作用積分によるエネルギー固定問題の変分解析

京都大学大学院情報学研究科　柴山允瑠
Mitsuru Shibayama
Graduate School of Informatics, Kyoto University

概要

ポテンシャル関数が $-1/|q|^\alpha (q \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ のような特異点を持つポテンシャル系において，与えられた値をエネルギーとして持つ周期軌道の存在について考察する．そのような周期解を求めるため，これまで Jacobi-Maupertuis 計量やそれを変形した汎関数が用いられてきた．本論文では，作用積分を用いた試みについて述べる．特に，2 自由度の場合の強い引力の場合について周期解の存在を示す．また，弱い引力の場合や 3 自由度以上の場合についてはまだ未完成ではあるが，generalized periodic solution の存在やそれが古典解であるための条件について論ずる．

1　エネルギー固定問題

$D \subset \mathbb{R}^N$ を開集合とし，$V(q) \in C^2(D, \mathbb{R})$ とする．V をポテンシャル関数とするポテンシャル系

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\nabla V(q) \tag{1}$$

を考える．(1) の任意の解について，エネルギー $\frac{1}{2}\left|\frac{dq}{dt}\right|^2 + V(q)$ は一定である．言い換えると，$h \in \mathbb{R}$ を任意の定数としたとき，

$$S_h = \left\{(q, \dot{q}) \in D \times \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{2}|\dot{q}|^2 + V(q) = h\right\}$$

は不変である．そこで，S_h に含まれる周期解の存在について考える．すなわち，

$$\frac{1}{2}\left|\frac{dq}{dt}\right|^2 + V(q) = h. \tag{2}$$

を満たす (1) の周期解の存在について調べる．

S_h がコンパクトな場合について，(2) を満たす (1) の周期解の存在が知られている[*1]．そこで，S_h がコンパクトでない場合が問題である．例えば，V が特異点を持つ場合や，h が大きくて q の動きうる範囲

$$\{q \in D \mid V(q) \leq h\}$$

が非有界になる場合などである．

[*1] S_h がコンパクトな場合は，ポテンシャル系に限らない一般のハミルトン系についてかなり詳しく研究されている．Weinstein は S_h がコンパクトで接触型であれば周期解が存在するであろうと予想し，それは Viterbo[18] や Hofer & Zehnder[8] により肯定的に解決された．ポテンシャル系の場合は S_h は接触型なのでコンパクトであれば，周期軌道が存在する．

エネルギー固定の元での周期解の存在を示すために，汎関数

$$\mathcal{I}_h(Q) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left|\frac{dQ}{d\tau}\right| d\tau \int_0^1 h - V(Q) d\tau \tag{3}$$

がよく用いらてきた．$Q(\tau)$ が $\mathcal{I}_h$ の臨界点で $Q(\tau) \in D$ を満たすとき，

$$T = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\int_0^1 \left|\frac{dQ}{d\tau}\right|^2 d\tau}{\int_0^1 h - V(Q) d\tau}}$$

とおくと $q(t) = Q(t/T)$ が (1) と (2) を満たす．

一方，ポテンシャル系の変分構造としては，作用積分

$$\mathcal{A}(q) = \int_0^T \frac{1}{2}\left|\frac{dq}{dt}\right|^2 - V(q) dt$$

が古くから知られており，膨大な結果がある．特に近年は 3 体問題の 8 の字解 [5] の存在が証明されたことを契機として n 体問題の多くの周期解の存在証明がなされている．それらは作用積分の臨界点を求めることで得られている．作用積分を用いる際は周期 T を固定した元で周期解を得ることができる．得られた解はエネルギーを保存するが，それは結果として定まるものであり，最初に指定してそのエネルギーを持つ解が得られるわけではない．

特異点を持つポテンシャル系の周期解の存在証明について，エネルギー固定の元より，作用積分を用いた周期固定の元での結果の方が適用範囲は広い．具体的には，ポテンシャル関数 $V(q)$ が $0 \in \mathbb{R}^N$ を特異点に持つ場合を考えるとし，特異点付近の振る舞いが

$$V(q) \sim -\frac{1}{|q|^\alpha}$$

のように振る舞うとする．「のように振る舞う」の意味は論文ごとに微妙に定義が異なる (90 年代前半までの結果については，[2] に整理されている)．少なくとも，

$$V(q) = -\frac{1}{|q|^\alpha}$$

の摂動系は含まれる．周期固定の元での周期解の存在は

$$1 < \alpha < 2, \quad \alpha > 2 \qquad\qquad (N \geq 2)$$

で示されている [3, 14, 17]．一方，エネルギー固定の元での周期解の存在は

$$\begin{aligned} &\frac{4}{3} < \alpha < 2(h < 0), \quad \alpha > 2(h > 0) &&(N = 3)\\ &1 < \alpha < 2(h < 0), \quad \alpha > 2(h > 0) &&(N \geq 4). \end{aligned}$$

で示されている [4, 7, 13]．[12] で，$1 < \alpha < 2(h < 0, N \geq 2)$ の場合に，周期解の存在を示してはいるが，課されている大域的な条件が厳しい．弱い大域的な条件もとで，$1 < \alpha < 2(h < 0, N \geq 2)$ に対して，周期解の存在を示すことがこの分野の問題の 1 つである*2.

