C^1-stable intersection of Cantor sets

同志社大学・理工学部　浅岡 正幸

Masayuki Asaoka
Faculty of Science and Engineering,
Doshisha University

1　数直線上の Cantor 集合の交わり

孤立点を持たず，各連結成分が 1 点からなるような空でないコンパクト位相空間 K を **Cantor 集合**という．よく知られているようにすべての Cantor 集合は互いに同相である．

例 1.1. $0 < \mu < 1/2$ に対して，単位区間 $[0,1]$ の中央 $1/2$ を中心とする長さ μ の開区間 $\left(\frac{1-\mu}{2}, \frac{1+\mu}{2}\right)$ を除いたものを I_1 とし，I_1 の連結成分である 2 つの区間について，その中央を中心とする長さ μ^2 の開区間を I_1 から取り除いたものを I_2 とし $\cdots$ と繰り返し，2^{n-1} 個の長さ μ^n の開区間までを取り除いたものを I_n とする．このとき，$\Lambda_\mu = \bigcap_{n\geq 1} I_n$ は**中央 μ-Cantor 集合**と呼ばれる Cantor 集合となる．

力学系理論に現れる重要な Cantor 集合の多くは**反復写像系**の不変集合として書くことができる．$\|v\|$ を $v \in \mathbb{R}^d$ のユークリッドノルムとする．d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ 上で定義された写像 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ が**縮小写像**であるとは，$\sup_{p,q\in\mathbb{R}^d} \|f(p) - f(q)\| < 1$ であることを言い，有限個の $\mathbb{R}^d$ 上の縮小写像からなる族 $F = (f_1, \ldots, f_k)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の**反復関数系** (iterated function system, IFS) と呼ぶ．$\Sigma(k)$ を自然数全体の集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ から $\{1, \ldots, k\}$ への写像の全体とすると，この集合は離散集合 $\{1, \ldots, k\}$ の無限直積としての直積位相により Cantor 集合となる．縮小写像定理により，$x \in \mathbb{R}^d$ と $s \in \Sigma(k)$ に対して，極限

$$h_F(s, x) = \lim_{n\to\infty} f_{s(1)} \circ f_{s(2)} \circ \cdots \circ f_{s(n)}(x)$$

が x の取り方によらずに定まり，写像 $s \mapsto h_F(s, x)$ は $\Sigma(k)$ から $\mathbb{R}^d$ への連続写像となることが証明できる．この写像の像

$$\Omega(F) = \{h_F(s, x) \mid s \in \Sigma(k)\}$$

を反復関数系 F の**極限集合** (limit set) と言う．$\Sigma(k)$ がコンパクトで $h_F(\cdot, x)$ が連続であることから，$\Omega(F)$ は $\mathbb{R}^d$ のコンパクト部分集合である．$\mathbb{R}^d$ の反復関数系 $F = (f_1, \ldots, f_k)$ が**強分離条件** (strong separation condition, SSC) をみたすとは，$\mathbb{R}^d$ の空でないコンパクト部分集合 K で，すべての $i = 1, \ldots, k$ に対して $f_i(K) \subset K$，かつ，$i \neq j$ ならば $f_i(K) \cap f_j(J) = \emptyset$ となるものがあ

ることを言う．このとき，$\Omega(F)$ は Cantor 集合で

$$\Omega(F)=\bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{i_1,\ldots,i_n\in\{1,\ldots,k\}} f_{i_1}\circ\ldots f_{i_n}(K)\right)$$

をみたす．

例 1.2. $0<\mu<1$ に対して，$f_{1,\mu},f_{2,\mu}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f_{1,\mu}(x)=\frac{1-\mu}{2}x,\quad f_{2,\mu}(x)=\frac{1-\mu}{2}x+\frac{1+\mu}{2}$$

で定めると，$F_\mu=(f_{1,\mu},f_{2,\mu})$ は強分離条件をみたす $\mathbb{R}$ 上の反復写像系である ($K=[0,1]$ とすればよい)．その極限集合 $\Omega(F_\mu)$ は中央 μ-Cantor 集合 Λ_μ となる．

