

置換表現の個数に関する p 進的性質について

竹ヶ原 裕元

室蘭工業大学

A を群とする. 任意の自然数 d について, A における指数 d の部分群の個数は有限であるとし, A において指数が有限である部分群全体の集合を \mathcal{F}_A で表す. A から S_n への準同型の個数を $h_n(A)$ で表し, $n = 0$ のとき $h_0(A) = 1$ とする. 数列 $\{h_n(A)_{n=0}^\infty\}$ の指数型母関数に関して, 次の式が知られている (cf. [11]).

$$E_A(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(A)}{n!} X^n = \exp \left(\sum_{B \in \mathcal{F}_A} \frac{1}{|A : B|} X^{|A:B|} \right) \quad (1)$$

p を素数, u を正の整数とする. 位数 p^u の巡回群を C_{p^u} で表す. (1) より数列 $\{h_n(C_{p^u})_{n=0}^\infty\}$ の指数型母関数に関して, 次の式が得られる.

$$E_{C_{p^u}}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(C_{p^u})}{n!} X^n = \exp \left(\sum_{k=0}^u \frac{1}{p^k} X^{p^k} \right) \quad (2)$$

0 でない整数 a に対して $\text{ord}_p(a)$ で a を割り切る最大の p のべき数を表し, 実数 x に対して $[x]$ で x を超えない最大の整数を表す. (2) を利用して, 不等式

$$\text{ord}_p(h_n(C_{p^u})) \geq \sum_{j=1}^u \left[\frac{n}{p^j} \right] - u \left[\frac{n}{p^{u+1}} \right] \quad (3)$$

および, p^{u+1} が n を割り切るときにこの式の等号が成り立つことが示される (cf. [4]). 特に $p = 2, u = 1$ の場合には $\text{ord}_2(h_n(C_2))$ は次で与えられる (cf. [7]).

$$\text{ord}_2(h_n(C_2)) = \begin{cases} \left[\frac{n}{2} \right] - \left[\frac{n}{4} \right] + 1 & n \equiv 3 \pmod{4} \text{ のとき,} \\ \left[\frac{n}{2} \right] - \left[\frac{n}{4} \right] & n \not\equiv 3 \pmod{4} \text{ のとき.} \end{cases}$$

\mathbb{Q}_p で p 進数のなす体, \mathbb{Z}_p で p 進整数のなす環を表す. $a = \sum_{i=-n_0}^{\infty} a_i p^i \in \mathbb{Q}_p$, $0 \leq a_i \leq p-1$, ただし n_0 は非負整数, に対して $a_i \neq 0$ である最小の i を $\text{ord}_p(a)$ で表す. \mathbb{Q}_p における非アルキメデスの絶対値 $| \cdot |_p$ を, $x \in \mathbb{Q}_p$ に対して,

$$|x|_p := \begin{cases} p^{-\text{ord}_p(x)} & x \neq 0 \text{ のとき,} \\ 0 & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定め,

$$\mathbb{Z}_p\langle X \rangle := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathbb{Z}_p[[X]] \mid |a_n|_p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \right\}$$

とおく. (3) に関連して, $u = 1$ の場合には, $p^2 - 1$ 次整数係数多項式 $\eta(X)$ および $f_r(X) \in \mathbb{Z}_p\langle X \rangle$, $r = 0, 1, \dots, p^2 - 1$, が存在して, $y = 0, 1, \dots$ に対して

$$h_{p^2y+r}(C_p) = p^{(p-1)y} f_r(y) \prod_{j=1}^y \eta(j) \quad (4)$$

および $\text{ord}_p(h_{p^2y+r}(C_p)) = (p-1)y + \text{ord}_p(f_r(y))$ が成り立つ (cf. [3, 7]).

本報告では (3) および (4) を一般化する [9] および [10] で得られた, 有限アーベル p 群 P に対する $h_n(P)$ の p 進的性質を紹介する.

