統計的仮説検定を用いた
課題研究における表計算ソフトの活用

岡山県立倉敷天城中学校　有元 康一
Koichi Arimoto, Okayama Prefectural Kurashiki Amaki Junior High School

1　はじめに

本研究では, 中学校数学科における課題研究の素材として統計的仮説検定（以後,「仮説検定」と述べる）を取りあげ, 数学理論の成果を課題研究の素材として再構成し, 課題研究の素材および事例として提供することにより,「主体的・対話的で深い学び」の実現を目指すことを目的とする. 統計教育について, 日本学術会議第 24 期数理科学委員会数学教育分科会 [1] は, 「データを活用し, 意思決定につながる問題解決の方法として, 算数・数学科での統計的な方法や考え方を体得するべきである.」と統計教育の実効性を高めることを提言している. 中学校においては, 来年度の 2021 年 (令和 3 年) 度には, 新学習指導要領 [2] が全面実施となるが, 統計を含んだデータサイエンスの分野についての指導の充実が喫緊の課題となっている. このような現状を踏まえ, 仮説検定を用いた課題研究の指導を行うのに際して, 事前にまとめた仮説検定に関する内容, および, 事前に教材研究として行った仮説検定の例, そして, その研究指導の構想等を述べ, 指導過程における表計算ソフトの活用方法を例示する. また, 今回構想し, 実践している研究指導の手順や方法は, 仮説検定の意義や意味, および, その手順や流れを理解するための一つの有益な指導方法となり得るものであることを主張する. なお, 本研究で取り扱う題材は, 中学生だけでなく高校生等の課題研究においても研究テーマとなり得るものである.

2　背景となる仮説検定の内容

ここでは, 仮説検定に関して, 基本的な内容を示す ([3]-[6]). まず, 確率分布について述べ, 特に正規分布や t 分布についてまとめる. 次に, 仮説検定の考え方を述べ, t 検定についてまとめる.

2.1　確率分布

2.1.1　母集団と標本

ここでは, 平均値, 分散, 不偏分散について定義し, 確率分布を定義する.

定義 1　考察しようとする対象全体のことを**母集団**と呼び, その中から無作為に取り出したもののことを**標本**と呼ぶ. また, 母集団から標本を取り出すことを**サンプリング**（**標本抽出**）と言う.

定義 2　n 個のデータ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して, その**平均値** $\overline{x}$ を

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_i, \tag{1}$$

分散 σ^2 を

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2, \tag{2}$$

不偏分散 s^2 を

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2, \tag{3}$$

で与える. 分散は母集団に対して, 不偏分散は標本に対して与えられる. 標本におけるデータは, 母集団の平均値の影響下にあると考えられるため, 自由度は $n-1$ とする.

母集団の要素数について, 実際の現象では必ずしも有限の要素数を想定するのが適切でない場合がある. 例えば, ある地点の温度を繰り返し計測する場合には, 有限の要素から標本をとるわけではなく, 本質的にある分布で表現される誤差に従ってばらつく, と考えるのが自然である. この場合, 母集団が確率分布に従っていて, 標本はその実現や実現値であると考える方が自然である. 以降, 母集団についてはある確率分布に従っており, 標本はその実現であると考えて議論する [3, p.109].

定義 3　母集団の確率分布を**母集団分布**と呼び, その形を規定するものを母集団分布の**パラメータ**と呼ぶ.

定義 4　ある試行結果 (事象) に対して, 特定の値をとる変数を**確率変数**という. 確率変数 X に対して, $X = k$ であるときの確率を $P(X = k)$ とかく.

例 5　サイコロを投げて出た目を X とする. このとき

$$P(X = 1) = \cdots = P(X = 6) = \frac{1}{6}. \tag{4}$$

定義 6　確率変数 X と確率 $P(X)$ との対応関係を**確率分布という.**

2.1.2　正規分布

ここでは, 確率分布として, 2 項分布とそれを実数に拡張した正規分布を定義する ([3],[4]).