力学系の分岐理論においては，強分離条件をみたす反復関数系の極限集合として書ける Cantor 集合たちが交わりを持つときに，反復関数系を構成する写像たちの摂動に対してもその交わりが保たれるかどうかが問題となる場面が度々現れる．そこで「摂動に対して極限集合の交わりが保たれる」ということを次のように定式化する：$1\leq r\leq\infty$, $k\geq 1$ に対して，$\mathcal{C}^r_k(\mathbb{R}^d)$ で，k 個の C^r 級縮小写像からなる $\mathbb{R}^d$ の反復関数系で強分離条件をみたすもの全体を表す．この集合は，$\mathbb{R}^d$ からそれ自身への C^r 級写像の全体 $C^r(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ にコンパクト開 C^r 位相をいれたものの k 個の直積 $C^r(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)^k$ の部分空間として定まる C^r 位相を持つ．$F\in\mathcal{C}^r_k(\mathbb{R}^d)$, $G\in\mathcal{C}^r_\ell(\mathbb{R}^d)$ について，組 (F,G) が C^r**-stable intersection property** (以下，C^r**-ISP** と書く) を持つとは，$\mathcal{C}^r_k(\mathbb{R}^d)$ における F の C^r-近傍 $\mathcal{U}$ と $\mathcal{C}^r_\ell(\mathbb{R}^d)$ における G の C^r-近傍 $\mathcal{V}$ で，すべての $\tilde{F}\in\mathcal{U}$, $\tilde{G}\in\mathcal{V}$ に対して $\Omega(\tilde{F})$ と $\Omega(\tilde{G})$ が交わるものが存在することを言う．

C^r-SIP に関する基本的な問題は次のものである．

問題 1.3. 与えられた $d\geq 1$，$1\leq r\leq\infty$ に対して，$k\geq 1$, $\ell\geq 1$ と $F\in\mathcal{C}^r_k(\mathbb{R}^d)$, $G\in\mathcal{C}^r_\ell(\mathbb{R}^d)$ で，(F,G) が C^r-SIP を持つものの存在 (または非存在) を示せ．

問題 1.4. 与えられた $F\in\mathcal{C}^r_k(\mathbb{R}^d)$, $G\in\mathcal{C}^r_\ell(\mathbb{R}^d)$ に対して，(F,G) が C^r-SIP を持つかどうかを判定する方法を見つけよ．

これらの問題に関して 1 次元の場合に知られている結果を概観し，2 次元以上において最近筆者が発見した C^1-SIP を持つ反復関数系の組の構成法を述べるのが本稿の目的である．次節では 1 次元の場合を，3 節以降では 2 次元以上の場合を扱う．

2　1 次元の場合

1 次元の場合の議論の出発点となるのは Newhouse による **thickness** を用いた判定法である．ここでは Newhouse の原論文 [9] のものではなく，Moreira の論文 [6] にある改良されたものについて説明する．以下，区間 $I\subset\mathbb{R}$ に対して $|I|$ でその長さを表す．

K を $\mathbb{R}$ の Cantor 部分集合とする．その補集合 $\mathbb{R}\setminus K$ の連結成分の全体を $\mathrm{Gap}(K)$, その中で有界なもの全体のなす集合を $\mathrm{Gap}_b(K)$ と書く．$I=(a,b)\in\mathrm{Gap}_b(K)$ に対して，

$$\ell(K,I)=\inf\{c<a \mid J\in\mathrm{Gap}(K), |J|\geq|I| \;\Rightarrow\; J\cap[c,a]=\emptyset\},$$
$$r(K,I)=\sup\{c>b \mid J\in\mathrm{Gap}(K), |J|\geq|I| \;\Rightarrow\; J\cap[b,c]=\emptyset\}$$

と定める．すなわち，$\ell(K,I)$ と $r(K,I)$ はそれぞれ I の左端点，または右端点を含み，かつ，$|I|$ 以上の長さを持つ $\mathbb{R}\setminus K$ の連結成分と交わらない区間で最大のものの長さである．これらの量を用いて，**left-thickness** $\tau_\ell(K)$ と **right-thickness** $\tau_r(K)$ は次のように定義される．

$$\tau_\ell(K)=\inf_{I\in\mathrm{Gap}_b(K)}\frac{\ell(K,I)}{|I|},\quad \tau_r(K)=\inf_{I\in\mathrm{Gap}_b(K)}\frac{r(K,I)}{|I|}$$

例 2.1. $0<\mu<1$ に対して，Λ_μ を中央 μ-Cantor 集合とすると，長さ μ^n のである $I\in\mathrm{Gap}_b(\Lambda_\mu)$ に対して，$\ell(\Lambda_\mu,I)=r(\Lambda_\mu,I)=\frac{1-\mu}{2\mu}\mu^n$ となるので，$\tau_\ell(\Lambda_\mu)=\tau_r(\Lambda_\mu)=\frac{1-\mu}{2\mu}$.

