Compactness of Transfer Operators and Spectral Representation of Ruelle Zeta Functions for Super-continuous Functions

広島大学大学院・先進理工系科学研究科　中川 勝國*
Katsukuni Nakagawa
Graduate School of Advanced Science and Engineering,
Hiroshima University

概要

位相混合的な片側 Markov シフト上の super-continuous function に対して，付随する転送作用素がその上でコンパクトになる非自明な Banach 空間を構成する．構成された Banach 空間を用いて，転送作用素の固有値に対する跡公式および Ruelle ゼータ関数のスペクトル表現を，super-continuous function のあるクラスに対して確立する．この結果は，locally constant function に対する古典的な跡公式およびスペクトル表現の拡張になっている．

1　考える問題とその背景

本稿は，筆者による論文 [3] に基づく．N を 2 以上の整数とし，$\mathbf{A}$ を，成分が 0 または 1 である $N \times N$ 行列とする．

$$\Sigma_{\mathbf{A}}^{+} = \{\omega = (\omega_m)_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \in \{1,\dots,N\}^{\mathbb{N}\cup\{0\}} : \mathbf{A}(\omega_m\omega_{m+1}) = 1,\ \forall m \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$$

とおき，**シフト写像** $\sigma_{\mathbf{A}} : \Sigma_{\mathbf{A}}^{+} \to \Sigma_{\mathbf{A}}^{+}$ を

$$(\sigma_{\mathbf{A}}\omega)_m = \omega_{m+1}, \quad m \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

で定める．$\Sigma_{\mathbf{A}}^{+}$ には，直積位相空間 $\{1,\dots,N\}^{\mathbb{N}\cup\{0\}}$ からの相対位相を入れる．ただし，$\{1,\dots,N\}$ には離散位相が入るものとする．このとき，$\Sigma_{\mathbf{A}}^{+}$ はコンパクト位相空間であり，シフト写像は $\Sigma_{\mathbf{A}}^{+}$ からそれ自身への連続写像である．位相力学系 $(\Sigma_{\mathbf{A}}^{+}, \sigma_{\mathbf{A}})$ を**片側 Markov シフト**と呼び，$\mathbf{A}$ を，このシフトの**構造行列**と呼ぶ．非負正方行列 A が**原始的**であるとは，べき A^k の全ての成分が正となるような正整数 k が存在することを言う．本稿では，構造行列 $\mathbf{A}$ は常に原始的であると仮定する．このとき，片側 Markov シフト $(\Sigma_{\mathbf{A}}^{+}, \sigma_{\mathbf{A}})$ は位相混合的である．

　本稿で重要な役割を持つ 3 つの関数空間 F_θ, V, L_m を導入しよう．まず，関数 $\phi : \Sigma_{\mathbf{A}}^{+} \to \mathbb{C}$ と $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して

$$\mathrm{var}_m(\phi) = \sup_{\omega,\omega'} |\phi(\omega) - \phi(\omega')|$$

*ktnakagawa@hiroshima-u.ac.jp 本研究は，2019 年度広島大学萌芽的研究支援金（若手研究者支援）の援助を受けている．

と書く．ここで，上限は，$\omega_k = \omega'_k$ $(\forall k \in \{0,\ldots,m-1\})$ を満たす全ての $\omega, \omega' \in \Sigma_{\mathbf{A}}^+$ に対して取る．ϕ が連続であるためには，$\mathrm{var}_m(\phi) \to 0$ $(m \to \infty)$ となることが必要十分である．m を大きくするときの $\mathrm{var}_m(\phi)$ の減少のスピードを使って，関数空間 F_θ, V, L_m を導入する．まず，$\theta \in (0,1)$ に対して，関数空間 F_θ を

$$F_\theta = \{\phi : \Sigma_{\mathbf{A}}^+ \to \mathbb{C} : \sup_{m \geq 0} \mathrm{var}_m(\phi)/\theta^m < \infty\}$$

