と特殊値の表示について

東北大学大学院理学研究科数学専攻　伊東 邦大 *
Kunihiro Ito
Mathematical Institute, Tohoku University

概 要

荒川-金子によって考察された ξ-関数は, ポリ Bernoulli 数及び多重ゼータ値と密接に関連する重要な関数である. 本稿ではその多変数化に当たる関数の性質について述べる.

1 導入

「Riemann ゼータ関数は Bernoulli 数を特殊値に持つ. ではポリ Bernoulli 数を特殊値に持つゼータ関数はどのような性質を持つか」という問題を起点に, 荒川-金子 [1] と金子-津村 [10] は, Riemann ゼータ関数の積分表示を多重ポリログ関数で変形した一変数 ξ-関数並びに一変数 η-関数（それぞれ荒川-金子ゼータ関数, 金子-津村ゼータ関数と呼ばれる）を考察した. 関連研究は, 付随するインデックスが正の場合と非正の場合に分けられる. [1] と [10] による結果としては, 正インデックスと非正インデックスの両方で整関数への解析接続と非正整数点での (ξ-関数では C 型, η-関数では B 型) 多重ポリ Bernoulli 数による表示が知られている ([1, Theorem 6(i)], [10, Theorem 2.3, Remark 2.4, Theorems 4.4, 4.6]). 特に非正インデックスについての考察からポリ Bernoulli 数の双対公式が導かれる ([10, Remark 4.8]). 正インデックスについては正整数点での値が多重ゼータ値の有理数係数線形結合で表されることが明示式として計算されている ([10, Theorem 2.5]). この式は, ξ-関数と η-関数の双方で比べたときに同じ形を持っており, ξ-関数と η-関数の理論の対称性を示唆している. このように ξ-関数と η-関数はポリ Bernoulli 数と多重ゼータ値に深く関係する対象であり, 双方の理論を発展させることが今後の Bernoulli 数とゼータ値の考察においても重要であるといえる.

η-関数の定義式において, 多重ポリログ関数を多変数多重ポリログ関数で置き換えた関数 (多変数 η-関数) は [10] と [12] で考察された. 多変数化により, 多重ポリ Bernoulli 数と多重ゼータ値をより精密に捉えられると期待される. 実際, 非正インデックスについては, 整関数への解析接続と非正整数点での B 型多重添え字ポリ Bernoulli 数による表示 ([10, Theorem 5.7]), またその表示から B 型多重添え字ポリ Bernoulli 数の双対公式が導かれている ([10, Theorem 5.4]). この公式は, 上インデックスと下インデックスの交換による値の不変性を表すポリ Bernoulli 数の双対公式 ([8, Theorem 2]) を一般の深さに拡張したものであり, 浜畑-増渕, 鎌野によって得られていた他の拡張 ([2, Corollary 10], [7, Corollary 3(ii)]) を自然に含む美しい一般化である. さらに山本は複素数インデックスに対する多変数 η-関数を定義し, その整関数への解析接続を行ったうえで, B 型多重添え字ポリ Bernoulli 数の双対公式を η の関数等式として拡張した ([12, Corollary 2.5]). η-関数の解析的な性質は, かなりのところまで明らかになっているといえる. 一方, 一変数の場合の類似として, 正インデックスに対する多変数 η-関数の正整数点での値は多重ゼータ値の空間に属することが予想さ

*matera14ito@gmail.com

れるが, 完全な解答は得られていない. 部分的な結果として山本は, ある系列に対して多変数 η-関数の正整数点での値が多重ゼータ値の空間に属することを示している ([12, Theorems 4.2, 4.6]).

さてここで一変数 ξ-関数と一変数 η-関数の対応を思い起こせば, 適切に定義された**多変数 ξ-関数**も多変数 η-関数と対応した性質を持つと期待される. 実際, 筆者は非正インデックスに対する多変数 ξ-関数を構成し, その整関数への解析接続と非正整数点での C 型多重添え字ポリ Bernoulli 数による表示の計算 ([6, Theorem 1]), 及び, その表示を利用した C 型多重添え字ポリ Bernoulli 数の双対公式の証明を行った ([6, Theorem 2]). この公式は, C 型ポリ Bernoulli 数の双対公式 ([9, Section 2]) の拡張となっている.