これらの thickness を用いて，$\mathbb{R}$ の二つの Cantor 部分集合が交わりを持つための十分条件を得ることができる．

定理 2.2. (Neowhouse [9], Moreira [6]) $\mathbb{R}$ の Cantor 部分集合 K_1,K_2 が，

$$\tau_\ell(K_1)\cdot\tau_r(K_2)\geq 1,\quad \tau_r(K_1)\cdot\tau_\ell(K_2)\geq 1$$

をみたすならば[*1]，次のいずれかが成り立つ．

(a) $K_1\cap K_2\neq\emptyset$.
(b) $K_2\subset I_1$ となる $I_1\in\mathrm{Gap}(K_1)$ が存在する．
(c) $K_1\subset I_2$ となる $I_2\in\mathrm{Gap}(K_2)$ が存在する．

定理の (b)(c) は K_1 と K_2 が自明に交わりを持たない場合であり，それらを除けば thickness が十分に大きい二つの Cantor 集合は交わることを定理は主張している．Palis-Takens の本 [10] の Section 4.3, Theorem 2 の議論を用いると次を示すこともできる．

定理 2.3. $\tau_\ell(\Omega(\cdot)),\tau_r(\Omega(\cdot)):\mathcal{C}^2_k(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ は下半連続[*2].

この定理と，$F\in\mathcal{C}^1_k(\mathbb{R})$ に対してコンパクト集合 $\Omega(F)$ を与える写像が Hausdorff 距離に関して連続となることを用いると次がわかる．

系 2.4. $F\in\mathcal{C}^2_k(\mathbb{R})$, $G\in\mathcal{C}^2_\ell(\mathbb{R})$ が

$$\tau_\ell(\Omega(F))\cdot\tau_r(\Omega(G))>1,\quad \tau_r(\Omega(F))\cdot\tau_\ell(\Omega(G))>1$$

[*1] Moreira の論文では thickness に関する等号のない不等式を仮定しているが，証明は等号がある場合も機能する．

[*2] 実際には，$C^{1+\epsilon}$-位相 $(\epsilon>0)$ について下半連続であることを証明できる．また，Newhouse[9] や Palis-Takens[10] では，$\mathrm{Gap}_b(K)$ の「順番」を固定して thickness を定義しており，その定義では $C^{1+\epsilon}$-位相に対する連続性が証明できるが，ここで与えた Moreira による定義では下半連続性しか成り立たない．

をみたし，すべての $I_1 \in \mathrm{Gap}(\Omega(F))$, $I_2 \in \mathrm{Gap}(\Omega(G))$ に対して $\Omega(G) \not\subset \overline{I_1}$, $\Omega(F) \not\subset \overline{I_2}$ であるとき[*3]，(F, G) は C^2-SIP を持つ．

例 2.5. $F_\mu = (f_{1,\mu}, f_{2,\mu})$ を例 1.2 の中央 μ-Cantor 集合を極限集合とする反復関数系とする．$\tau_\ell(\Omega(F_\mu)) = \tau_r(\Omega(F_\mu)) = \frac{1-\mu}{2\mu}$ より，$\mu, \lambda \in (0, 1/3)$ に対して，(F_μ, F_λ) は C^2-SIP を持つ．

反復関数系の C^1 位相に関して，極限集合の thickness は連続ではない．

定理 2.6 (Ures [11])**.** C^1-generic な $\mathcal{C}_k^1(\mathbb{R})$ の元 F に対して，$\tau_\ell(\Omega(F)) = \tau_r(\Omega(F)) = 0$.