で定める．次に，関数空間 V を

$$V = \{\phi : \Sigma_{\mathbf{A}}^+ \to \mathbb{C} : \mathrm{var}_m(\phi)^{1/m} \to 0 \ \ (m \to \infty)\}$$

で定める．最後に，$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して，関数空間 L_m を

$$L_m = \{\phi : \Sigma_{\mathbf{A}}^+ \to \mathbb{C} : \mathrm{var}_k(\phi) = 0,\ \forall k \geq m\}$$

で定める．容易に次が示せる：$L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset V = \bigcap_{\theta \in (0,1)} F_\theta$．さらに，$\phi \notin L_m$ $(\forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ となる元 $\phi \in V$ の存在も容易に分かる．(より強い主張が成立する．補遺 (v) を見よ．) V に属する関数を，**super-continuous function** と呼び，$\bigcup_{m \geq 0} L_m$ に属する関数を **locally constant function** と呼ぶ．

F_θ は，ノルム $\|\phi\|_\theta = \|\phi\|_\infty + \sup_{m \geq 0} \mathrm{var}_m(\phi)/\theta^m$ により Banach 空間となる ($\|\phi\|_\infty = \max_{\omega \in \Sigma_{\mathbf{A}}^+} |\phi(\omega)|$)．$V$ にはノルムの族 $\{\|\cdot\|_\theta\}_{\theta \in (0,1)}$ から定まる位相を入れる．このとき，V は Fréchet 空間となる．

関数 $f, \phi : \Sigma_{\mathbf{A}}^+ \to \mathbb{C}$ に対して，$\mathscr{L}_f \phi : \Sigma_{\mathbf{A}}^+ \to \mathbb{C}$ を

$$(\mathscr{L}_f \phi)(\omega) = \sum_{\omega' \in \Sigma_{\mathbf{A}}^+;\, \sigma_{\mathbf{A}} \omega' = \omega} e^{f(\omega')} \phi(\omega').$$

で定める．作用素 $\phi \mapsto \mathscr{L}_f \phi$ を，f の**転送作用素**と呼ぶ．$f \in F_\theta$ ならば，$\mathscr{L}_f$ は F_θ 上の有界線型作用素となり，$f \in V$ ならば，$\mathscr{L}_f$ は V 上の連続線型作用素となる．次の定理は，$f \in F_\theta$ のときの，作用素 $\mathscr{L}_f : F_\theta \to F_\theta$ のスペクトルに関する基本的な結果である：

定理 A ([5, Theorem 1]). $\theta \in (0,1)$, $f \in F_\theta$ とする．スペクトル集合 $\sigma(\mathscr{L}_f : F_\theta \to F_\theta)$ は次の 2 つの部分から成る：

- 閉円板 $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \theta e^{P(\Re f)}\}$ の全ての点．
- 二重円板 $\{z \in \mathbb{C} : \theta e^{P(\Re f)} < |z| \leq e^{P(\Re f)}\}$ に含まれる，離散的かつ多重度有限の固有値．

ここで，$P(\Re f)$ は，f の実部 $\Re f$ の位相的圧力を表す．

$f \in V$ とする．$V = \bigcap_{\theta \in (0,1)} F_\theta$ だったから，定理 A より，$\mathscr{L}_f : V \to V$ の各非零固有値は多重度有限であり，また非零固有値全体は，$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ の離散集合であって，その集積点は，存在すれば 0 のみであることが分かる．よって，$\mathscr{L}_f : V \to V$ の非零固有値全体の構造は，Banach 空間上のコンパクト作用素のスペクトルの構造とよく似ている．実際に，f が locally constant ならば，この類似は Banach 空間上のコンパクト作用素のスペクトルの構造に由来するものであることが知られている ([5,

Section 3]). これを詳しく述べれば，次のようになる：f が locally constant であれば，ある Banach 空間 $\mathcal{B} \subset V$ が存在して，$\mathscr{L}_f(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ かつ $\mathscr{L}_f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ はコンパクトであり，$\sigma(\mathscr{L}_f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}) \setminus \{0\}$ は $\mathscr{L}_f : V \to V$ の非零固有値の全体と等しくなる．さらに，固有値の各々で，2 つの多重度は一致する．**本稿の第一の目的は，一般の super-continuous function f に対して，このような Banach 空間を構成することである．**