非正インデックスの研究と並行して, 筆者は正インデックスに対する多変数 ξ-関数の考察も進めている. 本稿では, 正インデックスに対する多変数 ξ-関数が整関数へ解析接続されること, 並びに, その正整数点での値が多重ゼータ値の空間に属することを報告する.

2 多変数 ξ-関数の性質

2.1 定義

正インデックスに対する多変数 ξ-関数を, 一変数 ξ-関数と多変数 η-関数にならい定義する:

定義 1. 正整数 $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と $d \in \{1, \ldots, r\}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\xi(k_1, \ldots, k_r; s_1, \ldots, s_r; d) \\
&:= \frac{1}{\prod_{j=1}^{r} \Gamma(s_j)} \int_{(0,\infty)^r} \prod_{j=1}^{r} t_j^{s_j - 1} \frac{\mathrm{Li}^{⧢}_{k_1,\ldots,k_r}(1 - e^{-t_1 - \cdots - t_r}, 1 - e^{-t_2 - \cdots - t_r}, \ldots, 1 - e^{-t_r})}{\prod_{j=1}^{d} (e^{t_j + \cdots + t_r} - 1)} \prod_{j=1}^{r} dt_j \qquad (1) \\
&\qquad\qquad\qquad (s_1, \ldots, s_r \in \mathbb{C},\ \Re(s_j) > 0\ (j = 1, \ldots, r)).
\end{aligned}$$

ここで, $\mathrm{Li}^{⧢}_{k_1,\ldots,k_r}(z_1, \ldots, z_r)$ は多変数多重 (シャッフル) ポリログ関数であり $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$, $|z_j| < 1$ $(j = 1, \ldots, r)$ に対し,

$$\mathrm{Li}^{⧢}_{k_1,\ldots,k_r}(z_1, \ldots, z_r) := \sum_{l_1,\ldots,l_r \geq 1} \frac{z_1^{l_1} z_2^{l_2} \cdots z_r^{l_r}}{l_1^{k_1} (l_1 + l_2)^{k_2} \cdots (l_1 + \cdots + l_r)^{k_r}}$$

で定められる. 定義式 (1) の収束は, 定数 $M > 0$ によって

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{(0,\infty)^r} \prod_{j=1}^{r} t_j^{s_j - 1} \frac{\mathrm{Li}^{⧢}_{k_1,\ldots,k_r}(1 - e^{-t_1 - \cdots - t_r}, 1 - e^{-t_2 - \cdots - t_r}, \ldots, 1 - e^{-t_r})}{\prod_{j=1}^{d} (e^{t_j + \cdots + t_r} - 1)} \prod_{j=1}^{r} dt_j \right| \\
&\leq M \prod_{j=1}^{r} \int_0^\infty t_j^{\Re(s_j) - 1} e^{-\frac{1}{r+1} t_j} dt_j.
\end{aligned}$$

と評価できることから分かる. 以下では, 次の二つの問題を考える:

1 関数 ξ の解析接続を与えよ. 多変数 η-関数と同様に, 整関数になるか？

2 正整数点での値は多重ゼータ値の有理数係数線形結合で表せるか？ □

2.2 ξ-関数の解析接続

本節では ξ-関数の解析接続について議論する. はじめに実数 $\varepsilon \geq 0$ に対し, 原点中心で半径 ε の閉円板を $D(\varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \varepsilon\}$ とおく. また十分小さな $\varepsilon_0 > 0$ をとり, $\mathbb{C}^r$ の部分集合 Δ を

$$\Delta := (D(\varepsilon_0) \cup (\varepsilon_0, \infty))^r.$$

で定める. さらに関数 $f:\mathbb{C}^r\times\Delta\to\mathbb{C}$ を ξ-関数の定義式における被積分関数, すなわち

$$f(s_1,\dots,s_r;\alpha_1,\dots,\alpha_r):=\prod_{j=1}^{r}\alpha_j^{s_j-1}\frac{\mathrm{Li}^{\sqcup\sqcup}_{k_1,\dots,k_r}(1-e^{-\alpha_1-\cdots-\alpha_r},1-e^{-\alpha_2-\cdots-\alpha_r},\dots,1-e^{-\alpha_r})}{\prod_{j=1}^{d}(e^{\alpha_j+\cdots+\alpha_r}-1)}.$$

