

# 面積保存エノン写像の周期点に関する変分解析およびモース指数と分岐の関係について

京都大学大学院情報学研究科 柴山允瑠

Mitsuru Shibayama

Graduate School of Informatics, Kyoto University

京都大学工学部情報学科 山田光隆

Mitsutaka Yamada

Undergraduate School of Informatics and Mathematical Science,  
Faculty of Engineering, Kyoto University

## 概要

2次元の離散力学系である面積保存 Hénon 写像の  $n$  周期点について、パラメータが十分に大きい場合には  $2^n$  個存在することが Devaney & Nitecki の結果によりわかる。本論文では、まずその結果を変分構造の観点から説明する。その後、パラメータの変化による周期点の分岐と Morse 指数の変化の関係について詳しく解析し、特に 2 周期点、3 周期点、4 周期点の場合についてその解析結果を報告する。また、その解析結果から予想される周期点の個数の変化と Morse 指数の変化の関係について述べる。

## 1 はじめに

Hénon 写像とは次のような  $\mathbb{R}^2$  上の写像である [4]:

$$\Phi(x, y) = (a - x^2 + by, x).$$

Hénon 写像は  $b = -1$ , すなわち

$$\Phi(x, y) = (a - x^2 - y, x)$$

のとき面積保存写像となり、このとき  $\Phi$  は後に述べる変分構造を持つ。以降はこの写像について考える。

Devaney & Nitecki [1] は Hénon 写像が 2-symbol full shift と共役となる部分集合を持つ十分条件を与えているが、特に面積保存 Hénon 写像の場合は次のようになる。

**定理 1.1** ([1]).  $a > \frac{1}{2}(5 + 2\sqrt{5})$  ならば、 $\Phi$  は 2-symbol full shift と共役となるような不変部分集合を持つ。

この結果より  $a > \frac{1}{2}(5 + 2\sqrt{5})$  が満たされているとき  $\Phi$  が  $2^n$  個の  $n$  周期点を持つことがわかる。一方、 $a < -1$  では全く周期軌道が存在しないことが容易にわかる。これはよく知られていることかと思われるが、証明を付録に述べておく。

本論文では、変分構造の観点からこの Devaney & Nitecki によって示された結果を述べ、その後 Devaney & Nitecki の仮定が満たされないような一般の場合の周期点の個数の変化、さらにそれに伴う Morse 指数の

変化の関係について述べる.

以下が主定理である. なお Morse 指数の定義については後ほど第 2 節で述べる.

**定理 1.2.** 面積保存 Hénon 写像の  $n$  周期点について,  $B_\gamma$  を Morse 指数が  $\gamma$  であるような周期点の個数とすると, 次の等式がほとんど全ての  $a$  について成り立つ:

$$\sum_{\gamma=0}^n (-1)^\gamma B_\gamma = 0.$$

「ほとんど全ての  $a$ 」とは, 後で定める作用  $H$  が Morse 関数になるような  $a$  をいう.

**定理 1.3.** 面積保存 Hénon 写像の  $n$  周期点 ( $n = 2, 3, 4$ ) の分岐と Morse 指数の偶奇について, 以下のような関係が成り立つ.

- サドルノード分岐により周期点が衝突し消滅 (生成) する場合は, Morse 指数が偶数と奇数の組で衝突し消滅 (生成) する.
- 周期倍分岐が起こる場合は, Morse 指数が奇数の  $n$  周期点から Morse 指数が奇数の  $2n$  周期点が 2 個分岐, 元となった  $n$  周期点の Morse 指数は偶数に変化する.

次節では, 変分構造と Morse 指数について述べ, 変分構造の臨界点が面積保存写像の周期点に対応していることについて証明を与える. 第 3 節では, 今回考える面積保存 Hénon 写像についての変分構造を述べ, 主定理を示す. 第 4 節では, パラメータ  $a$  が十分大きい場合について, Devaney & Nitecki によって示された結果を変分構造の観点から確認する. 第 5 節では, 2, 3, 4 周期点についてパラメータの変化による周期点の個数の変化, さらに Morse 指数と分岐の関係について解析結果を示し, 主定理が成り立っていることを  $n = 2, 3, 4$  の順に追って確認する.

## 2 準備

### 2.1 面積保存写像の変分構造

$\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を面積保存写像とする:

$$\Phi(x, y) = (X, Y)$$

と書く. 以下, ツイスト条件  $\frac{\partial X}{\partial y} \neq 0$  を仮定する.

$\Phi$  が面積保存写像であることから,

$$dy \wedge dx = dY \wedge dX \Leftrightarrow d(YdX - ydx) = 0$$

が成り立ち, ポアンカレの補題から

$$dS = YdX - ydx$$

を満たす  $S(x, X)$  が存在する. この  $S$  を  $\Phi$  の母関数という. 上式より  $S$  は

$$\frac{\partial S}{\partial X} = Y, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = -y$$

の関係式を満たす.

$n$  を自然数とし,  $x_{n+1} = x_1$  とする ( $n$  周期境界条件).  $n$  周期境界条件における写像  $\Phi$  の作用  $H$  を

$$H(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n S(x_i, x_{i+1})$$

で定義する.