本稿の第二の目的は，転送作用素の固有値と Ruelle ゼータ関数の極との関係に関するものである．関数 $f : \Sigma_{\mathbf{A}}^{+} \to \mathbb{C}$ に対して，f の **Ruelle ゼータ関数** $\zeta_f(z)$ は，次の形式的べき級数の exponential として定義される：

$$\zeta_f(z) = \exp\left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{z^q}{q} \sum_{\omega \in \mathrm{Per}_q(\sigma_{\mathbf{A}})} e^{S_q f(\omega)}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

ここで，$q \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathrm{Per}_q(\sigma_{\mathbf{A}})$ は $\sigma_{\mathbf{A}}^q \omega = \omega$ を満たす $\omega \in \Sigma_{\mathbf{A}}^{+}$ の全体であり，また $S_q f(\omega) = \sum_{k=0}^{q-1} f(\sigma_{\mathbf{A}}^k \omega)$ である．ある $\theta \in (0,1)$ に対して $f \in F_\theta$ であれば，上の形式的べき級数の収束半径は $e^{-P(\Re f)}$ であることが知られている．ここに，再び，$P(\Re f)$ は f の実部 $\Re f$ の位相的圧力を表す．次の定理は，転送作用素の固有値と Ruelle ゼータ関数の極との関係に関する最も基本的な結果である：

定理 B ([2, Corollary 6])**.** $\theta \in (0,1)$, $f \in F_\theta$ とする．このとき，$\zeta_f(z)^{-1}$ は開円板 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \theta^{-1} e^{-P(\Re f)}\}$ の正則関数に解析接続される．この解析接続の零点全体は，二重円板 $\{z \in \mathbb{C} : \theta e^{P(\Re f)} < |z| \le e^{P(\Re f)}\}$ に含まれる $\mathscr{L}_f : F_\theta \to F_\theta$ の固有値の逆数全体と等しい．さらに，零点の位数は，対応する固有値の多重度と一致する．

$f \in V$ に対して，$\mathscr{L}_f : V \to V$ の可算個の非零固有値を

$$\lambda_1(f), \lambda_2(f), \ldots$$

と並べる．ただし，$|\lambda_1(f)| \ge |\lambda_2(f)| \ge \cdots$ となるようにし，さらに各固有値は多重度の分だけ数えるものとする．また，固有値が有限個しかなかった場合は，その個数より大きい n に対しては $\lambda_n(f) = 0$ と定める．

定理 B から，$f \in V$ のとき，$\zeta_f(z)^{-1}$ は整関数による解析接続を持ち，解析接続の零点は，$\mathscr{L}_f : V \to V$ の非零固有値の逆数全体と等しいことが分かる．さらに，零点の位数は，対応する固有値の多重度と一致する．他方，第一の目的と同じく，f が locally constant の場合に注目すると，次が成り立つことが知られている：

定理 C ([5, Section 3])**.** $f \in V$ が locally constant であれば，$\{n \in \mathbb{N} : \lambda_n(f) \neq 0\}$ は有限集合であって

$$\zeta_f(z)^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z\lambda_n(f)). \tag{1}$$

等式 (1) の意味は，整関数 (実は多項式)$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - z\lambda_n(f))$ が $\zeta_f(z)^{-1}$ の解析接続となっている，という意味である．従って，$\zeta_f(z)^{-1}$ の零点と転送作用素の非零固有値の逆数との，位数と多重度の一致を込めた対応は，locally constant function の場合は，より具体的な等式 (1) から導かれる．(1) を，本稿では，Ruelle ゼータ関数 $\zeta_f(z)$ の**スペクトル表現**と呼ぶことにする．**本稿の第二の目的は，スペクトル表現**

(1) を，locally constant function を含むより広い super-continuous function のクラスに拡張することである．（$f \in V$ というだけでは，$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(f)$ が絶対収束しないことがあるため，スペクトル表現の成立は期待できない．補遺 (iii) を見よ．）