本論文では，エネルギー固定問題に対して，作用積分を用いたアプローチを試みる．それにより得られた結果を述べる．以下の仮定を考える:

*2 $0 < \alpha < 1$ の場合は，周期解より衝突解の作用積分の方が小さくなるので，変分法により周期解を求めることはさらに難しい.

(V1) $V(q) \in C^2(\mathbb{R}^N \backslash \{0\}, \mathbb{R})$;

(V2) 任意の $q \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ に対し $V(q) < 0$ が成り立ち，$|q| \to \infty$ のとき一様に $V(q), \nabla V(q) \to 0$ が成り立つ;

(SF) ある関数 $W(q) \in C^2(\mathbb{R}^N \backslash \{0\}, \mathbb{R})$ と実数 $\alpha > 2$ が存在して，

$$V(q) = -\frac{1}{|q|^\alpha} + W(q)$$

と表され，

$$|q|^\alpha W(q), |q|^{\alpha+1} \nabla W(q), |q|^{\alpha+2} \nabla^2 W(q) \to 0 \qquad (q \to 0)$$

が成り立つ.

定理 1. $N = 2$ とし，*(V1), (V2), (SF)* を仮定する．このとき，任意の $h > 0$ に対し，(1) と (2) を満たす $q(t)$ が存在する．

これと同様の結果はすでに示されている [4, 7, 9]．しかし，手法が異なる．本論文では，(3) ではなく作用積分を用いる．また，これまでの結果では $\nabla V(q) \cdot q$ に対する大域的な不等式条件が仮定されているが，定理 1 にはそのような仮定は必要ない．その点で，結果としても，拡張になっている．

次の節で，作用積分によるエネルギーのコントロールについて述べる．第 3 節で定理 1 を証明する．第 4 節で，弱い力，すなわち $0 < \alpha < 2$ の場合について，generalized periodic solution の存在について議論する．また，$V = -\frac{1}{|q|^\alpha}$ の場合をもとに推測すると，それは $\alpha > 1$ の場合は，古典解になっていると予想される．それを示すために解決すべき課題についても述べる．第 5 節で，自由度が 3 以上の場合について，周期解と generalized periodic solution の存在について論ずる．

2 作用積分によるエネルギーのコントロール

作用積分は周期 T を固定したもとで定式化される．前節でも述べた通り，その臨界点として解が得られても，そのエネルギーは指定できない．ここでは，与えられたエネルギーを持つ解を作用積分により求める方法について述べる．作用積分について，周期 T の変動も許した元でも臨界点となるものが求まれば，それはエネルギー 0 であることが知られている (例えば，[6] 参照)．その手法は，変分法による collision-brake orbit やヘテロクリニック軌道の存在証明などでも用いられてきた (例えば，[10, 11] 参照)．ここでは，エネルギーを h に指定したいので，ラグランジアンにその値を加える．

$T > 0$ と $h \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\mathcal{A}_{T,h}(q) = \int_0^T \frac{1}{2} |\dot{q}|^2 - V(q) + h dt \qquad (q \in H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N \backslash \{0\}))$$

とおく．h は固定する．$T > 0$ の変化も許した元で，$q_{T_0,h}$ が $\mathcal{A}_{T,h}(q)$ の臨界点であると仮定する．$T = T_0$ を固定した元での変分を考えることにより，$q_{T_0,h}(t)$ は (1) の解であり，$\frac{1}{2}|\dot{q}_{T_0,h}|^2 + V(q_{T_0,h})$ は一定である．さらに，T が変動する変分を考えることで，(2) を満たすことがわかる，

実際，$\rho_\varepsilon(s) = q_{T_0,h}((1+\varepsilon)s)(s \in [0, \frac{T_0}{1+\varepsilon}])$ とおくと，$t=(1+\varepsilon)s$ により置換積分することにより

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\frac{T_0}{1+\varepsilon},h}(\rho_\varepsilon) &= \int_0^{\frac{T_0}{1+\varepsilon}} \frac{1}{2}\left|\frac{d(q_{T_0,h}((1+\varepsilon)s))}{ds}\right|^2 - V(q_{T_0,h}) + hds \\ &= \int_0^{T_0} \frac{1+\varepsilon}{2}\left|\frac{dq_{T_0,h}(t)}{dt}\right|^2 + (-V(q_{T_0,h})+h)(1+\varepsilon)^{-1}dt\end{aligned}$$

となる．よって，ε に関する 0 での微分は

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathcal{A}_{\frac{T_0}{1+\varepsilon},h}(\rho_\varepsilon) = \int_0^{T_0} \frac{1}{2}|\dot{q}_{T_0,h}|^2 + V(q_{T_0,h}) - hdt = 0 \tag{4}$$

となる．この被積分関数 $\frac{1}{2}|\dot{q}_{T_0,h}|^2 + V(q_{T_0,h}) - h$ は一定値をとるが，積分値が 0 なので $\frac{1}{2}|\dot{q}_{T_0,h}|^2 + V(q_{T_0,h}) - h = 0$ である．

3　定理 1 の証明

定理 1 を証明する．

$$\Lambda_T = \{q \in H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2\backslash\{0\}) \mid \mathrm{wind}(q) \neq 0\}$$

と定義する．ここで，wind は 0 の周りの回転数

$$\mathrm{wind}(q) := \frac{1}{2\pi}(\theta(T) - \theta(0)) \qquad (q(t) = r(t)(\cos\theta(t), \sin\theta(t)))$$