1 巡回 p 群の場合

$A = \mathbb{Z}_p$ (加法群) のとき, $E_{\mathbb{Z}_p}(X)$ は Artin-Hasse exponential と呼ばれ,

$$E_{\mathbb{Z}_p}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(\mathbb{Z}_p)}{n!} X^n = \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} X^{p^k}\right) \in 1 + X\mathbb{Z}_p[[X]] \quad (5)$$

が成り立つ. このことは, 次の Dieudonné [2] による結果から得られる.

命題 1.1 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n = \exp(\sum_{i=0}^{\infty} \ell_i X^{p^i})$, $\ell_i \in \mathbb{Q}_p$, とするとき, $c_n \in \mathbb{Z}_p$, $n = 1, 2, \dots$, であるための必要十分条件は

$$\ell_i - \frac{\ell_{i-1}}{p} \in \mathbb{Z}_p, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (\ell_{-1} = 0)$$

が成り立つことである.

(5) は $\text{ord}_p(h_n(\mathbb{Z}_p)) \geq \text{ord}_p(n!)$ を意味する. この結果と (2), (3), および (5) を関係づける, 次のことが知られている (cf. [8, Lemma 25.5]).

補題 1.2 $n = n_0 + n_1p + n_2p^2 + \dots \in \mathbb{N}$, $0 \leq n_i \leq p-1$, とすると,

$$\text{ord}_p(n!) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j} \right] = \frac{n - n_0 - n_1 - n_2 - \dots}{p-1}$$

である. 特に $\text{ord}_p(n!) \leq (n-1)/(p-1)$ である.

例 1.3 $p = 2$ とすれば, Mathematica を用いて, 次を得る.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$h_n(\mathbb{Z}_2)/n!$	1	1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{67}{315}$	$\frac{88}{315}$	$\frac{617}{2835}$	$\frac{2626}{14175}$	$\frac{18176}{155925}$
n	12	13	14	15	16	17						
$h_n(\mathbb{Z}_2)/n!$	$\frac{6949}{66825}$	$\frac{423271}{6081075}$	$\frac{2172172}{42567525}$	$\frac{19151162}{638512875}$	$\frac{58438907}{638512875}$	$\frac{899510224}{10854718875}$						

(2) と (5) から次の式が成り立つ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(C_{p^u})}{n!} X^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(\mathbb{Z}_p)}{n!} X^n \right) \exp \left(- \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p^{u+i+1}} X^{p^{u+i+1}} \right)$$

さらに r を $0 \leq r < p^{u+1}$ を満たす整数として,

$$\sum_{y=0}^{\infty} \frac{h_{p^{u+1}y+r}(C_{p^u})}{(p^{u+1}y+r)!} X^{p^{u+1}y} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{h_{p^{u+1}j+r}(\mathbb{Z}_p)}{(p^{u+1}j+r)!} X^{p^{u+1}j} \right) \exp \left(- \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p^{u+i+1}} X^{p^{u+i+1}} \right)$$

となる. ここで $X^{p^{u+1}}$ を $-p^{u+1}X$ で置き換えて,

$$\begin{aligned} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{h_{p^{u+1}y+r}(C_{p^u})}{(p^{u+1}y+r)!} (-p^{u+1}X)^y &= \exp(X) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{h_{p^{u+1}j+r}(\mathbb{Z}_p)}{(p^{u+1}j+r)!} (-p^{u+1}X)^j \right) \\ &\times \exp \left((-1)^{p+1} \frac{p^{(u+1)p}}{p^{u+2}} X^p \right) \exp \left(- \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{p^{u+i+1}} (-p^{u+1}X)^{p^i} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

を得る (cf. [1]). 以下, この式に関する考察を進める. (5) から

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{h_{p^{u+1}j+r}(\mathbb{Z}_p)}{(p^{u+1}j+r)!} (-p^{u+1}X)^j \in \frac{h_r(\mathbb{Z}_p)}{r!} - \frac{h_{p^{u+1}+r}(\mathbb{Z}_p)}{(p^{u+1}+r)!} p^{u+1}X + p^{2(u+1)}X\mathbb{Z}_p\langle X \rangle$$