2　結果

2.1　第一の目的に対する結果

数列 $\{\theta_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ は

$$\theta_1 \geq \theta_2 \geq \cdots \geq 0, \quad \lim_{m\to\infty} \theta_m = 0 \tag{2}$$

を満たすとし，

$$\mathcal{B}(\{\theta_m\}) = \{\phi \in V : C \geq 0 \text{ が存在して } \mathrm{var}_m(\phi) \leq C\theta_{m+1}^m \ (\forall m \in \mathbb{N}\cup\{0\})\}$$

とおく．また，$\phi \in \mathcal{B}(\{\theta_m\})$ に対して

$$\|\phi\|_{\mathcal{B}(\{\theta_m\})} = \|\phi\|_\infty + \inf\{C \geq 0 : \mathrm{var}_m(\phi) \leq C\theta_{m+1}^m,\ \forall m \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$$

と書く．$(\mathcal{B}(\{\theta_m\}), \|\cdot\|_{\mathcal{B}(\{\theta_m\})})$ が Banach 空間となることは容易に分かり，さらに次が成り立つ：

定理 2.1. 数列 $\{\theta_m\}$ は (2) を満たすとし，また，$f \in V$ は次を満たすとする：

$$\mathrm{var}_m(f)^{1/m} \leq \theta_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\{\theta_m\})$ と書く．このとき，次の 2 つが成り立つ：

(i) $\mathscr{L}_f(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ かつ $\mathscr{L}_f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ はコンパクト．

(ii) $\sigma(\mathscr{L}_f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}) \setminus \{0\}$ は $\mathscr{L}_f : V \to V$ の非零固有値の全体と等しい．さらに，固有値の各々で，2 つの重複度は一致する．

$f \in V, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\theta_m(f) = \sup_{k\geq m} \mathrm{var}_k(f)^{1/k}$$

と書けば，数列 $\theta_m = \theta_m(f)$ $(m \in \mathbb{N})$ は (2) と (3) を満たすことが容易に分かる．この $\{\theta_m\}$ に対する Banach 空間 $\mathcal{B}(\{\theta_m\})$ に定理 2.1 を適用することにより，本稿の第一の目的が達成される．

2.2　第二の目的に対する結果

$f \in V$ と $r \in (0,1)$ に対する次の条件を考える：

$$\mathrm{var}_m(f)^{1/m} = O(r^m) \quad \text{as} \quad m \to \infty. \tag{4}$$

つまり，$\limsup_{m\to\infty} \mathrm{var}_m(f)^{1/m}/r^m < \infty$ が成り立つという条件である．locally constant な f は，明らかに，任意の $r \in (0,1)$ に対して条件 (4) を満たす．さらに，例えば，$\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$ の場合には，任意の $r \in (0,1)$ に対して，(4) を満たす locally constant でない $f \in V$ を構成できる．ある $r \in (0,1)$ に対して (4) を満たすような super-continuous function f に対して，次が成り立つ：

定理 2.2. $f \in V$ と $r \in (0,1)$ は (4) を満たすとする．このとき，$r^{2p}e^{h_{\mathrm{top}}(\sigma_{\mathbf{A}})} < 1$ を満たす $p > 0$ に対して，次の 3 つが成り立つ：

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(f)|^p < \infty$.

(ii) $q \geq p$ なる $q \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(f)^q = \sum_{\omega \in \mathrm{Per}_q(\sigma_{\mathbf{A}})} e^{S_q f(\omega)}. \tag{5}$$

(iii) k_0 は，$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(f)|^{k+1} < \infty$ であり，かつ (5) が $q > k$ なる任意の $q \in \mathbb{N}$ に対して成り立つような $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ のうちで最小のものとする．$z \in \mathbb{C}$ に対して，$E(z, k_0) = (1-z)\exp(\sum_{k=1}^{k_0} z^k/k)$ とおく．このとき，無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} E(z\lambda_n(f), k_0)$ (いわゆる Weierstrass 積) は，$\mathbb{C}$ 上で広義一様収束して次が成り立つ：

$$\zeta_f(z)^{-1} = \exp\left(-\sum_{q=1}^{k_0} \frac{z^q}{q} \sum_{\omega \in \mathrm{Per}_q(\sigma_{\mathbf{A}})} e^{S_q f(\omega)}\right) \prod_{n=1}^{\infty} E(z\lambda_n(f), k_0). \tag{6}$$

