# $\mathbb{C}^2$ のエノン写像の力学系に現れる非線形ストークス現象

愛媛大学理学部　平出耕一
Koichi Hiraide
Faculty of Science, Ehime University

このレポートでは，論文 [32] の研究結果について解説する．エノン写像 $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ は次で定まる 2 次写像である；

$$f:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} 1+y-ax^2 \\ bx \end{pmatrix}.$$

ここで，$a,b\in\mathbb{C}$ はパラメータで，$a\neq 0, b\neq 0$ とする．　$P=(x_f,y_f)$ を $f$ の不動点のうちの１つとし，$\alpha_1,\alpha_2$ は微分 $D_Pf$ の固有値とする．以下において

$$|\alpha_1|\neq 1,\qquad \alpha_1\neq\alpha_2$$

を仮定し，$\alpha=\alpha_1$ とおき，$\alpha$ に対する固有空間を $E_\alpha$ とする．

$$\alpha^2-\lambda\alpha-b=0$$

が成り立つ．ここで，$\lambda=-2ax_f$ である．以下では，さらに，$\alpha$ に対するレゾナンスについての条件

$$D_n=\alpha^n-\lambda-b\alpha^{-n}\neq 0\quad(\forall n\geq 2)$$

を仮定する．これらの仮定の下で，$\alpha$ に付随する不変多様体 $W_\alpha(P)$ が定る．この不変多様体は，$P$ がサドルのとき，$0<|\alpha|<1$ と $|\alpha|>1$ に応じて．安定および不安定多様体とそれぞれ一致する．さらに、この不変多様体はポアンカレの意味での漸近展開と呼ばれる発散級数によって記述でき，微分方程式論でなじみのあるストークス現象に類似する現象が起きる．この研究の結果は，エノン写像 $f$ の力学系を極めて高い精度で計算機を用いて定量的に調べることを可能にする．

## 1　ポアンカレの写像

上記の仮定の下で，次が成り立つ．

**定理 1** 正則な写像 $\mathcal{P}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^2$ で

$$f\circ\mathcal{P}(t)=\mathcal{P}(\alpha t)\qquad(\forall t\in\mathbb{C})$$

と $\mathcal{P}(0)=P$, $\mathcal{P}'(0)\neq 0$ を満たすものが存在し，与えられた $v\in E_\alpha, v\neq 0$ に対し $\mathcal{P}'(0)=v$ を満たすものは唯一つである．さらに，$\mathcal{P}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^2$ は単射となり，すべての $t\in\mathbb{C}$ に対し $\mathcal{P}'(t)\neq 0$ を満たす．

この定理の写像 $\mathcal{P}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^2$ をポアンカレの写像と呼び，像

$$W_\alpha(P)=\mathcal{P}(\mathbb{C})$$

を固有値 $\alpha$ に付随する不変多様体と呼ぶことにする．この集合は $v\in E_\alpha, v\neq 0$ の取り方に依存しない．また，定理１より，$\mathbb{C}$ の単射埋め込みであり，$\mathbb{C}^2$ の $f$-不変な曲線である．

定理１は以下のような議論により示される．煩雑さを避けるため，$0<|\alpha|<1$ とし，$P=(x_f,y_f)$ を原点 $(0,0)$ に移す平行移動 $(x+x_f,y+y_f)\mapsto(x,y)$ による共役をとり，

$$f:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} y+\lambda x-ax^2 \\ bx \end{pmatrix}.$$

とする．$t\in\mathbb{C}$ に対し

$$\mathcal{P}(t)=\begin{pmatrix} x_P(t) \\ y_P(t) \end{pmatrix}$$

とおくと，条件式 $f\circ\mathcal{P}(t)=\mathcal{P}(\alpha t)$ より，関係式

$$x_p(\alpha t)-\lambda x_p(t)-bx_p(\alpha^{-1}t)=-a\{x_p(t)\}^2$$

と $y_p(t)=bx_p(\alpha^{-1}t)$ が得られる．巾級数展開

$$x_p(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nt^n \tag{1}$$

を仮定し，上の関係式に代入すると，係数比較より

$$a_n=-\frac{a}{D_n}\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}\quad(\forall n\geq 2)$$

が得られる．１次の係数 $a_1$ は条件 $\mathcal{P}'(0)=v$ から定まり，$a_1\neq 0$ である．従って，定理１は次の補題１を用いて証明される．

**補題 1** 定数 $C>1$ が存在して

$$|a_n|<C^n|\alpha|^{n\log n}\qquad(\forall n\geq 1)$$

が成り立つ．

巾級数展開 (1) の収束性をより詳しく調べるためには，上の補題１を精密化する次の補題２と３が有効に働く．

**補題 2** 定数 $C>1$ が存在して

$$|a_n| < C^{\frac{n}{(\log_+ n)^3}} |\alpha|^{\frac{n(\log n - \log\log_+ n)}{\log 2}} \qquad (\forall n \geq 1)$$

が成り立つ．ここで，$\log_+ n = \max\{\log n, 1\}$.