**命題 2.1.**  $H$  の臨界点, すなわち

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

を満たす点  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$  に対し,  $q_i = -\frac{\partial S}{\partial x}(p_i, p_{i+1})$  ( $i = 1, \dots, n, p_{n+1} = p_1$ ) とおくと,  $\{(p_i, q_i)\}_{i=1}^n$  は写像  $\Phi$  の  $n$ -周期軌道である.

**証明.**  $\mathbf{p}$  が  $H$  の臨界点のとき

$$\frac{\partial S}{\partial X}(p_{i-1}, p_i) + \frac{\partial S}{\partial x}(p_i, p_{i+1}) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

が成り立つ. ここで,  $i = 1, \dots, n$  について

$$q_i = \frac{\partial S}{\partial X}(p_{i-1}, p_i)$$

とおくと,

$$q_{i+1} = \frac{\partial S}{\partial X}(p_i, p_{i+1}) \quad (2)$$

であり, また (1) 式から

$$q_i = -\frac{\partial S}{\partial x}(p_i, p_{i+1}) \quad (3)$$

となる. (2), (3) 式と  $\frac{\partial S}{\partial X} = Y, \frac{\partial S}{\partial x} = -y$  より

$$\Phi(p_i, q_i) = (p_{i+1}, q_{i+1}) \quad (i = 1, \dots, n)$$

が成り立つ (これは  $\Phi(p_n, q_n) = (p_1, q_1)$  を含んでいる).  $\square$

## 2.2 Morse 指数

**定義 2.2** ([3]).  $M$  を多様体とし,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  を  $C^2$  級関数とする.  $f$  の任意の臨界点における Hesse 行列  $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j}$  が正則のとき,  $f$  を Morse 関数という.

**定義 2.3** ([3]). Morse 関数の各臨界点について, その点における Hesse 行列  $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j}$  の負の固有値の数を Morse 指数という.

なお, コンパクトな多様体上においては, Morse 指数について以下の命題 2.5 が成り立つが, 今回考えている面積保存 Hénon 写像の場合,  $H$  は  $\mathbb{R}^n$  上の関数であるためこれは保証されていない.

**命題 2.4** ([3]).  $n$  次元コンパクト多様体  $M$  上の任意の Morse 関数に対し,  $B_\gamma$  を Morse 指数が  $\gamma$  であるような臨界点の個数とすると

$$\sum_{\gamma=0}^n (-1)^\gamma B_\gamma = \chi(M)$$

が成り立つ.  $\chi(M)$  は  $M$  の Euler 標数である.

### 3 面積保存 Hénon 写像の変分構造と定理 1.2 の証明

#### 3.1 変分構造

面積保存 Hénon 写像

$$\Phi(x, y) = (X, Y) = (a - x^2 - y, x)$$

の母関数  $S(x, X)$  は

$$S(x, X) = xX - ax + \frac{1}{3}x^3$$

$$\left( \frac{\partial S}{\partial X} = x (= Y), \quad \frac{\partial S}{\partial x} = X - a + x^2 (= -y) \right)$$

である。よって、 $n$  周期境界条件における作用  $H$  は、

$$H(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \left( x_i x_{i+1} - ax_i + \frac{1}{3}x_i^3 \right)$$

と表される。この  $H$  の臨界点が面積保存 Hénon 写像の  $n$  周期点に対応する。

#### 3.2 パラメーターが十分に大きいときの $n$ 周期点の個数

anti-integrable limit と呼ばれる  $a \gg 1$  の場合の変分構造について述べる。  $x_i = a^{\frac{1}{2}}y_i$  とすると、

$$a^{-\frac{3}{2}}H(a^{\frac{1}{2}}y_1, \dots, a^{\frac{1}{2}}y_n) = \sum_{i=1}^n \left( a^{-\frac{1}{2}}y_i y_{i+1} - y_i + \frac{1}{3}y_i^3 \right)$$

$$\sim \sum_{i=1}^n \left( -y_i + \frac{1}{3}y_i^3 \right) \quad (a \gg 1)$$

$a$  が十分に大きい時は各  $y_i$  が  $-y_i + \frac{1}{3}y_i^3$  の臨界点  $\pm 1$  になっていればよく、 $\pm$  は  $i$  に独立に選べるので  $2^n$  個の臨界点 (面積保存 Hénon 写像の周期点) が求まり、これは Devaney & Nitecki の結果と一致する。Sterling & Meiss [7] はこの変分構造と縮小写像の原理を用いて、十分大きな  $a > 0$  を固定すると、各  $n \in \mathbb{N}$  に対し  $2^n$  個の周期点が存在することを証明している。

#### 3.3 定理 1.2 の証明

十分大きな  $K > 0$  をとると、 $H$  の臨界点は全て  $[-K, K]^n$  に属することを示す。 $H$  の勾配ベクトル場

$$\text{grad } H = (x_n + x_2 - a + x_1^2, x_1 + x_3 - a + x_2^2, \dots, x_{n-1} + x_1 - a + x_n^2)$$

を考える。 $(x_1, \dots, x_n)$  が  $[-K, K]^n$  に属さないとする。

$K > 0$  を十分大きな実数とし、 $(x_1, \dots, x_n) \in [-K, K]^n$  の範囲で考える。この境界において、 $\text{grad } H$  が 0 にならないことを示す。 $|x_1| = K$  の場合を示せば十分である。