が成り立つ. $i \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ とすれば, $p^i = (1+p-1)^i \geq i(p-1) + p \geq i+2 \geq 4$ より

$$\begin{aligned} \text{ord}_p \left(\frac{p^{(u+1)p^i}}{p^{u+i+1}} \right) &\geq (u+1)p^i - (u+i+1) \\ &\geq p^i u + p^i - (u+i+1) \\ &\geq 4u + i + 2 - (u+i+1) \\ &\geq 3u + 1 \end{aligned}$$

である. ここで, 次の補題を用いる.

補題 1.4 k を正の整数とし, a を $\text{ord}_p(a) = k$ を満たす p 進整数とする. $p = 2$ かつ $k = 1$ の場合を除けば, 次のことが成り立つ.

$$\exp(aX) \in 1 + aX + \frac{a^2}{2}X^2 + \frac{a^3}{6}X^3 + p^{2k+1}X^4\mathbb{Z}_p\langle X \rangle$$

この補題から

$$\exp\left(-\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{p^{u+i+1}} (-p^{u+1}X)^{p^i}\right) \in 1 + p^{2u+1}X\mathbb{Z}_p\langle X \rangle$$

がわかる. また $p > 2$ のとき

$$\exp\left(\frac{p^{p(u+1)}}{p^{u+2}} X^p\right) \in 1 + p^{2u+1}X\mathbb{Z}_p\langle X \rangle$$

であり, $p = 2$ かつ $u > 1$ のとき

$$\exp(-2^u X^2) \in 1 - 2^u X^2 + 2^{2u-1} X^4 + 2^{2u+1} X^6 \mathbb{Z}_2\langle X \rangle$$

である. 以上から, $p = 2$ かつ $u = 1$ の場合を除いて,

$$\sum_{y=0}^{\infty} \frac{h_{p^{u+1}y+r}(C_{p^u})}{(p^{u+1}y+r)!} (-p^{u+1}X)^y = \exp(X) \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(r)} X^n$$

を満たし, $p > 2$ のとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(r)} X^n \in \frac{h_r(\mathbb{Z}_p)}{r!} - \frac{h_{p^{u+1}+r}(\mathbb{Z}_p)}{(p^{u+1}+r)!} p^{u+1}X + p^{2u+1}X\mathbb{Z}_p\langle X \rangle$$

であり, $p = 2$ のとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(r)} X^n \in \frac{h_r(\mathbb{Z}_2)}{r!} (1 - 2^u X^2 + 2^{2u-1} X^4) - \frac{h_{2^{u+1}+r}(\mathbb{Z}_2)}{(2^{u+1}+r)!} 2^{u+1}X + 2^{2u+1}X\mathbb{Z}_2\langle X \rangle$$

である数列 $\{d_n^{(r)}\}_{n=0}^{\infty}$ が存在する. 次の補題を用いる (cf. [1], [8, Theorem 54.4]).

補題 1.5 $\sum_{n=0}^{\ell} m_n X^n$ を \mathbb{Z}_p 係数の ℓ 次多項式とし, $\sum_{n=1}^{\infty} w_n X^n \in p^k X\mathbb{Z}_p\langle X \rangle$, k は非負整数とする. 数列 $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $d_0 = m_0$, $d_n = m_n + w_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, により定める. ここで $m_{\ell+1} = m_{\ell+2} = \dots = 0$ とする. このとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(n)}{n!} X^n = \exp(X) \sum_{n=0}^{\infty} d_n X^n \quad \text{かつ} \quad g(X) \in \sum_{i=0}^{\ell} m_i X^i + p^k X\mathbb{Z}_p\langle X \rangle$$

を満たす $g(X)$ が存在する. ここで X^i は次で定義される.

$$X^i = \begin{cases} X(X-1)\cdots(X-i+1) & \text{if } i \geq 1, \\ 1 & \text{if } i = 0. \end{cases}$$

この補題から次のことがわかる (cf. [5]).