**補題 3** $n_0 \geq 1$ が存在して

$$|a_n| \geq |\alpha|^{\frac{nlogn}{\log 2}} \quad (\forall n \geq n_0)$$

が成り立つ．

上記の補題１，２，３は $|\alpha|>1$ の場合も同様に成り立つ．

次の定理２は，固有値 $\alpha$ に付随する不変多様体 $W_\alpha(P)$ によって，エノン写像 $f:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ の振る舞いと線型写像 $Df_P:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ の振る舞いを直接的に関連付けていて，不変多様体 $W_\alpha(P)$ の特徴付けを与える．

**定理 2** $0<|\alpha|<1$ とする．任意に与えられた点

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

を初期値とする $f$ の前方軌道

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = f^m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (m \geq 0)$$

に対し，点列

$$\alpha^{-m} \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} \qquad (m \geq 0)$$

が原点と異なる $\mathbb{C}^2$ の点に収束するならば，初期値は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \in W_\alpha(P) \setminus \{P\}$$

を満たす．また，この逆が成り立つ．

定理２は $|\alpha|>1$ の場合も同様に成り立つ．

## 2　ボレル・ラプラス変換による表示

この節では，1節と同様に $P$ を原点に移す平行移動により $f$ の共役をとり，それを改めて $f$ で表す．次の条件式を満たす正則な写像 $\mathcal{L}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^2$ について述べる；

$$f\circ\mathcal{L}(t)=\mathcal{L}(t+1) \tag{2}$$

$t\in\mathbb{C}$ に対し

$$\mathcal{L}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

とおく．このとき (2) より関係式

$$x(t+1)-\lambda x(t)-bx(t-1)=-a\{x(t)\}^2 \tag{3}$$

と $y(t)=bx(t-1)$ が得られる．(3) は非線型の2階差分方程式である．この方程式を解くため，$x(t)$ のボレル変換を $\zeta$ 平面上のリーマン面 $X(\zeta)$ とおき，ラプラス積分

$$x(t)=\int_\gamma e^{-\zeta t}X(\zeta)d\zeta \tag{4}$$

による表示を仮定する．ここで，$\gamma$ は原点 $\zeta=0$ を基点とする $\zeta$ 平面上の何らかの閉じた積分路である．さらに，畳み込み

$$X*X(\zeta)=\int_0^\zeta X(\zeta-\eta)X(\eta)d\eta$$

が2乗 $\{x(t)\}^2$ と両立する様に積分路 $\gamma$ は選ばれていると仮定する．　このとき，積分表示 (4) を 方程式 (3) に代入し， 両辺の積分の中身を比較して，積分方程式

$$AX=-aX*X+C,\qquad A(\zeta)=e^{-\zeta}-\lambda-be^{\zeta} \tag{5}$$

が得られる．ここで，$C$ は定数とする．

$$\zeta_1=-\log\alpha=|\log\alpha|e^{i\theta_1}$$

とおき，$\theta_1\in\mathbb{R}$ は一つ選んで固定する．$\zeta$ 平面上の半格子

$$\Gamma_\alpha=\{N\zeta_1+2\pi ni\mid N\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{Z}\}$$

において，$N=1$ に対応する格子点はすべて $A(\zeta)$ の零点である．方程式 (5) を解くため，原点 $\zeta=0$ 近傍で

$$
\begin{aligned}
X(\zeta) &= a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots \\
&= a_0 + \tilde{X}(\zeta)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

と展開し，変数 $\sigma$ を導入し

$$
\tilde{X}(\zeta) = \quad X_1(\zeta)\sigma + X_2(\zeta)\sigma^2 + \cdots \tag{7}
$$