等式 (5) を**跡公式**と呼ぶ．もし，$p \leq 1$ と取れるなら (つまり，$r^2 e^{h_{\mathrm{top}}(\sigma_{\mathbf{A}})} < 1$ が成り立つなら)，(iii) で $k_0 = 0$ となり，従って (6) は $\zeta_f(z)$ のスペクトル表現を与える．よって，定理 2.2 により，本稿の第二の目的が達成される．2.1 節で転送作用素 $\mathscr{L}_f$ がその上でコンパクトになる Banach 空間 $\mathcal{B}$ が構成されたが，定理 2.2 は，Banach 空間上のコンパクト作用素の成す作用素イデアルの理論 (例えば，[4] に詳しい) を，$\mathscr{L}_f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ に適用することで証明される．

3 Theorem 2.1 の証明の概略

$f \in V$ とする．また，簡単のため $\theta_1 < 1$ と仮定する．$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\{\theta_n\})$ と書き，また $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{B}(\{\theta_m\})}$ と書く．次の Lasota-Yorke 型不等式が鍵となる：

補題 3.1. $\phi \in V$ と $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathrm{var}_k(\mathscr{L}_f \phi) \leq N e^{\max \Re f} \{3\, \mathrm{var}_{k+1}(f) \|\phi\|_\infty + \mathrm{var}_{k+1}(\phi)\}.$$

コンパクト性の証明には，有限次元作用素による近似が必要だが，その近似の際に用いる locally constant な関数の空間への射影として次を導入する：$\mathrm{supp}\, \mu = \Sigma_{\mathbf{A}}^+$ を満たす $\Sigma_{\mathbf{A}}^+$ 上の確率測度 μ を任意に固定し，$m \in \mathbb{N}$ と連続関数 $\phi : \Sigma_{\mathbf{A}}^+ \to \mathbb{C}$ に対して，$E_m \phi \in L_m$ を次で定める：

$$(E_m \phi)(\omega) = \frac{1}{\mu([\omega|m])} \int_{[\omega|m]} \phi \, d\mu.$$

このとき，次が成り立つことが容易に示せる：

補題 3.2. $\phi \in \mathcal{B}$ とする．$m \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して次の 2 つが成り立つ：

(i) $\|\phi - E_m\phi\|_\infty \le \|\phi\|\theta_{m+1}^m$.

(ii)

$$\mathrm{var}_k(\phi - E_m\phi) \le \begin{cases} 2\|\phi\|\theta_{m+1}^m & (k < m), \\ \|\phi\|\theta_{k+1}^k & (k \ge m). \end{cases}$$

定理 2.1 を証明しよう．

[定理 2.1 (i) の証明 (1) – $\mathscr{L}_f(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ であること] $\phi \in \mathcal{B}$ とすると，$k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{var}_k(\mathscr{L}_f\phi) \le & Ne^{\max \Re f}\{3\,\mathrm{var}_{k+1}(f)\|\phi\|_\infty + \mathrm{var}_{k+1}(\phi)\} \\ \le & Ne^{\max \Re f}\{3\theta_{k+1}^{k+1}\|\phi\|_\infty + \|\phi\|\theta_{k+2}^{k+1}\} \\ \le & Ne^{\max \Re f}(3\|\phi\|_\infty + \|\phi\|)\theta_{k+1}^{k+1} \le Ne^{\max \Re f}(3\|\phi\|_\infty + \|\phi\|)\theta_{k+1}^{k} \end{aligned}$$

となって，$\mathscr{L}_f(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ が分かる． □