定理 1.6 $p > 2$ または $u > 1$ とし, r を $0 \leq r < p^{u+1}$ を満たす整数とする. このとき

$$g_r(y) = \frac{h_{p^{u+1}y+r}(C_{p^u})}{(p^{u+1}y+r)!} (-p^{u+1})^y y!, \quad y = 0, 1, \dots$$

を満たし, $p > 2$ のとき

$$g_r(X) \in \frac{h_r(\mathbb{Z}_p)}{r!} - \frac{h_{p^{u+1}+r}(\mathbb{Z}_p)}{(p^{u+1}+r)!} p^{u+1} X + p^{2u+1} X \mathbb{Z}_p \langle X \rangle$$

であり, $p = 2$ のとき

$$g_r(X) \in \frac{h_r(\mathbb{Z}_2)}{r!} (1 - 2^u X^2 + 2^{2u-1} X^4) - \frac{h_{2^{u+1}+r}(\mathbb{Z}_2)}{(2^{u+1}+r)!} 2^{u+1} X + 2^{2u+1} X \mathbb{Z}_2 \langle X \rangle$$

である $g_r(X)$ が存在する.

$p = 2$ かつ $u = 1$ の場合, (6) において, X を $-X$ で置き換えて,

$$\begin{aligned} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{h_{4y+r}(C_2)}{(4y+r)!} (4X)^y &= \exp(X) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{h_{4j+r}(\mathbb{Z}_2)}{(4j+r)!} (4X)^j \right) \\ &\quad \times \exp(-2X - 2X^2) \exp\left(-\sum_{i=2}^{\infty} \frac{2^{2^{i+1}}}{2^{i+2}} X^{2^i}\right) \end{aligned}$$

の形に変形できる. さらに

$$\exp(-2X - 2X^2) \in (1 - 2X + 4X^2)(1 - 4X^2 - 4X^4) + 8X \mathbb{Z}_2 \langle X \rangle$$

であることが示される. このことと補題 1.5 から次のことがわかる (cf. [5]).

定理 1.7 ($p = 2$ かつ $u = 1$ の場合) r を $0 \leq r < 4$ を満たす整数とする. このとき

$$g_r(y) = \frac{h_{4y+r}(C_2)}{(4y+r)!} 4^y y!, \quad y = 0, 1, \dots$$

かつ

$$g_r(X) \in \frac{h_r(\mathbb{Z}_2)}{r!} (1 - 2X - 4X^4) + \frac{4h_{4+r}(\mathbb{Z}_2)}{(4+r)!} X + 8X \mathbb{Z}_2 \langle X \rangle$$

を満たす $g_r(X)$ が存在する.

次の定理 1.6 と定理 1.7 の系は, 補題 1.2 から得られ, (3) を導く (cf. [4, 5]).

系 1.8 r を $0 \leq r < p^{u+1}$ を満たす整数とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \text{ord}_p(h_{p^{u+1}y+r}(C_{p^u})) &\geq \sum_{j=1}^u \left[\frac{p^{u+1}y+r}{p^j} \right] - uy \\ &= \left\{ \frac{p^{u+1}-1}{p-1} - (u+1) \right\} y + \text{ord}_p(r!), \quad y = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

$g_r(X)$ は定理 1.6 や定理 1.7 で定義されるものとする. (4) を一般化するために

$$f_r(X) := g_r(X) \prod_{i=1}^r (p^{u+1}X + i) \in \mathbb{Z}_p\langle X \rangle,$$

$$\eta_{u+1}(X) := \frac{1}{p^{\frac{p^{u+1}-1}{p-1}-(u+1)}} \prod_{i=1}^{p^{u+1}-1} (p^{u+1}X - i)$$

とおく. 任意の非負整数 y に対して, 次が成り立つ.

$$p^{\frac{p^{u+1}-1}{p-1}y} \prod_{j=1}^y \eta_{u+1}(j) = \prod_{j=1}^y \frac{p^{u+1}(p^{u+1}j-1)!}{(p^{u+1}(j-1))!} = \frac{1}{y!} \prod_{j=1}^y \frac{(p^{u+1}j)!}{(p^{u+1}(j-1))!} = \frac{(p^{u+1}y)!}{y!} \quad (7)$$

(4) は次の様に一般化される.