$|x_2|, |x_n| \leq K$  であるから、

$$x_n + x_2 - a + x_1^2 \geq -2K - a + K^2 = (K - 1)^2 - a - 1$$

であるので、 $(K-1)^2 - a - 1 > 0$  が成り立つように  $K > 0$  を取っておくと、 $\text{grad } H$  は  $[-K, K]^n$  の境界上では 0 にならない。これより、次が適用できる。

**定理 3.1** (Hopf).  $M$  を境界付き多様体とし、 $v$  を  $M$  上のベクトル場で、その平衡点は全て孤立点で、 $\partial M$  に平衡点はないとする。このとき、 $v$  の指数の和  $\sum_p \text{index}_p v$  は  $\partial M$  から  $S^{m-1}$  への Gauss 写像の写像度と一致する。

この定理の  $\sum_p$  の  $v$  の平衡点  $p$  全体に関する和を表し、 $v$  の  $p$  における指数  $\text{index}_p(v)$  は  $\det(Dv)(p)$  の符号である。

この定理の証明は、[5] の Section 6 の Lemma 3 を参照されたい。その本では、 $v$  が  $\partial X$  上では 0 にならないだけでなく、外向きであることを仮定しているが、それは指数の和が Gauss 写像の写像度と等しいというところだけに使われているので、そのままの証明でこの形に拡張できる。

$v = \text{grad } H$  として適用する。 $v$  の微分は Hesse 行列  $Dv = \text{Hess } H$  であるから、 $v$  の平衡点における指数の  $\pm 1$  は、対応する  $H$  の臨界点のモース指数の偶奇に対応する。従って、定理 3.1 より

$$\sum_{\gamma} (-1)^{\gamma} B_{\gamma}$$

は

$$\begin{aligned} F : \partial[-K, K]^n &\rightarrow S^{n-1} \\ \text{grad } H &\mapsto \frac{1}{|\text{grad } H|} \text{grad } H \end{aligned}$$

の写像度と一致する。上で見たように、 $\partial[-K, K]^n$  上では  $\text{grad } H$  の少なくとも 1 つの成分は正である。よって、 $\text{grad } H$  の全ての成分が負になることはなく、 $S^{n-1}$  の全ての成分が負になる部分は Gauss 写像  $F$  の像に含まれない。 $F$  は全射ではないので写像度は 0 である。ゆえに、

$$\sum_{\gamma} (-1)^{\gamma} B_{\gamma} = 0$$

が成り立つ。

## 4 短周期の周期点

前節の議論より、パラメータが  $a \gg 1$  から  $a < -1$  に変化するとき、 $n$  周期点は  $\sum_{\gamma} (-1)^{\gamma} B_{\gamma} = 0$  を保ちながら、 $2^n$  個から 0 個になる。その周期点の分岐と Morse 指数の変化を、 $n = 2, 3, 4$  の場合について計算した。

### 4.1 2 周期点についての解析結果

$n = 2$  の時の作用  $H$  は以下ようになる:

$$H(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - a(x_1 + x_2) + \frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3).$$

この臨界点はパラメータ  $a$  の値によって次のようになる:

1.  $a > 3$  のとき以下の 4 点が存在する:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 &= (\sqrt{a+1}-1, \sqrt{a+1}-1) \\ \mathbf{p}_2 &= (\sqrt{a-3}+1, -\sqrt{a-3}+1) \\ \mathbf{p}_3 &= (-\sqrt{a-3}+1, \sqrt{a-3}+1) \\ \mathbf{p}_4 &= (-\sqrt{a+1}-1, -\sqrt{a+1}-1)\end{aligned}$$

2.  $a = 3$  のとき 3 点が合併し, 以下の 2 点が存在する:

$$\mathbf{p}_1 (= \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3), \mathbf{p}_4$$

3.  $-1 < a < 3$  のとき以下の 2 点が存在する:

$$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_4$$

4.  $a = -1$  のとき 2 点が合併し, 以下の 1 点が存在する:

$$\mathbf{p}_1 (= \mathbf{p}_4)$$

5.  $a < -1$  のとき周期点は存在しない.

2 周期点についての Morse 指数と分岐の関係は以下ようになる. なお,  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4$  については上に同じであり,  $\gamma$  はその臨界点の Morse 指数を表す.

1.  $a > 3$  のとき以下の 4 つの 2 周期点が存在する:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 &(\gamma = 0(\text{even})), \\ \mathbf{p}_2 &(\gamma = 1(\text{odd})), \\ \mathbf{p}_3 &(\gamma = 1(\text{odd})), \\ \mathbf{p}_4 &(\gamma = 2(\text{even}))\end{aligned}$$

2.  $a = 3$  のとき

$$\mathbf{p}_1(\gamma = 0(\text{even})), \quad \mathbf{p}_2(\gamma = 1(\text{odd})), \quad \mathbf{p}_3(\gamma = 1(\text{odd}))$$

の 3 点が合併する (周期倍分岐).

3.  $-1 < a < 3$  のとき以下の 2 つの 2 周期点が存在する:

$$\mathbf{p}_1(\gamma = 1(\text{odd})), \quad \mathbf{p}_4(\gamma = 2(\text{even}))$$

4.  $a = -1$  のとき上の 2 点が衝突し消滅する (サドルノード分岐).