を表す．各 $T > 0$ に対して，$\mathcal{A}_{T,h}$ の最小点 (minimizer) が存在する．

さらに $T > 0$ を変動させたときの最小点を求める．つまり，

$$\inf_{T>0} \inf_{q\in\Lambda_T} \mathcal{A}_{T,h}(q)$$

を attain する q の存在を示す．各 $T > 0$ に $\inf\limits_{q\in\Lambda_T} \mathcal{A}_{T,h}(q)$ を attain する q_T が存在する．この作用積分の値を評価する．

仮定より，$\varepsilon > 0$ が存在して，任意の $0 < |q| < \varepsilon$ に対し，$|q|^\alpha|W(q)| < 1/2$ が成り立つ．これより，$0 < |q| < \varepsilon$ に対し，

$$-\frac{3}{2|q|^\alpha} \leq V(q) = -\frac{1}{|q|^\alpha}(1 - |q|^\alpha W(q)) \leq -\frac{1}{2|q|^\alpha} \tag{5}$$

と評価できる．$l > 0$ を定数とし，テスト曲線を

$$u_l(t) = l(\cos 2\pi t/T, \sin 2\pi t/T) \tag{6}$$

で定める．$0 < l < \varepsilon$ とすると，

$$\begin{aligned}\inf_{q\in\Lambda_T} \mathcal{A}_{T,h}(q) \leq \mathcal{A}_{T,h}(u_l) &= \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{u}_l(t)|^2 - V(u_l(t)) + hdt \leq \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{u}_l(t)|^2 + \frac{3}{2|u_l(t)|} + hdt \\ &\leq \frac{2\pi^2 l^2}{T} + \frac{3T}{2l^\alpha} + hT = \frac{2\pi^2}{T}\left(l^2 + \frac{3T^2}{4\pi^2 l^\alpha}\right) + hT\end{aligned} \tag{7}$$

と評価できる．ここで，初等的な補題を挙げる．これは，本論文で繰り返し用いる．

補題 1. $b>0, \alpha>0$ を定数とし，関数 $f(x)=x^2+bx^{-\alpha}(x>0)$ を考える．このとき，$f(x)$ は $x=x_0:=(b\alpha/2)^{1/(\alpha+2)}$ において，最小値 $c_\alpha b^{2/(\alpha+2)}$ をとる．ここで，$c_\alpha:=2^{-2/(\alpha+2)}\alpha^{-\alpha/(\alpha+2)}(\alpha+2)$ である．

証明. $f(x)$ の微分は $f'(x)=2x-b\alpha x^{-\alpha-1}$ である．よって，$f'(x_0)=0$ で，$0<x<x_0$ において $f'(x)<0$，$x>x_0$ において $f'(x)>0$ である．従って，f の最小値は $f(x_0)=2^{-2/(\alpha+2)}b^{2/(\alpha+2)}\alpha^{-\alpha/(\alpha+2)}(\alpha+2)$ である． □

この補題より (7) の最後の式が最小になるように $l:=l_T=(\frac{3\alpha T^2}{8\pi^2})^{1/(\alpha+2)}$ とする．$T>0$ を小さくとれば (具体的には $0<T<2^{3/2}\cdot 3^{-1/2}\pi\alpha^{-1}\varepsilon^{(\alpha+2)/2}$ とすれば)，$l_T<\varepsilon$ となるから

$$\mathcal{A}_{T,h}(u_l)\leq 3^{2/(\alpha+2)}c_\alpha\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-(\alpha-2)/(\alpha+2)}+hT \tag{8}$$

が成り立つ．

次に，$T>0$ が小さい場合の下からの評価を与える．$0<T<2^{3/2}\cdot 3^{-1/2}\pi\alpha^{-1}\varepsilon^{(\alpha+2)/2}$ とし，$\gamma(t)=(x(t),y(t))\in\Lambda_T$ を $\mathcal{A}_{T,h}$ の最小点とする．

$$r_{\max}(\gamma):=\max_{t\in[0,T]}\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}$$

とすると，$\mathrm{wind}(\gamma)\neq 0$ より γ が表す曲線の長さは $2r_{\max}$ より長いから，

$$T\int_0^T(\dot{x}^2+\dot{y}^2)dt=\int_0^T(\dot{x}^2+\dot{y}^2)dt\int_0^T 1dt\geq\left(\int_0^T\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt\right)^2>4r_{\max}^2$$

と評価できる．よって，

$$\mathcal{A}_{T,h}(\gamma)\geq\int_0^T\frac{1}{2}|\dot{\gamma}|^2+hdt\geq\frac{2r_{\max}^2}{T}+hT$$

が得られる．(8) と合わせると，

$$r_{\max}\leq 3^{1/(\alpha+2)}\pi^{(\alpha-2)/2(\alpha+2)}c_\alpha^{1/2}\left(\frac{T}{2}\right)^{2/(\alpha+2)}$$

が得られる．

この右辺が ε より小さくなるように T をさらに小さくとる．すると，(5) と補題 1 より

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{T,h}(q)&\geq\frac{2r_{\max}^2}{T}+\frac{T}{2r_{\max}^\alpha}+hT\\&=\frac{2}{T}\left(r_{\max}^2+\frac{T^2}{4r_{\max}^\alpha}\right)+hT\\&\geq c_\alpha\left(\frac{T}{2}\right)^{-(\alpha-2)/(\alpha+2)}+hT\end{aligned}\tag{9}$$