定理 1.9 r を $0 \leq r < p^{u+1}$ を満たす整数とする. $p > 2$ または $u > 1$ のとき

$$h_{p^{u+1}y+r}(C_{p^u}) = p^{\left\{ \frac{p^{u+1}-1}{p-1}-(u+1) \right\}y} f_r(y) \prod_{j=1}^y (-\eta_{u+1}(j)), \quad y = 0, 1, \dots$$

であり, $p = 2$ かつ $u = 1$ のとき

$$h_{4y+r}(C_2) = 2^y f_r(y) \prod_{j=1}^y \eta_{u+1}(j), \quad y = 0, 1, \dots$$

である. さらに $\text{ord}_p(f_r(y)) \geq \text{ord}_p(r!)$, $y = 0, 1, \dots$ かつ $\eta_{u+1}(j) \not\equiv 0 \pmod{p}$, $y = 0, 1, \dots, j = 1, 2, \dots, y$ となっている.

2 一般の p 群の場合

P を位数 p^s の有限アーベル p 群とし, その型が $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, ただし $\sum \lambda_i = s$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$, であるとする. すなわち

$$P \simeq C_{p^{\lambda_1}} \times C_{p^{\lambda_2}} \times \dots$$

である. $i = 0, 1, \dots, s$ に対して P における位数 p^i の部分群の個数を $\alpha_\lambda(i; p)$ で表す. $a_{i,j}, i, j \in \mathbb{Z}$ を p によらずに λ および i のみにより定まる $\alpha_\lambda(i; p) = \sum_j a_{i,j} p^j$ を満たす非負整数とする. i あるいは j が負の数であれば, $a_{i,j} = 0$ とする. $\alpha_\lambda(i; p) = \alpha_\lambda(s-i; p)$ が成り立つので $a_{i,j} = a_{s-i,j}$ である. $\alpha_\lambda(0; p) = \alpha_\lambda(s; p) = 1$ であり, $\lambda_r \geq 1$ かつ $\lambda_{r+1} = 0$ ならば $\alpha_\lambda(1; p) = \alpha_\lambda(s-1; p) = 1 + p + \dots + p^{r-1}$ である.

命題 2.1 $\lambda = (u, v, 0, \dots)$ ならば $\alpha_\lambda(i; p)$ は次で与えられる.

$$\alpha_\lambda(i; p) = \begin{cases} 1 + p + \dots + p^i & 0 \leq i < v \text{ のとき,} \\ 1 + p + \dots + p^v & v \leq i \leq u \text{ のとき,} \\ 1 + p + \dots + p^{s-i} & u < i \leq s \text{ のとき.} \end{cases}$$

型 $\hat{\lambda} = (\lambda_2, \lambda_3, \dots)$ に対して, $\hat{a}_{i,j}, i, j \in \mathbb{Z}$ を p によらずに $\hat{\lambda}$ および i のみにより定まる $\alpha_{\hat{\lambda}}(i; p) = \sum_j \hat{a}_{i,j} p^j$ を満たす非負整数とする.

補題 2.2 $a_{i,j} - a_{i-1,j} = \hat{a}_{i,j-i} - \hat{a}_{s-i+1,j-s+i-1}$

$u + v = s$ を満たす, 非負整数 u および v を次のように定める.

$$u := \max \left\{ \lambda_1, \left\lceil \frac{s+1}{2} \right\rceil \right\}, \quad v := \min \left\{ s - \lambda_1, \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \right\}$$

定義 2.3 非負整数の組 $(\ell, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, ただし $m \leq s$, に対して, $b_{\ell,m} = a_{\ell,m} - a_{\ell-1,m-1}$ とおき, さらに $c_{\ell,m}$ を次のように定める.

$$c_{\ell,m} = \begin{cases} b_{\ell,m} - b_{\ell-1,m} & 0 \leq \ell \leq s-m \text{ かつ } 0 \leq m \leq v \text{ のとき,} \\ a_{\ell,m} - a_{\ell-1,m} & 0 \leq \ell \leq s-m \text{ かつ } v < m \leq s \text{ のとき,} \\ a_{m,\ell} & \ell > s-m \text{ のとき.} \end{cases}$$

次の定理は [9] で得られた.