5.  $a < -1$  のとき周期点は存在しない.

2 周期点の分岐の様子を図 1 に, Morse 指数の変化の様子を図 2 に示す.

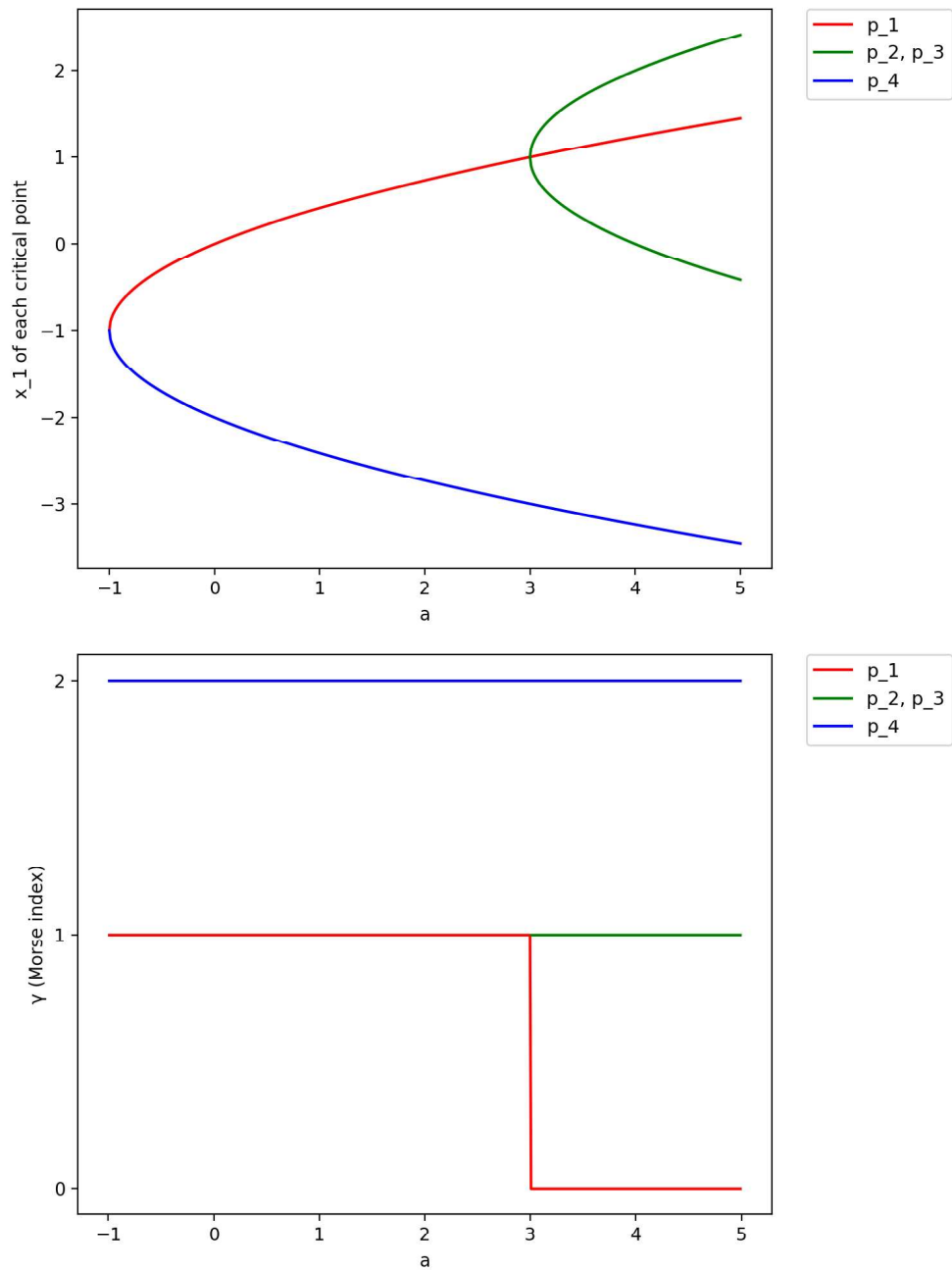


図1 2周期点の分岐(上図)とMorse指数(下図)

## 4.2 3 周期点についての解析結果

$n = 3$  の時の作用  $H$  は以下ようになる:

$$H(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - a(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3).$$

この臨界点は  $a$  の値によって次の通りである.

1.  $a > \frac{5}{4}$  のとき以下の 8 点が存在する:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= (\sqrt{a-1} + 1, -\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1}) \\ \mathbf{p}_2 &= (-\sqrt{a-1} + 1, \sqrt{a-1}, \sqrt{a-1}) \\ \mathbf{p}_3 &= (\sqrt{a-1}, \sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1} + 1) \\ \mathbf{p}_4 &= (\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1} + 1, \sqrt{a-1}) \\ \mathbf{p}_5 &= (-\sqrt{a-1}, \sqrt{a-1} + 1, -\sqrt{a-1}) \\ \mathbf{p}_6 &= (-\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1}, \sqrt{a-1} + 1) \\ \mathbf{p}_7 &= (\sqrt{a+1} - 1, \sqrt{a+1} - 1, \sqrt{a+1} - 1) \\ \mathbf{p}_8 &= (-\sqrt{a+1} - 1, -\sqrt{a+1} - 1, -\sqrt{a+1} - 1) \end{aligned}$$

2.  $a = \frac{5}{4}$  のとき 4 点が合併し, 以下の 5 点が存在する:

$$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 (= \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_7), \mathbf{p}_5, \mathbf{p}_6, \mathbf{p}_8$$

3.  $1 < a < \frac{5}{4}$  のとき  $a > \frac{5}{4}$  のときと同様  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_8$  の 8 点が存在する.