この定理は Newhouse の thickness を用いた判定法が C^1-SIP に関しては役に立たないことを意味している．実際，Moreira は次の結果を得ている．

定理 2.7 (Moreira [7])**.** すべての k, ℓ に対して，C^1-SIP を持つ $(F, G) \in \mathcal{C}_k^1(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_\ell^1(\mathbb{R})$ は存在しない．

Cantor 集合の大きさを測る量としてよく用いられる Hausdorff 次元と stable intersection property の関係についても Moreira らによる結果がある．1 次元の反復関数系の極限集合の Hausdorff 次元は **upper box dimension** と等しいことが知られている．まず，C^r-SIP を持つ $\mathbb{R}^d$ の反復関数系の組がみたすべき極限集合の upper box dimension に関する不等式について見ておこう．$\mathbb{R}^d$ のコンパクト部分集合 K の upper box dimension $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}$ は，座標に平行な一辺の長さが ϵ の d 次元立方体で K を覆うのに必要となる立方体の数の最小値を $N(K, \epsilon)$ として，

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} K = \lim_{\epsilon \to 0} -\frac{\log N(K, \epsilon)}{\log \epsilon}$$

で定義される．コンパクト集合 $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^d$ に対して，$K_1 - K_2 = \{x - y \in \mathbb{R}^d \mid x \in K_1, y \in K_2\}$ と置いたとき，K_1, K_2 を覆う一辺が ϵ の立方体の中心たちをそれぞれ $x_1, \ldots, x_\ell$, $y_1, \ldots, y_k$ とすると $K_1 - K_2$ は $x_i - y_j$ たちを中心とする一辺が 2ϵ の立方体で覆うことができることから，

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(K_1 - K_2) \le \overline{\dim}_{\mathrm{B}} K_1 + \overline{\dim}_{\mathrm{B}} K_2$$

が成り立つ．$v \in K_1 - K_2$ であることと，K_1 と $K_2 + v$ が交わりを持つことは同値なので，$\mathbb{R}^d$ の反復関数系の組 (F, G) が C^∞-SIP を持つならば，0 に近い $v \in \mathbb{R}^d$ に対して C^∞ 位相で G に近い反復関数系で $\Omega(G) + v$ を極限集合として持つものがあることから，$\Omega(F) - \Omega(G)$ が 0 の近傍を含まなければならず，$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(\Omega(F) - \Omega(G)) = d$ である．従って，(F, G) が C^∞-SIP を持つならば，upper box dimension に関する不等式

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} \Omega(F) + \overline{\dim}_{\mathrm{B}} \Omega(G) \ge d$$

が成り立たなければならない．C^2-SIP に関しては，この条件が十分条件にほぼ等しいことを主張するのが次の結果である．

[*3] $\mathbb{R}^d$ の部分集合 A に対して $\overline{A}$ で A の閉包を表す．

定理 2.8 (Moreira-Yoccoz [8])．$k, \ell \geq 2$ に対して，

$$\mathcal{I}_{k,\ell} = \{(F,G) \in \mathcal{C}^2_k(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^2_\ell(\mathbb{R}) \mid \overline{\dim}_{\mathrm{B}}\, \Omega(F) + \overline{\dim}_{\mathrm{B}}\, \Omega(G) > 1\}$$

と置くと，$\mathcal{I}_{k,\ell}$ の開，かつ，稠密な部分集合 $\mathcal{O}$ で，$\Omega(F) \cap \Omega(G) \neq \emptyset$ をみたすすべての $(F,G) \in \mathcal{O}$ が C^2-SIP を持つものが存在する．

3　2 次元以上の場合

次の問題は 1 次元の場合の結果から自然に提起されるものである．

問題 3.1. $d \geq 2$, $r \geq 1$ に対して，$k, \ell \geq 2$, $(F,G) \in \mathcal{C}^r_k(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{C}^r_\ell(\mathbb{R}^d)$ で C^r-SIP をみたすものは存在するか．特に $r = 1$ の場合はどうか．

高次元であるが 1 次元に近い場合として，複素 1 次元の正則反復関数系のカテゴリーでは Buzzard[5], Araujo-Moreira[1], Biebler[3] らによって，Newuhouse の thickness を用いた議論の類似が得られている．