定理 2.4 $E_P(X)$ は以下のように分解される.

$$E_P(X) = \Phi_\lambda(X) \prod_{m=0}^s \prod_{\ell=s-m+1}^{\infty} \exp(p^{\ell+m-s} X^{p^{s-m}})^{c_{\ell,m}},$$

$$\Phi_\lambda(X) = \prod_{m=0}^v \prod_{\ell=0}^m E_{C_{p^{u-\ell}} \times C_{p^{v-m}}} (X^{p^m})^{c_{\ell,m}} \prod_{m=v+1}^s \prod_{\ell=0}^{s-m} E_{C_{p^{s-\ell-m}}} (X^{p^m})^{c_{\ell,m}}$$

命題 2.5 $c_{\ell,m}$ は任意の非負整数 ℓ と m , ただし $m \leq s$, に対して負でない. 特に $c_{0,0} = 1$ であり, $m \geq 1$ ならば $c_{0,m} = 0$ である.

例 2.6 $\lambda = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots)$ とする. このとき $u = v = 3$ であり, 0 でない $a_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}$ は次で与えられる.

i	$a_{i,0}$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$	$a_{i,4}$	$a_{i,5}$	$a_{i,6}$	$a_{i,7}$	$a_{i,8}$	$a_{i,9}$
0	1									
1	1	1	1	1	1	1				
2	1	1	2	2	3	2	2	1	1	
3	1	1	2	3	3	3	3	2	1	1
4	1	1	2	2	3	2	2	1	1	
5	1	1	1	1	1	1				
6	1									

$0 \leq m \leq 6$ かつ $0 \leq \ell \leq 6 - m$ ならば $c_{\ell,m}$ は次で与えられる.

$$c_{\ell,m} = \begin{cases} 1 & (\ell, m) = (0, 0), (1, m) \text{ ただし } 2 \leq m \leq 5 \text{ のとき,} \\ 2 & (\ell, m) = (2, 4) \text{ のとき,} \\ 0 & \text{上記以外するとき.} \end{cases}$$

さらに $\Phi_\lambda(X)$ は次のように分解される.

$$\Phi_\lambda(X) = E_{C_{p^3} \times C_{p^3}}(X) E_{C_{p^2} \times C_p}(X^{p^2}) E_{C_{p^2}}(X^{p^3}) E_{C_p}(X^{p^4}) \exp(X^{p^4})^2 \exp(X^{p^5}).$$

例 2.7 $\lambda = (5, 1, 1, 1, 0, \dots)$ とする. このとき $u = 5 = \lambda_1$ かつ $v = 3$, であり, 0 でない $a_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}$ は次で与えられる.

i	$a_{i,0}$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$	$a_{i,4}$
0	1				
1	1	1	1	1	
2	1	1	2	2	1
3	1	1	2	3	1
4	1	1	2	3	1
5	1	1	2	3	1
6	1	1	2	2	1
7	1	1	1	1	
8	1				

$0 \leq m \leq 8$ かつ $0 \leq \ell \leq 8 - m$ ならば $c_{\ell,m}$ は次で与えられる.

$$c_{\ell,m} = \begin{cases} 1 & (\ell, m) = (0, 0), (1, 2), (1, 3), (2, 4) \text{ のとき,} \\ 0 & \text{上記以外するとき.} \end{cases}$$

さらに $\Phi_\lambda(X)$ は次のように分解される.