4.  $a = 1$  のとき 2 点の合併が 3 組起こり, 以下の 5 点が存在する:

$$\mathbf{p}_1 (= \mathbf{p}_2), \mathbf{p}_3 (= \mathbf{p}_5), \mathbf{p}_4 (= \mathbf{p}_6), \mathbf{p}_7, \mathbf{p}_8$$

5.  $-1 < a < 1$  のとき  $\mathbf{p}_7, \mathbf{p}_8$  の 2 点が存在する.

6.  $a = -1$  のとき 2 点が合併し, 以下の 1 点が存在する:

$$\mathbf{p}_7 (= \mathbf{p}_8)$$

7.  $a < -1$  のとき周期点は存在しない.

3 周期点についての Morse 指数と分岐の関係は以下ようになる. なお,  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_8$  については上に同じであり,  $\gamma$  はその臨界点の Morse 指数を表す.

1.  $a > \frac{5}{4}$  のとき以下の 8 点が存在する:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_8 & \quad (\gamma = 3(\text{odd})) \\ \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_5, \mathbf{p}_6 & \quad (\gamma = 2(\text{even})) \\ \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 & \quad (\gamma = 1(\text{odd})) \\ \mathbf{p}_7 & \quad (\gamma = 0(\text{even})) \end{aligned}$$

2.  $a = \frac{5}{4}$  のとき

$\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_7$  の 4 点が衝突する. その前後では,  $\mathbf{p}_7$  の Morse 指数のみが 0 から 2 へ変化し, 周期点の個数は変化しない.



3.  $1 < a < \frac{5}{4}$  のとき以下の 8 点が存在する:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_8 & & (\gamma = 3(\text{odd})) \\ \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_5, \mathbf{p}_6, \mathbf{p}_7 & & (\gamma = 2(\text{even})) \\ \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 & & (\gamma = 1(\text{odd})) \end{aligned}$$

4.  $a = 1$  のとき

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1(\gamma = 2(\text{even})) & \quad \text{と} \quad \mathbf{p}_2(\gamma = 1(\text{odd})) \\ \mathbf{p}_3(\gamma = 1(\text{odd})) & \quad \text{と} \quad \mathbf{p}_5(\gamma = 2(\text{even})) \\ \mathbf{p}_4(\gamma = 1(\text{odd})) & \quad \text{と} \quad \mathbf{p}_6(\gamma = 2(\text{even})) \end{aligned}$$

がそれぞれ衝突し消滅する.

5.  $-1 < a < 1$  のとき以下の 2 点が存在する:

$$\mathbf{p}_7(\gamma = 2(\text{even})), \quad \mathbf{p}_8(\gamma = 3(\text{odd}))$$

6.  $a = -1$  のとき上の 2 点が衝突し消滅する.

7.  $a < -1$  のときは周期点は存在しない.

3 周期点の分岐の様子を図 3 に, Morse 指数の変化の様子を図 4 に示す.