[定理 2.1 (i) の証明 (2) – $\mathscr{L}_f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ がコンパクトであること] $\phi \in \mathcal{B}$ とし，$m, k \in \mathbb{N}$ とすると

$$\begin{aligned} \mathrm{var}_k(\mathscr{L}_f(\phi - E_m\phi)) \le & Ne^{\max \Re f}\{3\,\mathrm{var}_{k+1}(f)\|\phi - E_m\phi\|_\infty + \mathrm{var}_{k+1}(\phi - E_m\phi)\} \\ \le & Ne^{\max \Re f}\{3\theta_{k+1}^{k+1}\|\phi\|\theta_{m+1}^m + \mathrm{var}_{k+1}(\phi - E_m\phi)\}. \end{aligned}$$

ここで，$k + 1 < m$ ならば

$$\mathrm{var}_{k+1}(\phi - E_m\phi) \le 2\|\phi\|\theta_{m+1}^m \le 2\|\phi\|\theta_{m+1}^{m-k}\theta_m^k \le 2\|\phi\|\theta_{m+1}^2\theta_{k+1}^k \tag{7}$$

であり，$k + 1 \ge m$ ならば

$$\mathrm{var}_{k+1}(\phi - E_m\phi) \le \|\phi\|\theta_{k+2}^{k+1} = \|\phi\|\theta_{k+2}\theta_{k+2}^k \le \|\phi\|\theta_{m+1}\theta_{k+1}^k \tag{8}$$

である．(7) と (8) より

$$\mathrm{var}_k(\mathscr{L}_f(\phi - E_m\phi)) \le 5Ne^{\max \Re f}\|\phi\|\theta_{m+1}\theta_{k+1}^k \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

だから，$C > 0$ が存在して

$$\|\mathscr{L}_f - \mathscr{L}_f E_m\|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} \le C\theta_{m+1} \quad (\forall m \in \mathbb{N}). \tag{9}$$

よって，$\|\mathscr{L}_f - \mathscr{L}_f E_m\|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} \to 0$ $(m \to \infty)$ であり，$\mathscr{L}_f E_m$ は有限次元作用素だから，$\mathscr{L}_f$ はコンパクトである．

[定理 2.1 (ii) の証明] f が locally constant でないとして示せば十分．このとき，$\mathrm{var}_m(f) > 0$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ より $\theta_m > 0$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ であり，よって $\bigcup_{m\ge0} L_m$ は $\mathcal{B}$ の稠密部分集合である．従って，[1, Lemma A.1] より結論を得る． □

4　Theorem 2.2 の証明の概略

$f \in V$ と $r \in (0,1)$ は (4) を満たすとする．簡単のため，$r^2 e^{h_{\mathrm{top}}(\sigma_{\mathbf{A}})} < 1$ の場合に限定して証明する．

はじめに，Banach 空間上のコンパクト作用素の成すイデアルの理論のうちで必要となる部分を復習しよう．E を Banach 空間とする．E 上の有界線型作用素全体の集合を $\mathfrak{L}(E)$ で表し，

$$\mathfrak{L}_1^{(a)}(E) = \left\{ T \in \mathfrak{L}(E) : \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T) < \infty \right\}$$

とおく．ここで，$n \in \mathbb{N}$ に対し，$a_n(T)$ は，T の第 n **approximation number** である．すなわち，

$$a_n(T) = \inf\{\|T - A\| : A \in \mathfrak{L}(E), \operatorname{rank} A < n\}$$

である．$\mathfrak{L}_1^{(a)}(E)$ の元が E 上のコンパクト作用素であることは明らかである．また，$\mathfrak{L}_1^{(a)}(E)$ が $\mathfrak{L}(E)$ のイデアルであること，すなわち，$\mathfrak{L}_1^{(a)}(E)$ は有界線型作用素に対する通常の和とスカラー倍に関して閉じており，かつ，任意の $A \in \mathfrak{L}(E)$ と $T \in \mathfrak{L}_1^{(a)}(E)$ に対して $AT, TA \in \mathfrak{L}_1^{(a)}(E)$ であることも容易に分かる．さらに，$T \in \mathfrak{L}_1^{(a)}(E)$ に対して，次の (I)，(II) が成り立つ (証明は [4, Theorems 3.6.3 and 4.2.26] を見よ)：