となる．以上より

$$\lim_{T\to+0}\inf_{q\in\Lambda_T}\mathcal{A}_{T,h}(q)=+\infty \tag{10}$$

がわかった．

また，

$$\mathcal{A}_{T,h}(q)\geq hT$$

であるから，$h>0$ であれば

$$\lim_{T\to+\infty}\inf_{q\in\Lambda_T}\mathcal{A}_{T,h}(q)=+\infty \tag{11}$$

である．ゆえに，(10) と (11) より T_0 と $q^* \in \Lambda_{T_0}$ があって，

$$\mathcal{A}_{T_0,h}(q^*) = \inf_{T>0} \inf_{q\in\Lambda_T} \mathcal{A}_{T,h}(q)$$

を満たす．q^* は $\mathcal{A}_{T_0,h}(q)$ の臨界点であるから (1) を満たし，前節の議論より (2) も満たす．(SF) の場合，衝突を持つ曲線の作用積分値は常に発散することから $\mathcal{A}_{T_0,0}$ の最小点は衝突しないので，q^* は古典解である．これで，定理 1 が示された．

4　弱い力の場合

(SF) の α が小さい場合を考える:

(WF)　ある関数 $W(q) \in C^2(\mathbb{R}^N \backslash \{0\}, \mathbb{R})$ と実数 $0 < \alpha < 2$ が存在して，

$$V(q) = -\frac{1}{|q|^\alpha} + W(q)$$

と表され，

$$|q|^\alpha W(q), |q|^{\alpha+1}\nabla W(q), |q|^{\alpha+2}\nabla^2 W(q) \to 0 \qquad (q \to 0)$$

が成り立つ．

$V(q) = -\frac{1}{|q|^\alpha}$ の場合をもとに推測すると，弱い力の場合は任意の負の実数に対して，その値をエネルギーとしてもつ周期解が存在すると予想される．$0 < \alpha < 1$ の場合は周期軌道よりも衝突軌道の方が作用積分の値が小さくなるので，衝突の除去は困難である．したがって，次の予想が妥当である．

予想 1. $N = 2$ とし，*(V1), (V2)* を仮定し，$1 < \alpha < 2$ に対し *(WF)* が成り立つとする．このとき，任意の $h < 0$ に対し，(1) と (2) を満たす $q(t)$ が存在する．

$1 < \alpha < 2$ の場合は，周期固定問題において作用積分の最小点を得ることにより周期解の存在が示されているので，(SF) の場合と同様に作用積分により予想 1 が解決できると期待される．

前節と同様にして，$\inf_{q\in\Lambda_T} \mathcal{A}_{T,h}(q)$ の値を評価しよう．$h < 0$ は任意にとり，固定する．この場合も，十分小さな $T > 0$ に対し，(8) と (9) は成立する．ただし，T の指数 $-(\alpha-2)/(\alpha+2)$ の符号が違うので，同様にはできない．

また，大きな $T > 0$ においては，(6) で定めたテスト曲線 u_l を用いる．(V2) より，$a > 0$ が存在して，任意の $|q| > a$ に対し，$\frac{h}{2} < V(q) < 0$ が成り立つ．$l > a$ を固定する．u_l に対する作用積分の値は

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{T,h}(u_l) &= \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{u}_l(t)|^2 - V(u_l(t)) + h dt \\
&\leq \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{u}_l(t)|^2 - \frac{1}{2}h + h dt \\
&\leq \frac{2\pi^2 l^2}{T} + \frac{hT}{2}
\end{aligned}$$

と評価できる．したがって，

$$\inf_{q\in\Lambda_T} \mathcal{A}_{T,h}(q) \leq \frac{2\pi^2 l^2}{T} + \frac{hT}{2}$$

がいえる．$h<0$ であるから，

$$\lim_{T\to\infty}\inf_{q\in\Lambda_T}\mathcal{A}_{T,h}(q)=-\infty$$

が成立する．

以上より，

$$\lim_{T\to+0}\inf_{q\in\Lambda_T}\mathcal{A}_{T,h}(q)=0,\quad \lim_{T\to\infty}\inf_{q\in\Lambda_T}\mathcal{A}_{T,h}(q)=-\infty$$

が成り立つ．また，(9) より，ある $c,\bar{T}>0$ があって，任意の $q\in\Lambda_{\bar{T}}$ に対し $\mathcal{A}_{\bar{T},h}(q)>c$ が成り立つ．

$0<T_0\ll 1\ll T_1$ をとる．Λ_{T_0} における $\mathcal{A}_{T_0,h}$ の最小点を q_0, Λ_{T_1} における $\mathcal{A}_{T_1,h}$ の最小点を q_1 とおく．

$$T_0<\bar{T}<T_1,\qquad \mathcal{A}_{T_0,h}(q_0)<\frac{c}{2},\qquad \mathcal{A}_{T_1,h}(q_1)<\frac{c}{2}$$

が成り立つとしてよい．q_0 と q_1 の間の峠点を求める．

$$\Gamma=\left\{\gamma_s\in C\left([0,1],\bigcup_{T>0}\Lambda_T\right)\mid\gamma_0=q_0,\gamma_1=q_1\right\}$$