命題 7　ある事象の起こる確率が p であるとき, n 回の試行でその事象が k 回起こる確率 $P(X = k)$ は

$$P(X = k) = {}_nC_k\, p^k(1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \cdots, n) \tag{5}$$

で与えられる.

定義 8　(5) で与えられる確率分布を 2 **項分布**と呼び, $B(n,p)$ で表す．このとき確率変数 X は 2 **項分布に従う**といい, $X \sim B(n,p)$ と書く．

命題 9　2 項分布 (5) において, n が十分に大きいとき次の近似式

$$ {}_nC_k\ p^k(1-p)^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(k-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{6} $$

が成り立つ (ド · モアブル-ラプラスの定理).

定義 10　定義 *8* で定義した, 2 項分布における (5) において, k を実数 x に拡張した,

$$ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{7} $$

で与えられる確率分布を**正規分布**と呼び, $N(\mu,\sigma^2)$ で表す．ここで, μ,σ^2 はパラメータであり, それぞれ平均値と分散である．このとき確率変数 X は**正規分布に従う**といい, $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ と書く．

命題 11　定義 *10* における確率変数 X に次の変換

$$ Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \tag{8} $$

を施したとき, $Z \sim N(0,1)$ である．この $N(0,1)$ のことを特に**標準正規分布**と呼ぶ.

2.1.3　t 分布

ここでは, 確率分布として, t 分布を定義する ([3]).

定義 12　実数 α に対して

$$ \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\ dx \tag{9} $$

を**ガンマ関数**という．ここで, e は自然対数の底である．特に α が正の整数の場合には $(\alpha-1)!$ となる．

定義 13　次の関数

$$ f(t,\nu) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}(\nu/2)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \tag{10} $$

で与えられる確率分布を t **分布**という．ただし $\nu > 0$ である．このパラメータ ν を**自由度**と呼ぶ.

2.2 仮説検定

定義 14 仮説検定とは, 母集団のパラメータに対する仮説を立て, それが正しいかどうかを判断する方法である.

仮説検定の基本は「背理法」である. 背理法は, 結論を否定することを仮定し, 矛盾を導く方法である [3, p.140].

定義 15 仮説検定において, 結論の否定のことを帰無仮説といい H_0 と書く. また, H_0 の否定（本来示したい仮説）を対立仮説といい H_1 と書く.

2.2.1 t 検定

母集団の分散については, 通常は既知ではありえないので, 未知として平均の検定をする方法が考えられている. これが t 検定と呼ばれるものである. 仮説検定には, 母集団の平均に関する t 検定, 分散に関する F 検定などがある ([3]).

定義 16 $\overline{x}$ を標本の平均, n をデータの個数, s_n を不偏分散から計算される標準偏差であるとする. このとき, t 検定における t 統計量を次の式によって定義する.

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s_n/\sqrt{n}}. \tag{11}$$

定義 17 帰無仮説を棄却するか否かを決める, 境界的な確率の値を有意水準といい, α で表す. 通常, 有意水準は, $\alpha = 0.01$ または 0.05 とすることが多い ([6]).

定義 18 自由度 ν の t 分布の片側上位 $100 \times \alpha$ パーセントの値を $t_\alpha(\nu)$ で表す.

以後, 2 つの異なる母集団について, 母集団の平均に差があるか否かを検証する方法について取り扱う. 2 つの母集団の分散が等しい場合と異なる場合で計算すべき手順が異なる. また, 母集団の分散が未知であることが多いため, 未知の場合のみ考える.[3, p145-146]

2.2.2 母集団の分散が等しい場合の t 検定

定義 19 [*3, p.*146] 2 つの異なる母集団 A, B それぞれの分散が等しいことが分かっている場合に, 集団間で平均が異なっているかを検証する検定をステューデントの t 検定と呼ぶ. それぞれの標本のデータの個数を n_A, n_B, 不偏分散を s_A^2, s_B^2 としたとき, これから合成した分散を

$$s_{A,B}^2 = \frac{(n_A - 1)s_A^2 + (n_B - 1)s_B^2}{n_A + n_B - 2} \tag{12}$$

と定義する. さらに, これから t 統計量を

$$t = \frac{\mu_A - \mu_B}{\sqrt{s_{A,B}^2(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B})}} \tag{13}$$

として与える. ここで, μ_A, μ_B は A, B の標本平均である.