とおく．これを方程式 (5) に代入し，両辺の $\sigma$ の巾乗の係数を比較することにより

$$
\begin{aligned}
AX_1 + 2aa_0 * X_1 &= -aa_0^2\zeta - a_0A + C \quad = W_0, \\
AX_{n+1} + 2aa_0 * X_{n+1} &= -a\sum_{k=1}^{n} X_k * X_{n-k+1} = W_n \quad (n=1,2,\dots),
\end{aligned}
$$

が得られ、これらを解いて関数列

$$
X_n = A^{-1}F_0\int_0^{\zeta}\frac{W'_{n-1}}{F_0}d\eta \quad (n=1,2,\dots) \tag{8}
$$

を得る．ここで

$$
F_0 = \left(\frac{e^{-\zeta}-\alpha}{e^{-\zeta}-\alpha_2}\right)^{\beta}, \quad \beta = \frac{2aa_0}{\alpha-\alpha_2}.
$$

展開 (7) において $\sigma=1$ とおいて，原点近傍で積分方程式 (5) の解 $X(\zeta)$ が求まる．これを 点 $\zeta=\zeta_1$ 近傍まで解析接続し，(5) の両辺を詳しく調べて，$\beta=1$ すなわち

$$
a_0 = \frac{\alpha-\alpha_2}{2a}
$$

が得られる．　また，(5) の定数 $C$ は

$$
C = \frac{(1-\lambda-b)(\alpha-\alpha_2)}{2a}.
$$

となる．式 (8) が $X(\zeta)$ を求めるアルゴリズムを与えるので，展開 (6) の係数 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ が全て定まり，それらは計算機によって具体的な数式として得られる．その数式の複雑さは，$n$ が大きくなるに従い急激に増す．

半格子 $\Gamma_\alpha$ は畳み込みで閉じた構造をしているので，上のアルゴリズムにより各格子点近傍でのリーマン面 $X$ の形状を具体的に求めることが出来る．実際，それら

の点はすべて $X$ の分岐点で，その構造は $N=1,2,\cdots$ が大きくなるに従い複雑になる．$\Gamma_\alpha$ における番号 $N$ に対応する格子点を任意にとり $\zeta_N$ とすると $X=a_0+\tilde{X}$ は $\zeta=\zeta_N$ の近傍で次の式で与えられる;

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}(\zeta_N+\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\zeta_N+\xi) \\
&= \sum_{n=N}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b^{(N)}_{n,m+n-1}\xi^{m+n-1}(\log\xi)^N + reg^{(N-1)}(\zeta_N+\xi)
\end{aligned}
$$

ここで，すべて係数 $b^{(N)}_{n,m+n-1}$ は計算機によって具体的な数式として求められ，著しく複雑であるが 1 節で述べた補題 1 に類似する評価式が成り立つ．$reg^{(N-1)}(\zeta_N+\xi)$ はラプラス変換で消える剰余項である． また，$(\log\xi)^N$ の係数部分は正則関数であり，有限な収束半径

$$
\rho = \begin{cases} (N-1)|\log\alpha| & (N>1) \\ 2\pi & (N=1) \end{cases}
$$

をもつ．

原点 $\zeta=0$ と $\zeta_1$ を結ぶ直線 $L_{\theta_1}$ の近傍で，任意の $N$ に対し，原点を基点とし分岐点 $\zeta_N=N\zeta_1$ までの $\Gamma_\alpha$ の点

$$
0,\zeta_1,2\zeta_1,\cdots,N\zeta_1=\zeta_N
$$

を回り，各点における分岐 $\log\xi,(\log\xi)^2,\cdots,(\log\xi)^N$ をすべて解消する閉曲線 $\gamma_N$ を選ぶことが出来て，改めてラプラス変換を

$$
x(t)=\lim_{N\to\infty}\int_{\gamma_N} e^{-\zeta t}X(\zeta)d\zeta \tag{9}
$$

により定める．このとき右辺は

$$
\sum_{N=0}^{\infty}\int_{\zeta_N}^{\infty e^{i\theta_1}} e^{-\zeta t}X_R(\zeta)d\zeta \tag{10}
$$

に一致する． ここで，$X_R$ はリーマン面 $X$ を $L_{\theta_1}$ 近傍で一意化した関数である．また，$\zeta_0=0$ に注意する．

ラプラス変換 (9) は領域

$$
\Re(\zeta_1 t)\geq 1+\varepsilon
$$

において正則関数の無限和として一様収束する． ただし $\varepsilon>0$ は十分大とする．この $x(t)$ は関係式 (3) により自然に全平面 $\mathbb{C}$ に解析接続される．