とする．$s\in[0,1]$ である．γ_s の周期と T_s とする．T_s は T_0 から T_1 まで変化するから，$\bar{T}=T_s$ となる s が存在する．峠の定理が応用できて

$$\inf_{\gamma_s\in\Gamma}\max_{s\in[0,1]}\mathcal{A}_{T_s,h}(\gamma_s)\geq c$$

を attain する γ_{s_0} が存在すると期待されるが，それを保証するためにはこの変分構造が Palais-Smale 条件を満たすことを示さなければならない．また，γ_{s_0} の存在がいえたとしても，2 節より γ_{s_0} はエネルギー h を持つ解ではあるが，古典解とか限らない generalized periodic solution である．これは衝突を持ちうる解であり，古典解であることを示すには衝突を持たないことをいえばよい．generalized periodic solution の正確な定義は以下の通りである．

定義 1. $V(q)\in C^2(\mathbb{R}^N\backslash\{0\},\mathbb{R})$ とする．$q(t)$ が (1) と (2) が周期 T の *generalized periodic solution* とは以下の *1,2,3* を満たすことをいう*:*

1. $q(t)\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$ で $q(t+T)=q(t)$ を満たす*;*
2. $B=\{t\in\mathbb{R}\mid q(t)=0\}$ は測度 *0* である*;*
3. $q(t)\in C^2(\mathbb{R}\backslash B,\mathbb{R}^N)$ で，$q(t)$ は $\mathbb{R}\backslash B$ において (1) と (2) を満たす．

$B=\emptyset$ であれば，普通の意味で周期解，つまり周期的な古典解である．以下が予想される．

予想 2. $N=2$ とし，*(V1), (V2), (WF)* を仮定する．このとき，任意の $h<0$ に対し，(1) と (2) を満たす *generalized periodic solution* $q(t)$ が存在する．

これを証明するには，Palais-Smale 条件を示すことが必要であるである．結果としてはこの予想は正しいと期待されるが，Palais-Smale 条件を示す際の技術的な問題のために，さらに仮定を加える必要があるかもしれない．

Palais-Smale 条件を示せば予想 2 は肯定的に解決されるが，generalized periodic solution が古典解であることを示すという問題が残る．周期固定問題の研究では，作用積分の最小点は衝突を持たないことが示されているので，古典解であることをいうにはここで得られた臨界点が T を固定したもとでの作用積分の最小点であればよい．次が解決できればよい．

問題 1. γ_{s_0} が $\mathcal{A}_{T_{s_0},h}$ の最小点であることを示せ.

得られた峠点のモース指数は 1 以下で，T に関する $\mathcal{A}_{T,h}$ の振る舞いから，T が小さいところと大きいところでは $\mathcal{A}_{T,h}$ は小さく，その間の峠点を捉えているので，減少方向は T が変化する方向であり，$\Lambda_{T_{s_0}}$ に制限すると最小点になっていると期待される．しかし，それは自明ではないし，証明はまだできていない．成り立たない可能性もありうることを示す例を挙げる．

例 1. 実 *2* 変数関数

$$f(x,y) = (x+y^3)^2 - (y-x^3)^2$$

を考える．$f(\pm 1, \mp 1) = -4$ である．$(1,-1)$ と $(-1,1)$ を結ぶ任意の連続曲線は $y = x^3$ と交わる．その上では $f(x,y) = (x+y^3)^2 \geq 0$ である．また,

$$\lim_{|y|\to\infty} f(x,y) = \infty$$

なので，峠点が得られる．具体的に計算すると，$(x,y) = (0,0)$ が f の唯一の臨界点である．そこで,

$$f(0,y) = y^6 - y^2$$

であるから，$x = 0$ に制限したときに $y = 0$ は最小点ではない.

この例からわかるように，$q_{T_0,h}$ が $\mathcal{A}_{T_0,h}$ の最小点であることは自明ではない.
また，別のアプローチも考えられる．任意の $T > 0, h$ に対し,

$$\inf_{\Lambda_T} \mathcal{A}_{T,h}$$

の最小点 $q_{T,h}$ が存在し，衝突しないことが示されている．その中で，エネルギー h を持つものが得られればよい.

$h < 0$ なら

$$\lim_{T\to+0} \mathcal{A}_{T,h}(q_{T,h}) = 0, \quad \lim_{T\to\infty} \mathcal{A}_{T,h}(q_{T,h}) = -\infty$$

で，ある $\bar{T} > 0$ で

$$\mathcal{A}_{T,h}(q_{T,h}) > c > 0$$

である．よって,

$$\mathcal{A}_{T_0,h}(q_{T_0,h}) = \sup_{T>0} \mathcal{A}_{T,h}(q_{T,h})$$

となる $T_0 > 0$ が存在する．この T_0 において $\mathcal{A}_{T,h}(q_{T,h})$ は最大値をとるので，T 方向の微分が 0，すなわち (4) が成り立ち，エネルギー h を持つことが期待される．次が解決できればよい.

問題 2. T 方向の変分，具体的には $\rho_\varepsilon(s) = q_{T_0,h}((1+\varepsilon)s)(s \in [0, \frac{T_0}{1+\varepsilon}])$ に関する変分が *0* であることを示せ.

しかし，これもまた自明ではないし，次の例のように成り立たない可能性もある.