定義 19 における t 統計量 (13) を, 自由度 $n_A + n_B - 2$ の t 分布と比較し, 片側検定の場合, $t > t_\alpha(n_A + n_B - 2)$ のとき帰無仮説 H_0 を棄却する. 両側検定の場合は, $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n_A + n_B - 2)$ との比較となる.

2.2.3 母集団の分散が等しくない場合の t 検定

定義 20 [3, p.146] 2 つの異なる母集団 A, B それぞれの分散が等しくない場合に, 集団間で平均が異なっているかを検証する検定を**ウェルチの t 検定**と呼ぶ. それぞれの標本のデータの個数を n_A, n_B, 不偏分散を s_A^2, s_B^2 としたとき, t 統計量を

$$t = \frac{\mu_A - \mu_B}{\sqrt{\left(\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}\right)}} \tag{14}$$

として与える. ここで, μ_A, μ_B は A, B の標本平均である. 比較する t 分布の自由度は

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}\right)^2}{\frac{s_A^4}{n_A^2(n_A-1)} + \frac{s_B^4}{n_B^2(n_B-1)}} \tag{15}$$

として与えられる.

定義 20 における t 統計量 (14) を, 自由度 ν の t 分布と比較し, 片側検定の場合, $t > t_\alpha(\nu)$ のとき帰無仮説 H_0 を棄却する. 両側検定の場合は, $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(\nu)$ との比較となる.

3 表計算ソフトを活用した t 検定の実施例

ここでは, 実際に課題研究の指導を行うに際して, 教師の教材研究として t 検定を行った例を提示する. 永岡 [7] を参考にして, 気象庁 [8],[9] から, 倉敷市の 2000 年 8 月と 2020 年 8 月の気温の平均を題材とした例である. 実際に課題研究の指導を行った際には, 生徒が興味をもち, 生徒自身が選んだ題材で検定を行った.

3.1 教材研究として行った仮説検定

倉敷市の 8 月の 1 日ごとの平均気温について, 2000 年と 2020 年では平均値に有意な差があるかについて t 検定を行った. 母集団 A を 2000 年 8 月の 1 日ごとの平均気温, 母集団 B を 2020 年 8 月の 1 日ごとの平均気温として, 定義 20 によるウェルチの t 検定を適用した. ここで,

帰無仮説 H_0 : 母集団 A と母集団 B の平均値は等しい,

対立仮説 H_1 : 母集団 A と母集団 B の平均値は等しくない.

として, それぞれの標本のデータの個数は $n_A = n_B = 31$ であり, 標本平均は $\mu_A = 28.45$, $\mu_B = 29.73$ であった. 定義 2 の式 (3) によって得られる不偏分散は $s_A^2 = 0.51$, $s_B^2 = 0.94$

であり, 式 (14) によって得られる t 統計量は $t = -5.90$, t 分布の自由度は $\nu = 55$ であった. ここで t 統計量を自由度 $\nu = 55$ の t 分布と比較した. 両側検定で, 有意水準 $\alpha = 0.05$ としたとき, $t_{0.025}(55) = 2.00$ であり, $|t| > t_{0.025}(55)$ より帰無仮説を棄却した. ただし, 上記で提示した値は小数第 3 位を四捨五入している. また, 倉敷市の平均気温のデータは次の通りである (表 1).