筆者は最近，$d \geq 2$ に対して C^1-SIP を持つ $\mathbb{R}^d$ 上の反復関数系例を構成した．

定理 3.2 (浅岡 [2])．$d_1, d_2 \geq 2$ と $\epsilon > 0$ に対して，$k \geq 2$, $\ell \geq 2$ と $F \in \mathcal{C}^1_k(\mathbb{R}^{d_1+d_2})$, $G \in \mathcal{C}^1_\ell(\mathbb{R}^{d_1+d_2})$ で．$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}\, \Omega(F) < d_1 + \epsilon$, $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}\, \Omega(G) < d_2 + \epsilon$，かつ，$(F,G)$ が C^1-SIP を持つものが存在する．

前節で注意したように，$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}\, \Omega(F) + \overline{\dim}_{\mathrm{B}}\, \Omega(G) < d_1 + d_2$ ならば (F,G) はすべての $1 \leq r \leq \infty$ に対して C^r-SIP を持たないことに注意しよう．

以下，本稿では $d_1 = d_2 = 1$，すなわち，$\mathbb{R}^2$ 上の反復関数系の場合に C^1-SIP を持つ組を構成し，それがなぜ C^1-SIP を持つのかについてのおおよその説明を与える．この例は Bonatti-Diaz が発見した blender と呼ばれる機構を用いて構成されるので，まず次節では blender について説明する．そして，最後の節で blender を用いて例を構成し，それが C^1-SIP を持つ理由の核心部分を説明する．

4　Blender

Bonatti と Diaz は論文 [4] で **blender** と呼ばれる Cantor 集合でありながらあたかも高次元の多様体のように振る舞う双曲集合を導入し，それによって構造安定でないにもかかわらず摂動しても位相推移性を保ちつづける微分同相写像の例を構成した．この節では彼らの blender を $\mathbb{R}^2$ の反復関数系の言葉で表現した例を与え，その「高次元多様体のような振舞い」がどのようなものであるかを述べる．

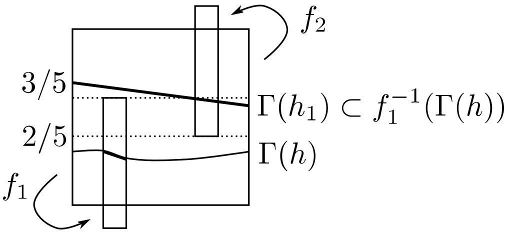

図 1　反復関数系 $F = (f_1, f_2)$

$0 < \mu < /1/8$ を固定して，$f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f_1(x,y) = \left(\mu x + \frac{1}{4}, \frac{4}{5}y - \frac{1}{5}\right), \qquad f_2(x,y) = \left(\mu x + \frac{3}{4}, \frac{4}{5}y + \frac{2}{5}\right)$$

で定める．f_1, f_2 は縮小写像で，$K = [0,1] \times [-2,3]$ とすると，f_1, f_2 は縮小写像で，

$$f_1(K) \subset \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right] \times \left[-\frac{9}{5}, \frac{11}{5}\right], \qquad f_2(K) \subset \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right] \times \left[-\frac{6}{5}, \frac{14}{5}\right]$$

となることから，$f_1(K) \subset f_2(K) \subset K$, $f_1(K) \cap f_2(K) = \emptyset$ が成り立つ．よって，反復関数系 $F = (f_1, f_2)$ は強分離条件をみたし，$\Omega(F) \subset K$ となる $\mathcal{C}_2^\infty(\mathbb{R}^2)$ の元である．$\Omega(F)$ は次のような意味で「垂直方向の 1 次元多様体」のように振る舞う．

命題 4.1. $0 < \alpha < 1/5$ とする．α-Lipschitz 関数 $h : [0,1] \to (0,1)$ に対して，そのグラフ $\Gamma(h) = \{(x, h(x)) \mid x \in [0,1]\}$ は $\Omega(F)$ と交わる．

Proof. 縮小写像 $f_i^-, f_i^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f_i(x,y) = (f_i^-(x), f_i^+(y))$ で定め，$J_1 = f_1^+([0,1]) = [-1/5, 2/5]$, $J_2 = f_2^+([0,1]) = [2/5, 6/5]$ と置く．$h : [0,1] \to (0,1)$ を α-Lipschitz 関数とすると，$I = \{h(x) \mid x \in [0,1]\}$ は $(0,1)$ に含まれる長さが α 以下の区間である．$(0,1) \subset J_1 \cup J_2$, $J_1 \cap J_2 = [2/5, 3/5]$ であることから，$i_1 \in \{1,2\}$ で $I \subset \mathrm{Int}\, J_{i_1}$ となるものが存在する．関数 $h_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$h_1(x) = (f_{i_1}^+)^{-1}(h(f_{i_1}^-(x)))$$