$$\Phi_\lambda(X) = E_{C_{p^5} \times C_{p^3}}(X) E_{C_{p^4} \times C_p}(X^{p^2}) E_{C_{p^4}}(X^{p^3}) E_{C_{p^2}}(X^{p^4}).$$

P に対して (4) が, 以下のように拡張される.

$$\kappa_p(u, v) = \begin{cases} u + 3 & (p = 2, u = v \geq 1 \text{ のとき}) \\ u + 2 & (p = 2, u = v + 1 \geq 2 \text{ または } p = 3, u = v \geq 1 \text{ のとき}) \\ u + 1 & (p = 2, u = v = 0 \text{ または } p = 3, u + \delta_{v0} = v + 1 \text{ のとき}) \\ u + 1 & (p > 3 \text{ または } u + \delta_{v0} > v + 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおく. また, 非負整数 n に対して

$$\tau_p^{(u,v)}(n) = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^u \left[\frac{n}{2^j} \right] + \left[\frac{n}{2^{u+2}} \right] - \left[\frac{n}{2^{u+3}} \right] \right) & (p = 2, u = v \geq 1 \text{ のとき}) \\ \left(\sum_{j=1}^u \left[\frac{n}{p^j} \right] - (u - v) \left[\frac{n}{p^{u+1}} \right] \right) & (p > 2 \text{ または } u + \delta_{v0} \geq v + 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおく. このとき, 次の定理が成り立つ (cf. [10]). (最後の主張は [6, 9] で示された.)

定理 2.8 $p = 2, u + \delta_{v0} = v + 1$ または $p = 2, \lambda_3 \geq 1, u = v$ の場合を除き, $p^{\kappa_p(u,v)} - 1$ 次整数係数多項式 $\eta(X)$ および $f_r(X) \in \mathbb{Z}_p\langle X \rangle, r = 0, 1, \dots, p^{\kappa_p(u,v)} - 1$ が存在して,

$$h_{p^{\kappa_p(u,v)}y+r}(P) = p^{\tau_p^{(u,v)}(p^{\kappa_p(u,v)}y)} f_r(y) \prod_{j=1}^y \eta(j), \quad y = 0, 1, \dots$$

および

$$\text{ord}_p(h_{p^{\kappa_p(u,v)}y+r}(P)) = \tau_p^{(u,v)}(p^{\kappa_p(u,v)}y) + \text{ord}_p(f_r(y)), \quad y = 0, 1, \dots$$

が成り立つ. また, すべての場合で $\text{ord}_p(h_n(P)) \geq \tau_p^{(u,v)}(n), n = 0, 1, \dots,$ となる.

次の定理は [6, 9] で得られた.

定理 2.9 (1) $p = 2$ かつ $u = v \geq 1$ の場合を除いて, $n \equiv 0 \pmod{p^{u+1}}$ を満たす任意の非負整数 n に対して $\text{ord}_p(h_n(P)) = \tau_p^{(u,v)}(n)$ となる.

(2) $p = 2$ かつ $u = v \geq 1$ とする.

- (a) $\lambda_3 = 0$ ならば, $n \equiv 0, 2^{u+1},$ あるいは $2^{u+2} \pmod{2^{u+3}}$ を満たす任意の非負整数 n に対して $\text{ord}_2(h_n(P)) = \tau_2^{(u,v)}(n)$ となる.
- (b) $\lambda_3 \geq 1$ ならば, $n \equiv 0, 2^{u+1},$ あるいは $2^{u+1} + 2^{u+2} \pmod{2^{u+3}}$ を満たす任意の非負整数 n に対して $\text{ord}_2(h_n(P)) = \tau_2^{(u,v)}(n)$ となる.