表 1: 倉敷市の平均気温のデータ

日	2000年8月	2020年8月	日	2000年8月	2020年8月
1	28.5	27.7	16	29.4	31.1
2	27.1	28.7	17	27.5	30.5
3	28.0	28.1	18	27.0	30.6
4	28.9	28.1	19	27.3	30.6
5	29.5	28.6	20	27.5	30.7
6	29.4	28.8	21	29.0	30.9
7	28.9	28.8	22	29.2	29.7
8	27.9	28.3	23	28.8	29.2
9	27.6	29.5	24	29.1	29.5
10	28.5	30.4	25	29.1	29.8
11	28.3	29.6	26	29.2	29.9
12	29.0	29.4	27	28.8	29.6
13	29.0	30.2	28	28.4	30.5
14	28.2	31.0	29	28.5	30.5
15	28.3	31.1	30	27.7	29.8
			31	28.4	30.5
			最大値	29.5	31.1
			最小値	27.0	27.7
			平均値	28.5	29.7

3.2 表計算ソフトの活用

ここでは, 表計算ソフトである Micrisoft Excel を活用した実際を示す. t 検定を行うためには, データを入力後に, 「データ」タブを選択し「データ分析」メニューをクリックする. 「データ分析」ウィンドウ (図 1) が表示されるので, 「t 検定:分散が等しくないと仮定した 2 標本による検定」を選択する.

次に「t 検定: 分散が等しくないと仮定した 2 標本による検定」というウィンドウ（図 2）が表示されるので, 入力元の「変数 1 の入力範囲」を 2000 年 8 月の平均気温のデータ, 「変数 2 の入力範囲」を 2020 年 8 月の平均気温のデータの範囲を入力 (選択) する. 有意水準 (a) は 5% の場合は 0.05 とする. また, 出力オプションとして, 出力先を指定する.

今回の場合の検定結果として出力されたものを以下に示す (図 3).

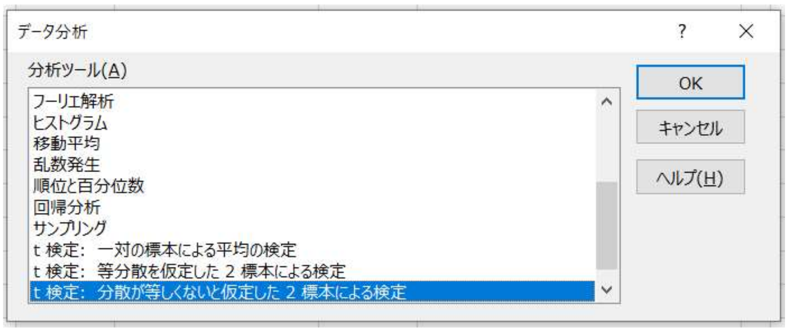

図 1: 「データ分析」ウィンドウ

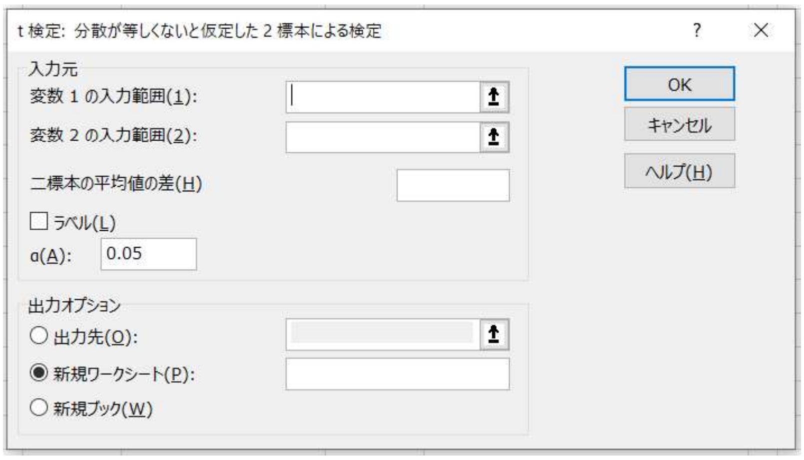

図 2: 「t 検定」ウィンドウ

t-検定: 分散が等しくないと仮定した 2 標本による検定

	2000年8月	2020年8月
平均	28.451613	29.732258
分散	0.5132473	0.9449247
観測数	31	31
仮説平均との差異	0	
自由度	55	
t	-5.904801	
P(T<=t) 片側	1.146E-07	
t 境界値 片側	1.673034	
P(T<=t) 両側	2.291E-07	
t 境界値 両側	2.0040448	