で定めると，h_1 は $(0,1)$ に値を持つ $(5/4)\mu\alpha$-Lipschitz 関数で，$f_{i_1}(x, h_1(x)) = (f_{i_1}^-(x), h(f_{i_1}^-(x)))$ となるので，

$$f_{i_1}(\Gamma(h_1)) = \Gamma(h) \cap f_{i_1}([0,1] \times [0,1])$$

をみたす．$(5/4)\mu\alpha < \alpha$ より，h_1 に対しても同様に $i_2 \in \{1,2\}$ と α-Lipschitz 関数 $h_2 : [0,1] \to (0,1)$ を構成でき，以下繰り返すことで，$(0,1)$ に値を持つ $[0,1]$ 上の α-Lipschitz 関数の列 $(h_n)_{n \geq 0}$ と $\{1,2\}$ に値を持つ数列 $(i_n)_{n \geq 1}$ で，$h_0 = h$，かつ，$n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$f_{i_n}(\Gamma(h_n)) = \Gamma(h_{n-1}) \cap f_{i_n}([0,1]^2)$$

をみたすものが構成でき，

$$\bigcap_{n \geq 1} f_{i_1} \circ \cdots f_{i_n}(\Gamma(h_n)) \subset \Gamma(h) \cap \bigcap_{n \geq 1} f_{i_1} \circ \cdots f_{i_n}([0,1]^2)$$

となる．左辺は空でないコンパクト集合で，右辺は $\Gamma(h)\cap\Omega(F)$ に含まれるので $\Gamma(h)$ と $\Omega(F)$ は交わりを持つ． $\square$

命題の証明のアイデアは F を C^1-摂動したものにも適用でき，それを用いて次が証明される[*4]．

命題 4.2. $0<\alpha<1/5$ とする．F の $\mathcal{C}^1_2(\mathbb{R}^2)$ における近傍 $\mathcal{U}$ で，$\tilde{F}\in\mathcal{U}$ と α-Lipschitz 関数 $h:[0,1]\to(0,1)$ に対して $\Gamma(h)$ と $\Omega(\tilde{F})$ がつねに交わるようなものが存在する．

5 定理 3.2 の証明のアイデア

命題 4.2 は，極限集合 $\Omega(F)$ があたかも $[0,1]^2$ の垂直方向の 1 次元部分多様体のように C^1 摂動をしてもすべての α-Lipschitz 関数 $h:[0,1]\to(0,1)$ のグラフと交わると解釈することができる．それならば，前節の blender を持つ反復関数系 $F=(f_1,f_2)$ の縦横を入れ換えたものを $G=(g_1,g_2)$ とすればそれぞれの極限集合が $[0,1]^2$ の垂直方向，水平方向の 1 次元部分多様体のように振る舞うので，それらの C^1 摂動もつねに交わりを持つのではないか，というのが C^1-SIP を持つ反復関数系の組の構成の基本的なアイデアである．すなわち，$F=(f_1,f_2)$ を前節のものとし，$f_i(x,y)=(f_i^-(x),f_i^+(y))$ と置き，$G=(g_1,g_2)\in\mathcal{C}^\infty_2(\mathbb{R}^2)$ を $g_i(x,y)=(f_i^+(x),f_i^-(y))$ で定めたときに次が成り立つ．

定理 5.1. (F,G) は C^1-SIP を持つ．

ここでは，問題の単純化として，$v\in\mathbb{R}^2$ によって $g_{i,v}(x,y)=g_i(x,y)+v$ で定められる簡単な G の摂動 $G_v=(g_{1,v},g_{2,v})$ に対して極限集合の交わりが保たれること，すなわち，次が成り立つことを示す．