で定める. このとき, 関数 f は上からの一様な評価を持つ:

命題 1. ある $M>0$ が存在し, 領域 $\mathbb{C}^r\times\Delta$ 上で,

$$|f(s_1,\dots,s_r;\alpha_1,\dots,\alpha_r)|\le M\prod_{j=1}^{r}(|\alpha_j|^{\Re(s_j)-1}e^{-\frac{1}{r+1}\Re(\alpha_j)})$$

が成り立つ. □

$\mathcal{C}$ を, 実軸上を無限大から ε_0 まで動き, 原点中心で半径 ε_0 の円周を正の向きに動き, 実軸上を ε_0 から無限大まで帰っていく経路とする. 多変数 ξ-関数の定義式を $\mathcal{C}$ 上の線積分に変形することで次の定理を得る:

定理 1. 正整数 $k_1,\dots,k_r\in\mathbb{Z}_{\ge1}$ と $d\in\{1,\dots,r\}$ に対し, $\xi(k_1,\dots,k_r;s_1,\dots,s_r;d)$ は整関数に解析接続され, 次の式が成り立つ:

$$\xi(k_1,\dots,k_r;-m_1,\dots,-m_r;d)=(-1)^{m_1+\cdots+m_r}C^{(k_1,\dots,k_r),(d)}_{m_1,\dots,m_r}\quad(m_1,\dots,m_r\in\mathbb{Z}_{\ge0}).\qquad\square$$

すなわち多変数 ξ-関数は, 多変数 η-関数と同様の解析的性質を持つことが分かった. ここで, $\{C^{(s_1,\dots,s_r),(d)}_{n_1,\dots,n_r}\}$ は C 型多重添え字ポリ Bernoulli 数であり, 金子-津村による B 型多重添え字ポリベルヌーイ数 ([10, Definition 5.1]) の自然な類似として次の母関数で定められる:

定義 2 ([6, Definition 1])**.** 複素数 $s_1,\dots,s_r\in\mathbb{C}$ と正整数 $d\in\{1,\dots,r\}$ に対し,

$$\frac{\mathrm{Li}^{\sqcup\sqcup}_{s_1,\dots,s_r}(1-e^{-t_1-\cdots-t_r},1-e^{-t_2-\cdots-t_r},\dots,1-e^{-t_r})}{\prod_{j=1}^{d}(e^{t_j+\cdots+t_r}-1)}=\sum_{n_1,\dots,n_r\ge0}C^{(s_1,\dots,s_r),(d)}_{n_1,\dots,n_r}\prod_{j=1}^{r}\frac{t_j^{n_j}}{n_j!}.$$

多重添え字ポリ Bernoulli 数は $n_1=\cdots=n_{r-1}=0$ のとき, 多重ポリ Bernoulli 数に帰着する. 特に母関数のパラメータ d は, 荒川-金子 [1], 今冨-金子-武田 [5], 浜畑-増渕 [2] によって導入された二つの多重ポリ Bernoulli 数を統一的に取り扱うための工夫である. 多重添え字ポリ Bernoulli 数は, 双対性, 明示公式, 漸化式など, ポリ Bernoulli 数の持つ様々な性質を自然に拡張することが分かっている.

定理の証明では, 線積分の収束性を担保するために命題 1 を用いる. 講演の段階では, 被積分関数の評価を弱い形でしか証明できておらず, 積分領域を変数の大小によって分割する手法 ([11] で Mordell-Tornheim 型二重ゼータ関数を解析接続するときに用いられた手法) で対処していたが, その代償として特異点の候補が残ってしまっていた. 後日, 多変数多重ポリログ関数の境界付近での挙動を再検討 * することで, 被積分関数の評価を命題 1 に改善できた. この結果, 領域の分割は不要となり, 整関数への解析接続が得られた.