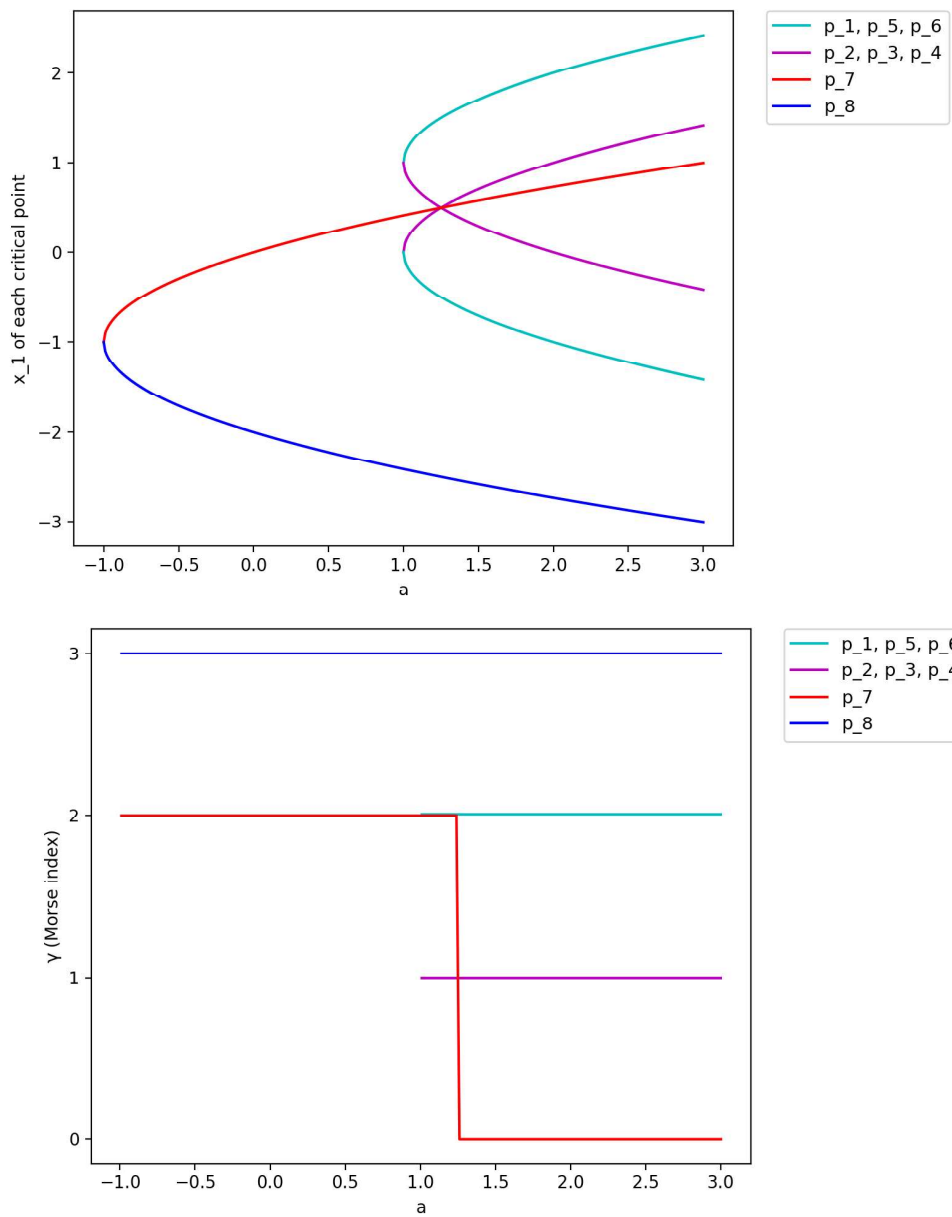


図2 3周期点の分岐(上図)とMorse指数(下図)

### 4.3 4 周期点についての解析結果

$n = 4$  の時の作用  $H$  は以下ようになる:

$$H(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 \\ - a(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + \frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3).$$

この臨界点は  $a$  の値によって次の通りである.

1.  $a > 4$  のとき以下の 16 点が存在する:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= (-\sqrt{a}, -\sqrt{a}, \sqrt{a}, \sqrt{a}) \text{ と} \\ &\mathbf{p}_1 \text{ を循環させた 3 点 } \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 \\ \mathbf{p}_5 &= (-\sqrt{a}, -\sqrt{a+2\sqrt{a}}, -\sqrt{a}, \sqrt{a+2\sqrt{a}}) \text{ と} \\ &\mathbf{p}_5 \text{ を循環させた 3 点 } \mathbf{p}_6, \mathbf{p}_7, \mathbf{p}_8 \\ \mathbf{p}_9 &= (\sqrt{a}, -\sqrt{a-2\sqrt{a}}, \sqrt{a}, \sqrt{a-2\sqrt{a}}) \text{ と} \\ &\mathbf{p}_9 \text{ を循環させた 3 点 } \mathbf{p}_{10}, \mathbf{p}_{11}, \mathbf{p}_{12} \\ \mathbf{p}_{13} &= (-\sqrt{a-3}+1, \sqrt{a-3}+1, -\sqrt{a-3}+1, \sqrt{a-3}+1) \\ \mathbf{p}_{14} &= (\sqrt{a-3}+1, -\sqrt{a-3}+1, \sqrt{a-3}+1, -\sqrt{a-3}+1) \\ \mathbf{p}_{15} &= (\sqrt{a+1}-1, \sqrt{a+1}-1, \sqrt{a+1}-1, \sqrt{a+1}-1) \\ \mathbf{p}_{16} &= (-\sqrt{a+1}-1, -\sqrt{a+1}-1, -\sqrt{a+1}-1, -\sqrt{a+1}-1) \end{aligned}$$

2.  $a = 4$  のとき 3 点の合併が 2 組起こり, 以下の 12 点が存在する:

$$\begin{aligned} &\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_8, \\ &\mathbf{p}_{13}(= \mathbf{p}_{10} = \mathbf{p}_{12}), \\ &\mathbf{p}_{14}(= \mathbf{p}_9 = \mathbf{p}_{11}), \\ &\mathbf{p}_{15}, \mathbf{p}_{16} \end{aligned}$$

3.  $3 < a < 4$  のとき  $\mathbf{p}_9, \dots, \mathbf{p}_{12}$  を除く 12 点が存在する.

4.  $a = 3$  のとき 3 点が合併し, 以下の 10 点が存在する:

$$\begin{aligned} &\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_8, \\ &\mathbf{p}_{15}(= \mathbf{p}_{13} = \mathbf{p}_{14}), \\ &\mathbf{p}_{16} \end{aligned}$$

5.  $0 < a < 3$  のとき  $\mathbf{p}_9, \dots, \mathbf{p}_{14}$  を除く 10 点が存在する.

6.  $a = 0$  のとき 9 点が合併し, 以下の 2 点が存在する:

$$\mathbf{p}_{15}(= \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \dots = \mathbf{p}_8), \mathbf{p}_{16}$$

7.  $-1 < a < 0$  のとき  $\mathbf{p}_{15}, \mathbf{p}_{16}$  の 2 点が存在する.