**定理 3** ラプラス変換 *(9)* によって定まる正則な写像 $\mathcal{L} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ *;*

$$\mathcal{L}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

は $f \circ \mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(t+1)$ の解である．ただし，$y(t) = bx(t-1)$．さらに

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}) = W_\alpha(P) \setminus \{P\}$$

が成り立つ．

# 3 非線形ストークス現象

この節では，$\log \alpha$ の虚部をすべてとり，$\Theta \in \mathbb{R}$ により

$$-\log \alpha = -\log |\alpha| + i(\Theta + 2n\pi), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

とし，$\Theta_n = \Theta + 2n\pi$ とおく．また，$\theta_n \in \mathbb{R}$ を

$$\begin{aligned} \zeta_n &= -\log |\alpha| + i\Theta_n \\ &= |\log \alpha| e^{i\theta_n} \end{aligned}$$

により定める．

**定理 4** $\mathcal{P}$ は $\mathcal{P}'(0) = (1, \alpha^{-1}b)$ により定まる定理 1 の写像とし，各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\mathcal{L}_n$ を定理 3 の写像とする．このとき定数 $C_n \neq 0$ が存在して

$$\mathcal{L}_n(t) = \mathcal{P}(C_n e^{-\zeta_n t}) \qquad (\forall t \in \mathbb{C})$$

が成り立つ．さらに，$n$ に依存しない定数 $K > 1$ が存在し

$$K^{-1} < |\frac{C_n}{\zeta_n}| < K$$

となる．$0 < |\alpha| < 1$ のとき，定数 $C_n$ について

$$C_n = \lim_{m \to +\infty} \alpha^{-m} \int_0^{\infty e^{i\theta_n}} e^{-\zeta m} X_R(\zeta) \zeta$$

が成り立つ．$|\alpha| > 1$ の場合も同様である．

$\mathcal{P}$ は $\mathbb{C}$ から $W_\alpha(P)$ の上への単射なので，逆写像 $\mathcal{P}^{-1}$ を持つ． 定理 4 より，$\mathcal{P}$ を用いて，写像の族

$$\{\mathcal{L}_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

において関連付けが定まり，それは一つの接続構造を持つことが分る．実際，$n, m \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{L}_n(t)) = \frac{C_n}{C_m} e^{2\pi(n-m)it} \mathcal{P}^{-1}(\mathcal{L}_m(t)))$$

が成り立つ．定数 $\frac{C_n}{C_m}$ は接続係数あるいはストークス係数と呼ばれる．

# 4 漸近展開

定理 3 の写像 $\mathcal{L}$ の成分関数 $x(t)$ は積分表示 (10) を持つので，漸近展開

$$x(t) \sim \sum_{N=0}^{\infty} e^{-\zeta_N t} \left[ b_{N,N-1}^{(N)} \frac{(N-1)!}{t^N} + \sum_{l=1}^{\infty} b_{l+N-1}^{(N)} \frac{(l+N-1)!}{t^{l+N}} \right] \tag{11}$$

が得られる．ここで

$$b_{l+N-1}^{(N)} = \sum_{k=0}^{l} b_{k+N,l+N-1}^{(N)}.$$

(11) の右辺はすべての $t \in \mathbb{C} \setminus 0$ に対し発散級数であるが，領域 $\Re(\zeta_1 t) \geq 1 + \varepsilon$ で，上手く有限項を選ぶと $x(t)$ をとても良く近似する．力学系 $f$ の振る舞いを調べるという目的のためには，この領域では値 $x(t)$ は微小であり，あまり有効でない．

人工的パラメータ $M$ を導入し、$x(t+M)$ の積分表示 (10) を上手く漸近展開すると，上の領域を広げることが出来て，$W_\alpha(P)$ の複雑な構造を見ることが可能となり，とても有効なものが得られる．


# Acknowledgements

This work was supported by Grant-in-Aid for Scientific Researches (C) (Grant No. 18K03418) from the Japan Society for the Promotion of Science.

# 参考文献


[1] Cabré X, Fontich E, de la Llave R 2003 The parameterization method for invariant manifolds I. Manifolds associated to non-resonant subspaces, Indiana Univ. Math. J. **52** 283-328.

[2] Cabré X, Fontich E, de la Llave R 2003 The parameterization method for invariant manifolds II. Regularity with respect to parameters, Indiana Univ. Math. J. **52** 329-360.