(I) T の非零固有値を $\lambda_1(T), \lambda_2(T), \ldots$ と並べる．ただし，$|\lambda_1(T)| \geq |\lambda_2(T)| \geq \cdots$ となるようにし，さらに各固有値は多重度の分だけ数えるものとする．また，固有値が有限個しかなかった場合は，その個数より大きい n に対しては $\lambda_n(T) = 0$ と定める．このとき，$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(T)| < \infty$.

(II) $|||\,T\,||| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T)$, $\tau(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T)$ とおく．このとき，$T_1, T_2, \ldots \in \mathfrak{L}_1^{(a)}(E)$ が $\lim_{m\to\infty} |||\,T_m - T\,||| = 0$ を満たせば，$\lim_{m\to\infty} \tau(T_m) = \tau(T)$.

定理 2.2 を証明しよう．$\mathrm{var}_m(f)^{1/m} \leq Dr^m$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ を満たす $D \geq 1$ を取り，$\theta_m = Dr^m$ とおく．以後，$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\{\theta_m\})$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{B}(\{\theta_m\})}$ と書き，$\mathscr{L}_f$ は $\mathcal{B}$ 上の作用素と考える．

[定理 2.2 (i) の証明] $\mathscr{L}_f \in \mathfrak{L}_1^{(a)}(\mathcal{B})$，すなわち，$\sum_n a_n(\mathscr{L}_f) < \infty$ を示せばよい．$k+1 \geq m$ とすれば，

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}_{k+1}(\phi - E_m\phi) \leq \|\phi\|\theta_{k+2}^{k+1} &= \|\phi\| \left(\frac{\theta_{k+2}}{\theta_{k+1}}\right)^{k+1} \theta_{k+1}\theta_{k+1}^{k} \\
&= \|\phi\| r^{k+1} \cdot Dr^{k+1} \cdot \theta_{k+1}^{k} \\
&\leq \|\phi\|(Dr^{k+1})^2 \theta_{k+1}^{k} \leq \|\phi\|(Dr^m)^2\theta_{k+1}^{k} = \|\phi\|\theta_m^2\theta_{k+1}^{k}
\end{aligned}$$

となるので，($\theta_m = Dr^m$ の形とは限らない) 一般の $\{\theta_m\}$ に対する $k+1 < m$ の時の評価 (7) と合わせて，次の評価を得る：

$$C > 0 \text{ が存在し，} \|\mathscr{L}_f - \mathscr{L}_f E_m\|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} \leq C\theta_m^2 \ (\forall m \in \mathbb{N}). \tag{10}$$

$a \in \mathbb{R}$ に対し，$\lfloor a \rfloor$ で a を超えない最大の整数を表す．(10) より，$R > e^{h_{\mathrm{top}}(\sigma_{\mathbf{A}})}$ とすれば，十分大きな $m \in \mathbb{N}$ に対して，$\operatorname{rank} \mathscr{L}_f E_m \le \operatorname{rank} E_m \le R^m < \lfloor R^m \rfloor + 1$ より，$a_{\lfloor R^m \rfloor + 1}(\mathscr{L}_f) \le \|\mathscr{L}_f - \mathscr{L}_f E_m\|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} \le C\theta_m^2$ となる．$r^2 e^{h_{\mathrm{top}}(\sigma_{\mathbf{A}})} < 1$ だから，$R > e^{h_{\mathrm{top}}(\sigma_{\mathbf{A}})}$ を $r^2 R < 1$ となるよう取ることにより，$\sum_n a_n(\mathscr{L}_f) < \infty$ を得る． □