例 2. 実 *2* 変数関数

$$f(x,y) = 3y^4 - 2xy^3 - 6y^2 + 6xy - x^2$$

を考える．$x\in[-1,1]$ の範囲で考える．

$$\frac{\partial f}{\partial y}=6(y-1)(y+1)(2y-x)$$

であるので, x を固定し, y を変動させた元での f の極小値は, $f(x,1)=-x^2+4x-3, f(x,-1)=-x^2-4x-3$ である．したがって，$x\in[-1,1]$ において

$$\inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)=\min\{-x^2+4x-3,-x^2-4x-3\}$$

である．さらに，この式の x を変動させたとき $x=0$ で最大値 -3 をとるが，それは min をとる $-x^2\pm4x-3$ が飛び移るところで x についての微分が 0 でない．つまり，

$$\max_{x\in[-1,1]}\inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)=-3$$

は $(x,y)=(0,\pm1)$ で *attain* されるが，$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\pm1)=\pm4$ で x 方向の微分が 0 ではない．つまり，f の臨界点ではない．

5　$N\geq 3$ の場合

$N\geq3$ の場合は，回転数による制限ができないが，Bahri & Rabinowitz [3] による minimax 法の応用が考えられる．

$$\Xi_T=H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z},\mathbb{R}^N\backslash\{0\})$$

とし，$C(\mathbb{S}^{N-2},\Xi_T)$ を考える．$\gamma\in C(\mathbb{S}^{N-2},\Xi_T)$ に対して，写像 $\tilde\gamma:\mathbb{S}^{N-2}\times\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^{N-1}$ を

$$\tilde\gamma(\xi,t)=\frac{1}{|\gamma(\xi)(t)|}\gamma(\xi)(t)\qquad(\xi\in\mathbb{S}^{N-2},t\in\mathbb{S}^1=\mathbb{R}/T\mathbb{Z}).$$

により定める．写像 $\tilde\gamma$ の Brouwer 写像度 $\deg\tilde\gamma$ を書く．また，

$$\Gamma_T^*=\{\gamma\in C(\mathbb{S}^{N-2},\Xi_T)\mid\deg\tilde\gamma\neq0\}$$

とおく．

$$\begin{aligned}&\sigma_T(\xi,t)=\left((2+\cos\frac{2\pi t}{T})\xi_1+2,(2+\cos\frac{2\pi t}{T})\xi_2,\dots,(2+\cos\frac{2\pi t}{T})\xi_{N-1},\sin\frac{2\pi t}{T}\right)\\&(\xi=(\xi_1,\dots,\xi_{N-1})\in\mathbb{S}^{N-2},t\in\mathbb{S}^1)\end{aligned}$$

とすると，これは Γ_T^* に属する．よって $\Gamma_T^*\neq\emptyset$ である．

Bahri & Rabinowitz [3] により $\alpha\geq2$ の場合，Tanaka [13] により $1<\alpha<2$ の場合に，

$$\inf_{\gamma\in\Gamma_T^*}\max_{\xi\in\mathbb{S}^{N-2}}\mathcal{A}_{T,0}(\gamma(\xi)).$$

を attain する臨界点が得られており，それにより T-周期解が得られている．$0<\alpha\leq1$ の場合は，generalized periodic solution の存在が示されており，周期の間における衝突は高々 1 回である．

$R>0$ を定数として，$R\sigma_T$ に対する値を評価することにより，$T>0$ が十分小さいときは，ある $c_1>0$ が存在して

$$\inf_{\gamma\in\Gamma_T^*}\max_{\xi\in\mathbb{S}^{N-2}}\mathcal{A}_{T,0}(\gamma(\xi))\leq c_1T^{-(\alpha-2)/(\alpha+2)}+hT\tag{12}$$

と評価できる (R はうまくとる必要がある).

では，下からの評価を考えよう．$q(t) \in H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
[q] &= \frac{1}{T}\int_0^T q(t)dt \\
r_\xi &= \max_t |q_\xi(t) - [q_\xi]|
\end{aligned}
$$

とおく．このとき，次が成り立つ．

補題 2.

$$|q_{\xi_0}(t_0)| \leq r_{\xi_0}$$

を満たす ξ_0, t_0 が存在する．

証明. そのような ξ_0, t_0 が存在しないとすると，全ての ξ, t で

$$|q_\xi(t) - [q_\xi]| < |q_\xi(t)|$$

が成り立つ．$\lambda \in [0,1]$ に対し，

$$Q_{\lambda,\xi}(t) = (1-\lambda)q_\xi(t) + \lambda[q_\xi]$$

とおく．このとき，

$$Q_{0,\xi} = q_\xi, Q_{1,\xi} = [q_\xi]$$

であり，

$$
\begin{aligned}
|Q_{\lambda,\xi}(t)| &= |q_\xi(t) - \lambda(q_\xi(t) - [q_\xi])| \\
&\geq |q_\xi(t)| - \lambda|q_\xi(t) - [q_\xi]| \\
&\geq |q_\xi(t)| - |q_\xi(t) - [q_\xi]| > 0
\end{aligned}
$$

であるから，0 を通ることなく，$q_\xi(t)$ から $[q_\xi]$ に連続変形できる．$[q_\xi]$ の写像度は 0 だが，写像度はホモトピー不変だから矛盾する． □