[3] Cabré X, Fontich E, de la Llave R 2005 The parameterization method for invariant manifolds III. Overview and applications, J. Diff. Eqs. **218** 444-515.

[4] Cohen A M 2007 *Numerical methods for Laplace transform inversion* (New York: Springer).

[5] Écalle J 1981 *Les fonctions résurgence* **1** ( Publ. Math. d'Orsay) (Paris).

[6] Écalle J 1981 *Les fonctions résurgence* **2** ( Publ. Math. d'Orsay) (Paris).

[7] Écalle J 1985 *Les fonctions résurgence* **3** ( Publ. Math. d'Orsay) (Paris).

[8] Gelfreich V, Sauzin D 2001 Borel summation and splitting of separatrices for the Hénon map, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **51** 513-567.

[9] Hakkim V and Mallick K 1993 Exponentially small splitting of separatrices, matching in the complex plane and Borel summation, Nonlinearity **6** 57-70.

[10] Hénon M 1976 A two-dimensional mapping with a strange attractor, Commun. Math. Phys. **50** 69-77.

[11] Hille E 1976 *Ordinary differential equations in the complex domain, Hille (Pure and Applied Mathematics Series)*, (New York: John Wiley & Sons).

[12] Alligood K T, Sauer T D, Yorke J A 1997 *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems* (Springer, New York).

[13] Kruskal M D, Segur H 1991 Asymptotics beyond all orders in a model of crystal growth, Stud. Appl. math. **85** 129-181.

[14] Lazutkin V F, Schachmannski I G, Tabanov M B 1989 Splitting of separatrices for standard and semistandard mappings, Physica **40D** 235-248.

[15] Levin B JA 1972 *Distribution of zeros of entire functions* (Providence, Rhode Island: AMS).

[16] Lorenz E N 1963 Deterministic nonperiodic flows, J. Atmos. Sci. **20** 130-141.

[17] Martin P, Sauzin D, Seara T M 2011 Resurgence of inner solutions for perturbations of the McMillan map, Discrete Contin. Dyn. Syst. **31** 165-207.

[18] Matsuoka C, Hiraide K 2011 Special functions created by Borel-Laplace transform of Hénon map, Electro. Res. Ann. Math. Sci. **18** 1-11.

[19] Matsuoka C, Hiraide K 2012 Entropy estimation of the Hénon attractor, Chaos Solitons Fractals **45** 805-809.

[20] Matsuoka C, Hiraide K 2015 Computation of entropy and Lyapunov exponent by a shift transform, Chaos **25** 103110.

[21] Nakamura K, Hamada M 1996 Asymptotic expansion of homoclinic structures in a symplectic mapping, J. Phys. A **29** 7315-327.

[22] Newhouse S, Berz M, Grote J, Makino K 2008 On the estimation of topological entropy on surfaces. Geometric and probabilistic structures in dynamics, Contemporary Math. **469** 243-270. Providence RI: AMS 2008.

[23] Pau M, Sauzin D, Seara T M 2011 Exponentially small splitting of separatrices in the perturbed McMillan map, Discrete Contin. Dyn. Syst. **31** 301-372.

[24] Poincaré H 1890 Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes, Journ. de. Math. **6** 313-65.

[25] Poincaré H 1890 Sur le probléme des trois corps et les équations de la dynamique, Acta Math. **13** 1–271.

[26] Segur H, Tanveer S, Levine H (eds) 1991 *Asymptotics Beyond All Orders* (New York: Plenum).

[27] Markushevich A I, 1965 *Theory of functions of a complex variables, Vol. II* (Englewood Cliffis, N.J.: Prentice-Hall, Inc.).

[28] Sternin B Y, Shatalov V E 1996 *Borel-Laplace Transform and Asymptotic Theory* (New York: CRC Press).

[29] Tovbis A 1994 Asymptotics beyond all orders and analytic properties of inverse Laplace trnsforms of solutions, Commun. Math. Phys. **163** 245-55.

[30] Voros A 1983 The return of quartic oscillator: the complex WKB method, Ann. Inst. H. Poincaré **39** 211-338.

[31] Widder D V 1968 *The Laplace transform* (Princeton: Princeton University Press).

[32] Hiraide K, Matsuoka C 2021 Global solutions by Borel-Laplace transform to dynamics of Hénon maps: extended nonlinear Stokes phenomena, preprint