8.  $a =$  のとき 2 点が合併し, 以下の 1 点が存在する:

$$\mathbf{p}_{15}(= \mathbf{p}_{16})$$

9.  $a < -1$  のとき周期点は存在しない.

4 周期点についての Morse 指数と分岐の関係は以下ようになる. なお,  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{16}$  については上に同じであり,  $\gamma$  はその臨界点の Morse 指数を表す.

1.  $a > 4$  のとき以下の 16 点が存在する:

$\mathbf{p}_{16}$	$(\gamma = 4(\text{even}))$
$\mathbf{p}_5, \dots, \mathbf{p}_8$	$(\gamma = 3(\text{odd}))$
$\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_{13}, \mathbf{p}_{14}$	$(\gamma = 2(\text{even}))$
$\mathbf{p}_9, \dots, \mathbf{p}_{12}$	$(\gamma = 1(\text{odd}))$
$\mathbf{p}_{15}$	$(\gamma = 0(\text{even}))$

2.  $a = 4$  のとき

$$\mathbf{p}_9(\gamma = 1(\text{odd})), \quad \mathbf{p}_{11}(\gamma = 1(\text{odd})), \quad \mathbf{p}_{14}(\gamma = 2(\text{even})),$$

の 3 点が衝突し,  $\mathbf{p}_{14}(\gamma = 1(\text{odd}))$  の 1 点に合併する. さらに  $\mathbf{p}_{10}, \mathbf{p}_{12}, \mathbf{p}_{13}$  についても同様である. いずれも周期倍分岐である.

3.  $3 < a < 4$  のとき以下の 12 点が存在する:

$\mathbf{p}_{16}$	$(\gamma = 4(\text{even}))$
$\mathbf{p}_5, \dots, \mathbf{p}_8$	$(\gamma = 3(\text{odd}))$
$\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4$	$(\gamma = 2(\text{even}))$
$\mathbf{p}_{13}, \mathbf{p}_{14}$	$(\gamma = 1(\text{odd}))$
$\mathbf{p}_{15}$	$(\gamma = 0(\text{even}))$

4.  $a = 3$  のとき

$$\mathbf{p}_{13}(\gamma = 1(\text{odd})), \quad \mathbf{p}_{14}(\gamma = 1(\text{odd})), \quad \mathbf{p}_{15}(\gamma = 0(\text{even})),$$

の 3 点が衝突し,  $\mathbf{p}_{15}(\gamma = 1(\text{odd}))$  の 1 点に合併する (周期倍分岐).

5.  $0 < a < 3$  のとき以下の 10 点が存在する:

$\mathbf{p}_{16}$	$(\gamma = 4(\text{even}))$
$\mathbf{p}_5, \dots, \mathbf{p}_8$	$(\gamma = 3(\text{odd}))$
$\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4$	$(\gamma = 2(\text{even}))$
$\mathbf{p}_{15}$	$(\gamma = 1(\text{odd}))$

6.  $a = 0$  のとき

$\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4(\gamma = 2(\text{even}))$  と  $\mathbf{p}_5, \dots, \mathbf{p}_8(\gamma = 3(\text{odd}))$  と  $\mathbf{p}_{15}(\gamma = 1(\text{odd}))$  の合計 9 点が衝突し,  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_8$  は消滅する.  $\mathbf{p}_{15}$  は Morse 指数が変化し  $\gamma = 3(\text{odd})$  となる.

7.  $-1 < a < 0$  のとき以下の 2 点が存在する:

$$\mathbf{p}_{15}(\gamma = 3(\text{odd})), \quad \mathbf{p}_{16}(\gamma = 4(\text{even}))$$

8.  $a = -1$  のとき, 上の 2 点が衝突し消滅する.

9.  $a < -1$  のときは周期点は存在しない.

4 周期点の分岐の様子を図 5 に, Morse 指数の変化の様子を図 6 に示す.