定理 5.2. $\|v\|<1/8$ に対して，$\Omega(F)$ と $\Omega(G_v)$ は交わる．

Proof. $f_i(x,y)=(f_i^-(x),f_i^+(y))$, $g_{j,v}(x,y)=(g_{j,v}^+(x),g_{j,v}^-(x))$ と置く．$\mathbb{R}^2$ の長方形 $R=[a,b]\times[c,d]$, $R'=[a',b']\times[c',d']$ が $[a,b]\subset(a',b')$, $[c',d']\subset(c,d)$ をみたすとき，組 (R,R') は**横断的**であると言うことにする．$\|v\|<1/8$ のとき，$i=1,2$ に対して $(f_i([0,1]^2),g_{i,v}([0,1]^2))$ は横断的である．

$n\geq 1$, $i_1,\ldots,i_n,j_1,\ldots,j_n\in\{1,2\}$ に対して，長方形の組

$$(f_{i_1}\circ\cdots\circ f_{i_n}([0,1]^2),g_{j_1,v}\circ\cdots\circ g_{j_n,v}([0,1]^2))$$

が横断的であるとする．このとき，

$$R_*=f_{i_1}\circ\cdots\circ f_{i_n}([0,1]^2)\cap g_{j_1,v}\circ\cdots\circ g_{j_n,v}([0,1]^2)$$

[*4] 実際の証明については [2, Proposition 2.12] などを参照せよ

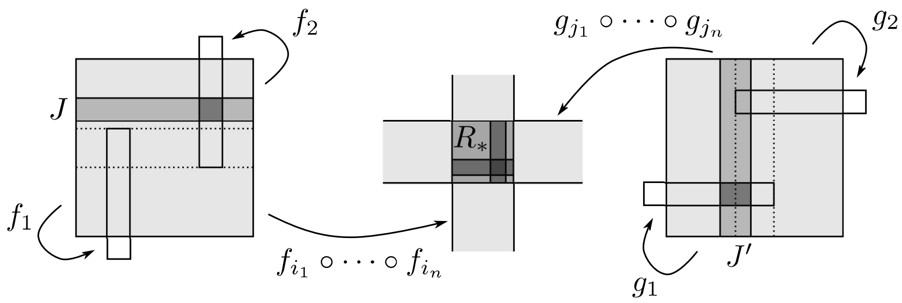

図 2　定理 5.2 の証明

と置くと，閉区間 $J, J' \subset (0,1)$ で

$$(f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_n})^{-1}(R_*) = [0,1] \times J, \quad (g_{j_1,v} \circ \cdots \circ g_{j_n,v})^{-1}(R_*) = J' \times [0,1]$$

となるものがある．実際，横断性から

$$R_* = (f_{i_1}^- \circ \cdots \circ f_{i_n}^-)([0,1]) \times (g_{j_1,v}^- \circ \cdots \circ g_{j_n,v}^-)([0,1])$$

となるので，

$$J = (f_{i_1}^+ \circ \cdots \circ f_{i_n}^+)^{-1} \circ (g_{j_1,v}^- \circ \cdots \circ g_{j_n,v}^-)([0,1]),$$
$$J' = (g_{j_1,v}^+ \circ \cdots \circ g_{j_n,v}^+)^{-1} \circ (f_{i_1}^- \circ \cdots \circ f_{i_n}^-)([0,1])$$

となる．特に $(f_i^-)' = (g_{j,v}^-)' = \mu$, $(f_i^+)' = (g_{j,v}^+)' = 4/5$ より，J, J' の長さは $(\mu \cdot 5/4)^n$ であり，$0 < \mu < 1/8$ より $1/5$ より短い．$\|v\| < 1/8$ ならば $(0,1) \subset g_{1,v}^+([0,1]) \cup g_{2,v}^+([0,1])$，かつ，$g_{1,v}^+([0,1]) \cap g_{2,v}^+([0,1])$ は長さが $1/5$ の区間であることから，前節の命題 4.1 の証明と同様に，$i_{n+1}, j_{n+1} \in \{1,2\}$ で

$$J \subset f_{i_{n+1}}^+([0,1]), \quad J' \subset g_{j_{n+1},v}^+([0,1])$$

となるものを取ることができ，長方形の組

$$(f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_n} \circ f_{i_{n+1}}([0,1]^2), g_{j_1,v} \circ \cdots \circ g_{j_n,v} \circ g_{j_{n+1},v}([0,1]^2))$$