この補題の ξ_0 をとると，曲線 $q_{\xi_0}(t)$ の長さは $2r_{\xi_0}$ 以上で，原点からの距離は常に r_{ξ_0} 以下である．よって，

$$\mathcal{A}(q_{\xi_0}) \geq \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{q}|^2 + hdt \geq \frac{1}{2T}\left(\int_0^T |\dot{q}|dt\right)^2 + Th \geq \frac{2r_{\xi_0}^2}{T} + Th$$

と評価できる．(12) より，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ が存在して，$0 < T < \delta$ なら $0 < r_{\xi_0} < \varepsilon$ が成り立つ．

$\varepsilon > 0$ を小さくとると，$0 < |q| < \varepsilon$ に対して，$V(q) \leq -\frac{1}{2|q|^\alpha}$ が成り立つ．$0 < T < \delta$ とすると，

$$\mathcal{A}(q_{\xi_0}) \geq \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{q}|^2 + \frac{1}{2|q|} + hdt \geq \frac{1}{2T}\left(\int_0^T |\dot{q}|dt\right)^2 + \frac{1}{2r_{\xi_0}^\alpha} + Th \geq \frac{2r_{\xi_0}^2}{T} + \frac{T}{2r_{\xi_0}^\alpha} + Th$$

となる．補題 1 を用いると，

$$\mathcal{A}(q_{\xi_0}) \geq \frac{2}{T}\left(r_{\xi_0}^2 + \frac{T^2}{4r_{\xi_0}^\alpha}\right) + Th \geq \frac{2c_\alpha}{T}\left(\frac{T^2}{4}\right)^{2/(\alpha+2)} + Th = 2^{(\alpha-2)/(\alpha+2)}c_\alpha T^{-(\alpha-2)/(\alpha+2)} + Th$$

と評価できる．

(12) とあわせると，minimax 法が適用できる．$0 < T_0 \ll 1 \ll T_1$ をとり，$T = T_0, T_1$ に対し

$$\inf_{\gamma \in \Gamma_T^*} \max_{\xi \in \mathbb{S}^{N-2}} \mathcal{A}_{T,h}(\gamma(\xi))$$

を attain する $\gamma_0 \in \Gamma_{T_0}^*, \gamma_1 \in \Gamma_{T_1}^*$ をとる．

$$\Pi = \left\{ \zeta_s \in C\left([0,1], \bigcup_{T>0} \Gamma_T^* \right) \mid \zeta_0 = \gamma_0, \zeta_1 = \gamma_1 \right\}$$

とする．以上より，minimax 法により，$\alpha > 2, h > 0$ の場合は

$$\inf_{\zeta_s \in \Pi} \min_{s \in [0,1]} \max_{\xi \in \mathbb{S}^{N-2}} \mathcal{A}_{T,h}(\zeta_s(\xi))$$

が，$0 < \alpha < 2, h < 0$ の場合は

$$\inf_{\zeta_s \in \Pi} \max_{s \in [0,1]} \max_{\xi \in \mathbb{S}^{N-2}} \mathcal{A}_{T,h}(\zeta_s(\xi))$$

を attain する臨界点が存在すると期待されるが，ここでも Palais-Smale 条件の確認が問題として残る．$\alpha > 2$ の場合は，Palais-Smale 条件が成立し，衝突すれば作用積分は発散するので，周期解が得られる．つまり，次が示された．

定理 2. $N \geq 3$ とし，*(V1), (V2), (SF)* を仮定する．このとき，任意の $h > 0$ に対し，(1) と (2) を満たす周期解 $q(t)$ が存在する．

[1, 9] でも同様の結果が得られているが，V の微分に対する不等式条件などが課されているので，本結果の方が仮定が弱い．

$0 < \alpha < 2$ の場合は，Palais-Smale 条件はまだ示されていない．示されたとすると，generalized periodic solution が得られる．その generalized periodic solution の周期を T_0 とすると，$T = T_0$ を固定したもとで $\mathcal{A}_{T_0,0}$ の最小点になっていると期待されるが，それは $N = 2$ の場合と同じく自明ではない．Morse 指数と衝突回数の関係については，Tanaka [14] により詳しく調べられている．具体的には，衝突の回数を ν,

$$i(\alpha) = \max\left\{ k \in \mathbb{N} \mid k < \frac{2}{2-\alpha} \right\}$$

とすると，モース指数は $(N-2)i(\alpha)\nu$ 以上であることが示されている．今回得られた臨界点の ($T = T_0$ 固定のもとでの)Morse 指数は $N - 1$ 以下である．$N - 1$ は s の範囲 $[0,1]$ と ξ の範囲 $\mathbb{S}^{N-2}$ の次元を合わせた分である．[14] とは 1 ずれる．

$$i(\alpha) \begin{cases} = 1 & (\alpha \in (0,1]) \\ = 2 & (\alpha \in (1, \frac{4}{3})) \\ > 2 & (\alpha \in (\frac{4}{3}, \infty)) \end{cases}$$

に注意すると，以下が導けると期待される．

定理 3 ([15])**.** $N \geq 3$ とし，*(V1), (V2), (WF)* を仮定する．このとき，任意の $h < 0$ に対し，(1) と (2) を満たす *generalized periodic solution* $q(t)$ が存在する．特に，$N \geq 4$ で $\alpha \in (1, 2)$ の場合と，$N = 3$ で $\alpha \in (\frac{4}{3}, 2)$ の場合は古典解である．それ以外の場合，衝突回数は多くても *1* 回である．