図 3: t 検定の結果

4　課題研究としての指導

実際に課題研究の指導を行う際は, 生徒が考えている研究テーマや研究方法について, それらが妥当なものとなるように指導や助言が必要である. 推論において論理に飛躍はないか, 文献の読み取りや理解は正確であるか, データの収集や活用方法は適切であるかなど様々な点から考える必要がある.

本研究で取りあげた仮説検定についての課題研究においては, 中学生の場合はその内容を未習であるため, 必要な内容については, 指導者が講義することにより, 基礎的内容を理解させる必要がある. ガンマ関数など積分の概念もあるが, 生徒の関心や理解の実態に応じて平易に解説する. そのうえで, 表計算ソフトを活用して検定を実施し, 表計算ソフトの使用方法のみの指導にならないようにすることが重要である.

今回の指導では, 第 2 節で提示した, 仮説検定の内容のなかから必要な部分を生徒に解説し, その後, 生徒が実際に興味をもった内容について, 表計算ソフトである Microsoft Excel を用いて, 第 3 節 (3.2) で提示した手順で仮説検定を行った. 今回は, 関数を入力するのではなく,「データ分析」ウィンドウ (図 1) を活用した. 今回の実際の指導により, 上記で述べたような, 教師が確率分布や仮説検定の基礎的な内容を指導したうえで, 生徒が表計算ソフトを活用して仮説検定を実施することは, 仮説検定の意義や意味, および, その手順や流れを理解するための一つの有益な指導方法であることが示唆された.

5　結語

本論文では, 仮説検定を用いた課題研究について,「主体的・対話的で深い学び」の実現を目的とした, 表計算ソフトを用いた教材開発の一例を提示し, その有効性について論じた. 今回提案した内容は, 仮説検定を用いた課題研究における一つの指導方法となり得るものであると考える.

謝辞

著者による RIMS 共同研究「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究」における講演に対して, 有益な御助言をいただきました先生方に御礼を申し上げます.

参考文献

[1] 日本学術会議 第 24 期数理科学委員会数学教育分科会 :『新学習指導要領下での算数・数学教育の円滑な実施に向けた緊急提言：統計教育の実効性の向上に焦点を当てて』, p.18, 2020.

[2] 文部科学省 :『中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説 数学編』, 2017.

[3] 中村和幸:『基幹講座 数学 統計学』, 東京図書, 2017.

[4] 白石修二:『例題で学ぶ Excel 統計入門 (第 2 版)』, 森北出版, 2012.

[5] 上藤一郎, 西川浩昭 他:『データサイエンス入門 -Excel で学ぶ統計データの見方・使い方・集め方-』, オーム社, 2018.

[6] 山内光哉:『心理・教育のための統計法 (第 2 版)』, サイエンス社, 1998.

[7] 永岡淳一:『千葉市の気候は 1970 年代と 2000 年代で異なるか?』, https://www3.cuc.ac.jp/~nagaoka/2011/ouyou/09/chiba/answer.html (2020 年 11 月 22 日最終閲覧)

[8] 気象庁:「倉敷 2000 年 8 月 (日ごとの値)」(倉敷市の 2000 年 8 月データ) http://www.data.jma.go.jp/obd/stats/etrn/view/daily_a1.php?prec_no=66&block_no=0669&year=2000&month=08&day=&view=p1 (2020 年 11 月 21 日最終閲覧)

[9] 気象庁:「倉敷 2020 年 8 月 (日ごとの値)」(倉敷市の 2020 年 8 月データ) http://www.data.jma.go.jp/obd/stats/etrn/view/daily_a1.php?prec_no=66&block_no=0669&year=2020&month=08&day=&view=p1 (2020 年 11 月 21 日最終閲覧)