は横断的となる．

横断的な組，$(f_1([0,1]^2), g_{1,v}([0,1]^2))$，または，$(f_2([0,1]^2), g_{2,v}([0,1]^2))$ から始めて上の手順を繰り返すと，$\{1,2\}$ に値を持つ数列 $(i_n)_{n \geq 1}$, $(j_n)_{n \geq 1}$ で，すべての $n \geq 1$ に対して長方形の組

$$(f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_n}([0,1]^2), g_{j_1,v} \circ \cdots \circ g_{j_n,v}([0,1]^2))$$

が横断的となるものがある．$f_i, g_{j,v}$ の形から，$f_i^-([0,1]) \subset (0,1)$, $g_j^-([0,1]) \subset (0,1)$，かつ，

$$f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_n}([0,1]^2) \cap g_{j_1,v} \circ \cdots \circ g_{j_n,v}([0,1]^2) = f_{i_1}^- \circ \cdots \circ f_{i_n}^-([0,1]) \times g_{j_1,v}^- \circ \cdots \circ g_{j_n,v}^-([0,1])$$

となることに注意すると，

$$\bigcap_{n\geq 1} f_{i_1}\circ\cdots\circ f_{i_n}([0,1]^2)\cap g_{j_1,v}\circ\cdots\circ g_{j_n,v}([0,1]^2)$$

が空でない $\Omega(F)\cap\Omega(G_v)$ の部分集合であることがわかる． □

前節の命題 4.1 と同様に，上の定理の証明のアイデアを F,G を C^1 摂動したものに適用することで，(F,G) が C^1-SIP を持つことが証明できる．

最後に $\Omega(F),\Omega(G)$ の upper box dimension を上から評価しておこう．$\Omega(G)$ は $\Omega(F)$ の縦横を入れ替えたものなので，$\Omega(F)$ について計算すれば十分である．$F_+=(f_1^+,f_2^+)$ と置くと，$\Omega(F)\subset\Omega(F_+)\times[-2,3]$ である．$n\geq 1$ に対して $\Omega(F_+)$ は 2^n 個の長さ μ^n の区間たちで，$[0,1]$ は $\lfloor 5\mu^{-n}\rfloor+1$ 個の長さ μ^n の区間たちで覆うことができることから，

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}\,\Omega(F)\leq\lim_{n\to\infty}-\frac{\log 2^n(5\lfloor\mu^{-n}\rfloor+1)}{\log\mu^n}=1+\frac{\log(2)}{\log(1/\mu)}$$

となる．従って，μ が 0 に十分近ければ，$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}\,\Omega(F)$ も 1 に十分近くなる．

参考文献

[1] H.Araújo and C.G.Moreira, Stable intersections of conformal Cantor sets. `arXiv:1910.03715`.

[2] M.Asaoka, Stable intersection of Cantor sets in higher dimension and robust homoclinic tangency of the largest codimension. `arXiv:1911.08091`.

[3] S.Biebler, A complex gap lemma, `arXiv:1810.02544`.

[4] C.Bonatti and L.J.Díaz, Persistent nonhyperbolic transitive diffeomorphisms. Ann. of Math. (2) 143 (1996), no. 2, 357–396.

[5] G.T.Buzzard, Stably interesting Julia sets of polynomials. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 317 (1993), no. 11, 1013–1018.

[6] C.G.Moreira, Stable intersections of Cantor sets and homoclinic bifurcations. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 13 (1996), no. 6, 741–781.

[7] C.G.Moreira, There are no C^1-stable intersections of regular Cantor sets. Acta Math. 206 (2011), no. 2, 311–323.

[8] C.G.T.de A.Moreira and J.-C.Yoccoz, Stable intersections of regular Cantor sets with large Hausdorff dimensions. Ann. of Math. (2) 154 (2001), no. 1, 45–96.

[9] S.E.Newhouse, The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 50 (1979), 101–151.

[10] J. Palis and F. Takens, Hyperbolicity and sensitive-chaotic dynamics at homoclinic bifurcations. Cambridge University Press, 1993.

[11] R.Ures, Abundance of hyperbolicity in the C^1 topology. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 28 (1995), no. 6, 747–760.