2.3 ξ-関数の正整数点における値

本節では ξ-関数および η-関数の正整数点における値を考察する. 一変数の場合は金子と津村により, 多重ゼータ値の有理数係数線形結合による明示式が得られている ([10, Theorem 2.5]). これより特に $\mathcal{Z}_k:=\langle\zeta(k_1,\dots,k_r)\mid k_1,\dots,k_{r-1}\in\mathbb{Z}_{\ge1},k_r\in\mathbb{Z}_{\ge2},k_1+\cdots+k_r=k\rangle_{\mathbb{Q}}$ とおくとき,

$$\xi(k_1,\dots,k_r;l),\eta(k_1,\dots,k_r;l)\in\mathcal{Z}_{k_1+\cdots+k_r+l}$$

* 立教大学の小森靖先生の助言による

が成立する (ここで $\xi(k_1,\dots,k_r;s),\eta(k_1,\dots,k_r;s)$ は一変数 ξ-関数, 一変数 η-関数). 一方で $k_1,\dots,k_r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して $\Re(s_j)>0$ $(j=1,\dots,r)$ なる $s_1,\dots,s_r\in\mathbb{C}$ で定義される多変数 η-関数

$$\begin{aligned}&\eta(k_1,\dots,k_r;s_1,\dots,s_r)\\&:=\frac{1}{\prod_{j=1}^r\Gamma(s_j)}\int_{(0,\infty)^r}\prod_{j=1}^r t_j^{s_j-1}\frac{\mathrm{Li}^{\sqcup\!\sqcup}_{k_1,\dots,k_r}(1-e^{t_1+\cdots+t_r},1-e^{t_2+\cdots+t_r},\dots,1-e^{t_r})}{\prod_{j=1}^r(1-e^{t_j+\cdots+t_r})}\prod_{j=1}^r dt_j\end{aligned}$$

(cf. [10, Definition 5.6], [12, Definition 2.3]) について, 山本の考察によれば, 重さと深さを固定した和, 及び深さ 2 かつ高さ 1 の admissible index に対する値は多重ゼータ値の有理数係数線形結合で書ける:

定理 2 ([12, Theorems 4.2, 4.6]). **(1)** † 正整数 $r,k,l\geq 1$ に対して,

$$\sum_{k_1+\cdots+k_r=k}\sum_{l_1+\cdots+l_r=l}\eta(k_1,\dots,k_r;l_1,\dots,l_r)\in\mathcal{Z}_{k+l}.$$

(2) 正整数 $k,l\geq 1$ に対して,

$$\eta(1,k;1,l)\in\mathcal{Z}_{k+l+2}.$$

□

この結果と双対性 ([12, Corollary 2.5]) により, **多変数 η-値** $\eta(k_1,\dots,k_r;l_1,\dots,l_r)$ の張る空間を

$$\mathcal{Y}_w:=\langle\eta(k_1,\dots,k_r;l_1,\dots,l_r)\mid k_j,l_j\in\mathbb{Z}_{\geq 1},k_1+\cdots+k_r+l_1+\cdots+l_r=w\rangle_{\mathbb{Q}}$$

とおくとき, $w=2,3,4,5$ では $\mathcal{Y}_w\subseteq\mathcal{Z}_w$ が従う. 以上を踏まえたうえで, 多変数 ξ-関数についても同様の問題を考える. すなわち, **多変数 ξ-値** $\xi(k_1,\dots,k_r;l_1,\dots,l_r;r)$ の張る空間を

$$\mathcal{X}_w:=\langle\xi(k_1,\dots,k_r;l_1,\dots,l_r;r)\mid k_j,l_j\in\mathbb{Z}_{\geq 1},k_1+\cdots+k_r+l_1+\cdots+l_r=w\rangle_{\mathbb{Q}}$$

とおくときの $\mathcal{X}_w$ と $\mathcal{Z}_w$ の包含関係を調査する. 今回, 次の定理を得た:

定理 3. 正整数 $k_1,\dots,k_r,m_1,\dots,m_r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し,

$$\xi(k_1,\dots,k_r;m_1,\dots,m_r;r)\in\mathcal{Z}_{k_1+\cdots+k_r+m_1+\cdots+m_r}$$

が成り立つ. すなわち $w\geq 2$ に対し,

$$\mathcal{X}_w\subseteq\mathcal{Z}_w$$

が成り立つ. □

つまり, 多変数 ξ-値が多重ゼータ値の有理数係数線形結合で表されることが分かった (係数の明示は更なる課題である). 定理の証明は, 変数変換 $x_j=1-e^{-t_j-\cdots-t_r}$ $(j=1,\dots,r)$ により

$$\begin{aligned}&\xi(k_1,\dots,k_r;m_1,\dots,m_r;r)\\&=\frac{1}{\prod_{j=1}^r(m_j-1)!}\int_{(0,\infty)^r}\prod_{j=1}^r t_j^{m_j-1}\frac{\mathrm{Li}^{\sqcup\!\sqcup}_{k_1,\dots,k_r}(1-e^{-t_1-\cdots-t_r},1-e^{-t_2-\cdots-t_r},\dots,1-e^{-t_r})}{\prod_{j=1}^r(e^{t_j+\cdots+t_r}-1)}\prod_{j=1}^r dt_j\\&=\frac{1}{\prod_{j=1}^r(m_j-1)!}\int_{0<x_r<\cdots<x_1<1}\prod_{j=1}^r(\mathrm{Li}_1(x_j)-\mathrm{Li}_1(x_{j+1}))^{m_j-1}\mathrm{Li}^{\sqcup\!\sqcup}_{k_1,\dots,k_r}(x_1,\dots,x_r)\prod_{j=1}^r\frac{dx_j}{x_j}\end{aligned}$$

(ただし $x_{r+1}:=0$) と変形すると, **勝手な** $r\leq n$, $\{i_1,\dots,i_n\}=\{1,\dots,r\}$ **に対して**

$$\int_{0<x_1<\cdots<x_r<1}\mathrm{Li}^{\sqcup\!\sqcup}_{k_1,\dots,k_n}(x_{i_1},\dots,x_{i_n})\prod_{j=1}^r\frac{dx_j}{x_j}\overset{?}{\in}\mathcal{Z}_{k_1+\cdots+k_n+r}\tag{2}$$

† 原論文ではサークル調和積と refinement を用いて多重ゼータ値の線形和を与えている

が成り立つか？という議論に帰着されるが, 変数の重複が障害になり簡単には計算できない. そこで多重ポリログ関数を hyperlogarithm で表示し, その微分公式を使って “変数を端に寄せて” から一変数ずつ積分することを考える [‡]. ここで hyperlogarithm は実数 $0 = a_0 < a_{n+1}$, 複素数 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \setminus (0, a_{n+1})$, ただし $a_1 \neq 0, a_n \neq a_{n+1}$ に対し,

$$I(0; a_1, \ldots, a_n; a_{n+1}) := \int_{0<t_1<\cdots<t_n<a_{n+1}} \prod_{j=1}^{n} \frac{dt_j}{t_j - a_j}$$

で定められる ([3], [4] など). ただし $n = 0$ のとき $I(0; a_1) := 1$ とする. 定義から $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $x_j \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ $(j = 1, \ldots, r)$ に対し,

$$\mathrm{Li}^{ш}_{k_1,\ldots,k_r}(x_1, \ldots, x_r) = (-1)^r I(0; x_1^{-1}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{k_1-1}, \ldots, x_r^{-1}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{k_r-1}; 1)$$

が成り立つことに注意する. したがって, 主張 (2) は, hyperlogarithm の三角領域での積分

$$\int_{0<x_1<\cdots<x_r<1} I(0; a_1, \ldots, a_n; 1) \prod_{j=1}^{r} \frac{dx_j}{x_j}$$

(ただし各 $a_i \in \{0, 1, x_1^{-1}, \ldots, x_r^{-1}\}$ は $a_1 \neq 0$, $a_n \neq 1$ で, すべての x_j^{-1} が一回は現れると仮定) が多重ゼータ値で表されることを示せば従う. 実際, 一般化された次の主張を証明できた:

命題 2. *$n, l \geq 0$, $a_j \in \{0, 1, x_1^{-1}, \ldots, x_r^{-1}\}$ $(j = 1, \ldots, n)$, $a_1 \neq 0$, $a_n \neq 1$, $b_j \in \{0, 1, x_1, \ldots, x_r\}$ $(j = 1, \ldots, l)$, $b_1 \neq 0$, $b_l \neq x_1$* とする. また各 $j \in \{1, \ldots, r\}$ に対して番号 i が存在し $x_j^{-1} = a_i$ または $x_j = b_i$ が成り立つものとする. このとき

$$\int_{0<x_1<\cdots<x_r<1} I(0; a_1, \ldots, a_n; 1) I(0; b_1, \ldots, b_l; x_1) \prod_{j=1}^{r} \frac{dx_j}{x_j} \in \mathcal{Z}_{n+l+r}$$

が成り立つ. □

hyperlogarithm の Landen 型接続公式を用いることで, 命題 2 は多変数 η-値の計算にも応用できる. このことについては改めて述べる予定である.

謝辞

2019 年度 RIMS 研究集会「多重ゼータ値の諸相」での講演機会をくださいました世話人の古庄英和先生, 解析接続の結果改善につながる助言をくださった立教大学の小森靖先生, その助言を受ける契機となった名古屋大学解析数論セミナーのコーディネート並びに旅費支援をしてくださった松本耕二先生, 有益な質問を多くしてくださった名古屋大学解析数論メンバーの皆さま, 継続的にセミナーを見ていただいた首都大学東京の津村博文先生, 特殊値計算に hyperlogarithm による解法を提案してくださった九州大学の広瀬稔氏に心より感謝を申し上げます. 本研究には, JSPS 科研費 JP15K04774, JP16H06336, および JP18H01110 の支援を受けました.

参考文献

[1] T. Arakawa and M. Kaneko, *Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions*, Nagoya Math. J. **153** (1999), 189–209.

[2] Y. Hamahata and H. Masubuchi, *Special multi-poly-Bernoulli numbers*, J. Integer Seq. **10** (2007), no. 4, Article 07.4.1, 6.

[‡] 九州大学の広瀬稔氏のアイデアによる.

[3] M. Hirose, K. Iwaki, N. Sato, and K. Tasaka, *Duality/sum formulas for iterated integrals and their application to multiple zeta values*, J. Number Theory **195** (2019), 72–83.

[4] M. Hirose and N. Sato, *Iterated integrals on* $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty, z\}$ *and a class of relations among multiple zeta values*, Adv. Math. **348** (2019), 163–182.

[5] K. Imatomi, M. Kaneko, and E. Takeda, *Multi-poly-Bernoulli numbers and finite multiple zeta values*, J. Integer Seq. **17** (2014), no. 4, Article 14.4.5, 12.

[6] K. Ito, *The multi-variable Arakawa-Kaneko zeta function for non-positive indices and its values at non-positive integers*, Commentarii mathematici Universitatis Sancti Pauli. to appear.

[7] K. Kamano, *A formula for multi-poly-Bernoulli numbers of negative index*, Kyushu Journal of Mathematics **67** (2013), no. 1, 29-37.

[8] M. Kaneko, *Poly-Bernoulli numbers*, J. Théor. Nombres Bordeaux **9** (1997), no. 1, 221–228.

[9] ———, *Poly-Bernoulli numbers and related zeta functions*, Algebraic and analytic aspects of zeta functions and *L*-functions, MSJ Mem., vol. 21, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010, pp. 73–85.

[10] M. Kaneko and H. Tsumura, *Multi-poly-Bernoulli numbers and related zeta functions*, Nagoya Math. J. **232** (2018), 19–54.

[11] Y. Komori, *An integral representation of the Mordell-Tornheim double zeta function and its values at non-positive integers*, Ramanujan J. **17** (2008), no. 2, 163–183.

[12] S. Yamamoto, *Multiple zeta functions of Kaneko-Tsumura type and their values at positive integers*, preprint (2016). arXiv1607.01978.