[15] では，複数個の特異点がある場合も含めた定理が示されているので，定理 3 はその特別な場合である*3. [15] の証明では，汎関数 (3) が用いられている．$\mathcal{A}_{T,h}$ を用いた証明も可能であると期待される．そのために Palais-Smale 条件を示す必要があるが，まだ示されていない．

$N=2$ の場合に述べたように，T ごとに臨界点をとり，その後 T に関する極値を求めることも考えられる．$\alpha>2, h>0$ の場合は

$$\inf_{T>0}\inf_{\gamma\in\Gamma_T^*}\max_{\xi\in\mathbb{S}^{N-2}}\mathcal{A}_{T,h}(\gamma(\xi))$$

が，$0<\alpha<2, h<0$ の場合は

$$\sup_{T>0}\inf_{\gamma\in\Gamma_T^*}\max_{\xi\in\mathbb{S}^{N-2}}\mathcal{A}_{T,h}(\gamma(\xi)).$$

が有限値になることがわかる．これらを attain する周期解は古典解であることが示せるが，$N=2$ の場合と同様に，エネルギーが h であることを示す段階で，問題が残る．つまり，問題 2 と同様のものを解決する必要がある．

6　諸注意

■$\alpha=2$ の場合について　(SF) と (WF) の境目である

$$V(q)\sim-\frac{1}{|q|^2}$$

の場合については，変分構造が大きく変わる変わり目であり本論文での手法では何も得られていない．[16] では，この場合にどの程度ポテンシャルを一般化できるか調べられている．

■generalized periodic solution について　本論文で，(WF) の場合，generalized periodic solution の存在について述べた．generalized periodic solution の存在を直接示すには，特異点と $\{q\mid V(q)=h\}$ を境界条件とした元で (3) の最小点を求めることで，容易に求めることができる．Rabinowitz [10] はこれを collision-brake orbit と呼んでいる．今回得られた generalized periodic solution が衝突を持ってしまった場合に，collision-brake orbit なのか，collision-brake orbit と異なるもっと非自明な解なのかは，まだわかっておらず，今後の課題である．

謝辞

本研究は科研費 (18K03366) の助成を受けた．本研究について多くの有益なコメントを頂いた田中和永先生に感謝します．

参考文献

[1] A. Ambrosetti & V. Coti Zelati, Closed orbits of fixed energy for singular Hamiltonian systems, *Arch. Rational Mech. Anal.* **112** (1990), 339-362.

[2] A. Ambrosetti & V. Coti Zelati, *Periodic solutions of singular Lagrangian systems,* Birkhäuser Boston, 1993.

*3 [15] では，$\{x\in\mathbb{R}^N\mid V(x)=h\}$ 上で常に $\nabla V\neq 0$ であることが仮定されているが，その仮定が満たされない場合は定常解が存在するので自明に成り立つ．

[3] A. Bahri & P. H. Rabinowitz, A minimax method for a class of Hamiltonian systems with singular potentials, *J. Funct. Anal.*, **82** (1989), 412-428.

[4] V. Benci & F. Giannoni, Periodic solutions of prescribed energy for a class of Hamiltonian systems with singular potentials, *J. Differential Equations*, **82** (1989), 60-70.

[5] A. Chenciner & R. Montgomery, A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses, *Ann. Math.* **152**(2000) 881-901.

[6] I. M. Gelfand & S. V. Fomin, *Calculus of Variations,* Dover Publications, 2000.

[7] C. Greco, Remarks on periodic solutions, with prescribed energy, for singular Hamiltonian systems, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **28** (1987), 661-672.

[8] Hofer, H. & Zehnder, E., Periodic solutions on hypersurfaces and a result by C. Viterbo, *Invent. Math.*, **90** (1987), 1-9.

[9] L. Pisani, Periodic solutions with prescribed energy for singular conservative systems involving strong forces, *Nonlinear Anal.* **21** (1993), 167-179.

[10] P. H. Rabinowitz, A note on periodic solutions of prescribed energy for singular Hamiltonian systems. *J. Comput. Appl. Math.***52** (1994), 147-154.

[11] P. H. Rabinowitz, Heteroclinics for a Hamiltonian system of double pendulum type, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **9** (1997), 41-76.

[12] M. Shibayama, Periodic solutions for a prescribed-energy problem of singular Hamiltonian systems, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **37** (2017), 2705-2715.

[13] K. Tanaka, A prescribed energy problem for a singular Hamiltonian system with a weak force, *J. Funct. Anal.*, **113** (1993), 351-390.

[14] K. Tanaka, Noncollision solutions for a second order singular Hamiltonian system with weak force, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **10** (1993), 215-238.

[15] K. Tanaka, A prescribed-energy problem for a conservative singular Hamiltonian system, *Arch. Rational Mech. Anal.* **128** (1994), 127-164.

[16] K. Tanaka, Periodic solutions for singular Hamiltonian systems and closed geodesics on non-compact Riemannian manifolds, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **17** (2000), 1-33.

[17] 田中和永，変分問題入門—非線形楕円型方程式とハミルトン系，岩波書店，2008.

[18] C. Viterbo, A proof of Weinstein's conjecture in $\mathbb{R}^{2n}$, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **4** (1987), 337-356.