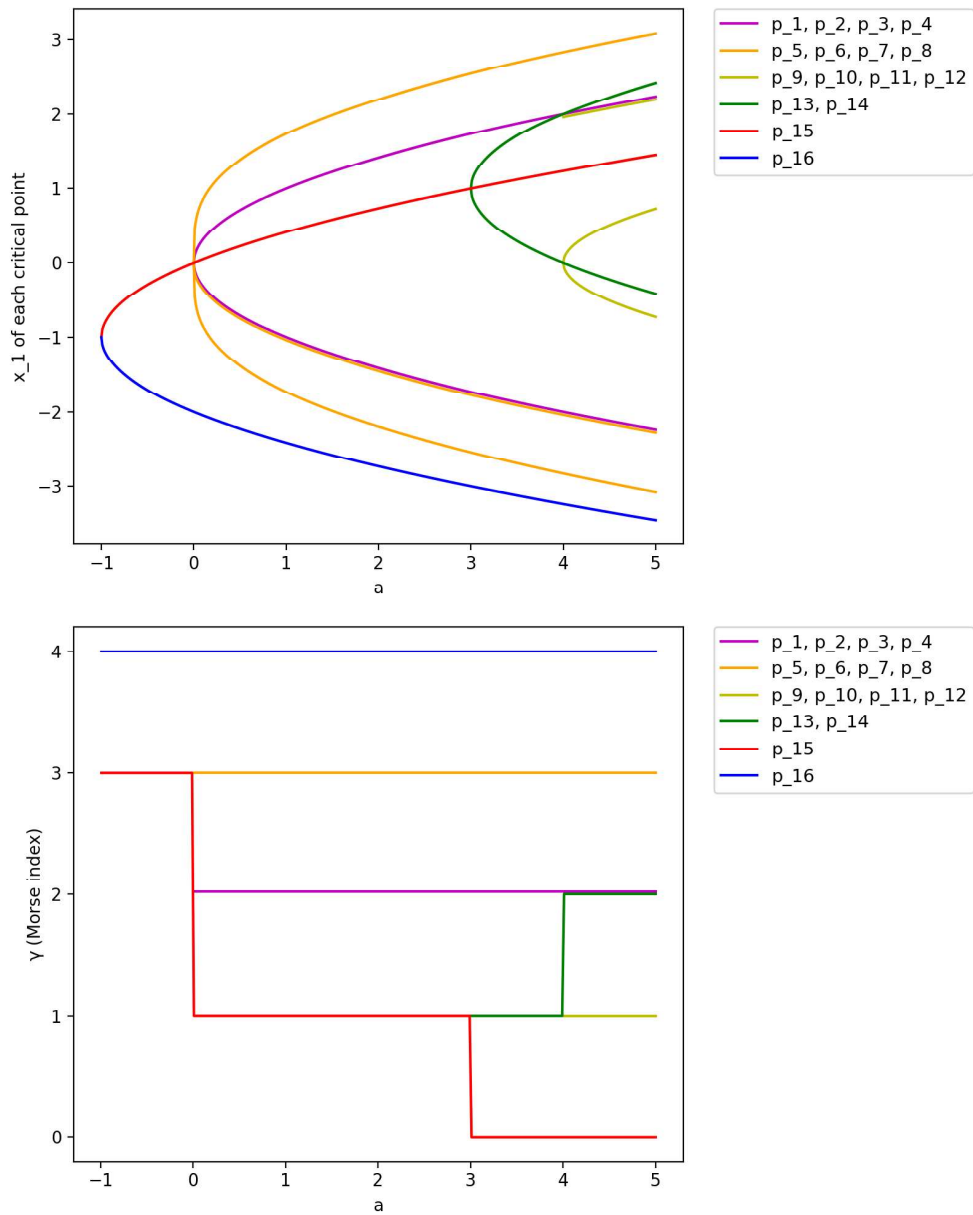


図3 4周期点の分岐(上図)と Morse 指数(下図)

## 付録 A $a < -1$ では周期軌道が存在しないことの証明

$a < -1$  では  $\Phi$  が周期軌道を持たないことを証明する.  $(x_i, y_i) (i = 1, \dots, n)$  が  $n$  周期軌道とする. つまり,

$$\begin{aligned} \Phi(x_i, y_i) &= (x_{i+1}, y_{i+1}) \quad (i = 1, \dots, n-1), \\ \Phi(x_n, y_n) &= (x_1, y_1) \end{aligned}$$

を満たすとする。これは

$$\begin{aligned}(a - x_i^2 - y_i, x_i) &= (x_{i+1}, y_{i+1}) & (i = 1, \dots, n-1) \\ (a - x_n^2 - y_n, x_n) &= (x_1, y_1)\end{aligned}$$

と表される。これより,

$$x_{i+2} = a - x_{i+1}^2 - x_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

が成り立つ。ここで,  $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2$  である。これより,

$$x_{i+2} - x_{i+1} = (x_{i+1} - x_i) - (x_{i+1} + 1)^2 + a + 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

となり,

$$x_{i+2} - x_{i+1} < x_{i+1} - x_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

が得られる。これを用いると,

$$\begin{aligned}0 = x_{n+1} - x_1 &= (x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_{n-1}) + \dots + (x_2 - x_1) \\ &< (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_1 - x_n) = 0\end{aligned}$$

となり, 矛盾が導かれた。

## 謝辞

2020年9月のRIMS研究集会で発表した後, 浅岡正幸先生, 荒井迅先生, 三波篤郎先生, 穴倉光広先生(五十音順)からコメントを頂いたり, 関連する文献を教えてくださいました。以上の方々に, 感謝したい。著者の一人柴山は, 科研費(18K03366)の助成を受けた。

## 参考文献

- [1] R. Devaney & Z. Nitecki, Shift automorphisms in the Hénon mapping, *Comm. Math. Phys.* **67** (1979), 137-146.
- [2] S. Friedland & J. Milnor, Dynamical properties of plane polynomial automorphisms, *Ergodic Theory and Dyn. Sys.* **9** (1989), 67-99.
- [3] 服部晶夫, いろいろな幾何 II, 岩波講座 応用数学, 岩波書店, 1997.
- [4] M. Hénon, A two-dimensional mapping with a strange attractor, *Comm. Math. Phys.* **50**(1976), 69-77.
- [5] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton University Press, 1965.
- [6] 三波篤郎, Hénon map について (低次元力学系における分岐の研究), 数理解析研究所講究録, **806**(1992), 1-16
- [7] D. Sterling & J. D. Meiss, Computing periodic orbits using the anti-integrable limit. *Phys. Lett. A* **241** (1998), 46-52.