[定理 2.2 (ii) の証明] $f_m = E_m f$ $(m \in \mathbb{N})$ とおく．$q \in \mathbb{N}$ と (9) の証明と同様にして，$\lim_{m\to\infty} \|\mathscr{L}_{f_m}^q - \mathscr{L}_f^q\|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} = 0$ が得られる．これと (i) の証明と同様の議論を組み合わせて，$\mathscr{L}_f^q, \mathscr{L}_{f_m}^q \in \mathfrak{L}_1^{(a)}(\mathcal{B})$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ かつ $|||\mathscr{L}_{f_m}^q - \mathscr{L}_f^q||| = \sum_n a_n(\mathscr{L}_{f_m}^q - \mathscr{L}_f^q) \to 0$ $(m \to \infty)$ が分かる．従って

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(f)^q = \tau(\mathscr{L}_f^q) &= \lim_{m\to\infty} \tau(\mathscr{L}_{f_m}^q) \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(f_m)^q \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{\omega \in \mathrm{Per}_q(\sigma_{\mathbf{A}})} e^{S_q f_m(\omega)} = \sum_{\omega \in \mathrm{Per}_q(\sigma_{\mathbf{A}})} e^{S_q f(\omega)}
\end{aligned}$$

を得る． □

[定理 2.2 (iii) の証明] $|z|$ が十分小さな $z \in \mathbb{C}$ に対して，(ii) より

$$\begin{aligned}
\zeta_f(z)^{-1} &= \exp\left(-\sum_{q=1}^{\infty} \frac{z^q}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(f)^q\right) \\
&= \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(z\lambda_n(f))^q}{q}\right) \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(z\lambda_n(f))^q}{q}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z\lambda_n(f))
\end{aligned}$$

である．和が順序交換できることは，$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(f)| < \infty$ により保証される． □

補遺

(i) Super-continuous function は，Quas と Siefken により，[6] で導入された．[6] において，彼らは super-continuous function を次のように定義した：$\mathrm{var}_m(\phi) \le A_m$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ かつ $\lim_{m\to\infty}(A_{m+1}/A_m) = 0$ を満たす単調減少な正数列 $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ が存在するとき，関数 $\phi : \Sigma_{\mathbf{A}}^+ \to \mathbb{C}$ は super-continuous function と呼ばれる．この定義が本稿のそれと同値であることは容易に分かる．[3, Remark 2.3] を見よ．

(ii) 任意の $f \in V$ に対して，$\mathscr{L}_f : V \to V$ はコンパクトではない．[3, Theorem A.2] を見よ．

(iii) $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ とする．このとき，$\sum_{n\ge1} |\lambda_n(f)| = \infty$ となる $f \in V$ が存在する．[3, Theorem A.3] を見よ．

(iv) 関数空間 V は核型空間である．[3, Theorem B.3] を見よ．

(v) V の元で，いかなる locally constant function とも cohomologous にならないもの全体を R と書く．すなわち，

$$R = \{\phi \in V : \text{任意の locally constant な } \varphi \text{ と連続な } \psi \text{ に対して} \\ \phi - \varphi \neq \psi \circ \sigma_{\mathbf{A}} - \psi\ \}$$

である．このとき，R は V の residual な部分集合であり，特に，R は V で稠密である．[3, Theorem B.4] を見よ．

References

[1] V. Baladi and M. Tsujii, Dynamical determinants and spectrum for hyperbolic diffeomorphisms, in *Geometric and Probabilistic Structures in Dynamics* (eds. K. Burns, D. Dolgopyat and Ya. Pesin), *Contemp. Math.*, **469** (Amer. Math. Soc.), (2008), 29–68.

[2] N. T. A. Haydn, Meromorphic extension of the zeta function for Axiom A flows, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **10** (1990), 347–360.

[3] K. Nakagawa, Compactness of transfer operators and spectral representation of Ruelle zeta functions for super-continuous functions, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **40** (2020), 6331–6350.

[4] A. Pietsch, *Eigenvalues and s-Numbers*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[5] M. Pollicott, Meromorphic extensions of generalised zeta functions, *Invent. Math.*, **85** (1986), 147–164.

[6] A. Quas and J. Siefken, Ergodic optimization of super-continuous functions on shift spaces, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **32** (2012), 2071–2082.