上記の2つの定理には, 定理 2.4 における $\Phi_\lambda(X)$ の因子中に現れる $E_{C_{p^u} \times C_{p^v}}(X)$ の性質が大きく影響している. $P = C_{p^u} \times C_{p^v}$ の場合には, 以下のような方法を用いて, 結果を導く. 整数 k に対して, 記号 $[k]_p$ を

$$[k]_p = \begin{cases} \sum_{j=0}^{k-1} p^j & k \geq 1 \text{ のとき,} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

と定める. Eq.(1) より 次の式を得る.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(P)}{n!} X^n \\ &= \exp \left(\sum_{k=0}^{v-1} \frac{[k+1]_p}{p^k} X^{p^k} + \sum_{k=v}^u \frac{[v+1]_p}{p^k} X^{p^k} + \sum_{k=u+1}^{u+v} \frac{[u+v-k+1]_p}{p^k} X^{p^k} \right) \end{aligned}$$

形式的べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(v)} X^n$ を次で定義する.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(v)} X^n = \exp \left(\sum_{k=0}^{v-1} \frac{[k+1]_p}{p^k} X^{p^k} + \sum_{k=v}^{\infty} \frac{[v+1]_p}{p^k} X^{p^k} \right)$$

命題 1.1 より $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(v)} X^n \in X\mathbb{Z}_p[[X]]$ が成り立つ. また

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(P)}{n!} X^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(v)} X^n \right) \exp \left(- \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[v+1]_p - [v-i]_p}{p^{u+i+1}} X^{p^{u+i+1}} \right).$$

であることがわかる. さらに r を $0 \leq r < p^{u+1}$ を満たす整数とすれば,

$$\begin{aligned} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{h_{p^{u+1}y+r}(P)}{(p^{u+1}y+r)!} X^{p^{u+1}y} &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_{p^{u+1}j+r}^{(v)} X^{p^{u+1}j} \right) \\ &\quad \times \exp \left(- \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[v+1]_p - [v-i]_p}{p^{u+i+1}} X^{p^{u+i+1}} \right) \end{aligned}$$

を得る. $P = C_{p^u} \times C_{p^v}$ の場合, 定理 2.8, 2.9 はこの式を利用して証明される.

最後に, $E_p(X)$ の p 進的性質を, 定理 2.8 および定理 2.9 の系として記す (cf. [9]).

系 2.10 p 進べき級数 $E_P(X)$ の収束域は $|x|_p < p^a$, ただし

$$a = \begin{cases} -\frac{7}{2^{u+3}} & p = 2 \text{ かつ } u = v \geq 1 \text{ のとき,} \\ -\frac{1}{p^u(p-1)} - \frac{u-v}{p^{u+1}} & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

である.

参考文献

- [1] K. Conrad, p -adic properties of truncated Artin-Hasse coefficients, 1998, preprint.
- [2] J. Dieudonné, On the Artin-Hasse exponential series, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 210–214.
- [3] H. Ishihara, H. Ochiai, Y. Takegahara, and T. Yoshida, p -divisibility of the number of solutions of $x^p = 1$ in a symmetric group, Ann. Comb. **5** (2001), 197–210.
- [4] H. Katsurada, Y. Takegahara, and T. Yoshida, The number of homomorphisms from a finite abelian group to a symmetric group, Comm. Algebra **28** (2000), 2271–2290.
- [5] T. Koda, M. Sato, and Y. Takegahara, 2-adic properties for the numbers of involutions in the alternating groups, J. Algebra Appl., **14** (2015), 1550052, 21pp.
- [6] C. Krattenthaler and T. W. Müller, Truncated versions of Dwork’s lemma for exponentials of power series and p -divisibility of arithmetic functions, Adv. Math. **283** (2015), 489–529.
- [7] H. Ochiai, A p -adic property of the Taylor series of $\exp(x + x^p/p)$, Hokkaido Math. J. **28** (1999), 71–85.
- [8] W. H. Schikhof, Ultrametric Calculus, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [9] Y. Takegahara, The number of homomorphisms from a finite abelian group to a symmetric group (II), Comm. Algebra, **44** (2016), 2402–2442.
- [10] Y. Takegahara, p -adic estimates of the number of permutation representations, Adv. Math. **349** (2019), 267–425.
- [11] K. Wohlfahrt, Über einen Satz von Dey und die Modulgruppe, Arch. Math. (Basel) **29** (1977), 455–457.