無限生成 Coxeter 群の局所放物型部分群

東京大学・大学院情報理工学系研究科　縫田　光司
Koji Nuida
Graduate School of Information Science and Technology, The University of Tokyo

1　はじめに

群 W が **Coxeter 群**（Coxeter group）であるとは、ある部分集合 $S \subseteq W$ について、W が以下の群表示

$$W = \langle S \mid (st)^{m_{s,t}} = 1 \text{ for } s,t \in S \text{ with } m_{s,t} < \infty \rangle$$

をもつことをいう。ここで $m(s,t)$ は対称な関数であり、どの $s \in S$ についても $m(s,s) = 1$、およびどの相異なる $s,t \in S$ についても $m(s,t) \in \{2,3,\dots\} \cup \{\infty\}$ を満たすものとする。こうした組 (W,S) のことを **Coxeter 系**（Coxeter system）と呼ぶ。また、このような部分集合 S のことを W の **Coxeter 生成系**（Coxeter generating set）と呼ぶこともある。上記の群表示の形から期待される（が、自明ではない）事実として、生成元 $s,t \in S$ についてその積 st の位数は $m(s,t)$ と一致する。特に S の元はどれも対合（involution、つまり位数 2 の元）である。（この性質など、本稿で断りなしに用いる Coxeter 群の基本的性質については [8] などを参照されたい。）以降では特に断りのない限り、(W,S) はある Coxeter 系を表すものとする。S の濃度 $|S|$ を Coxeter 系 (W,S) の（あるいは、やや用語の濫用ではあるが、Coxeter 群 W の）**階数**（rank）と呼ぶ。Coxeter 群の研究やその応用においては階数が有限の場合（これは群として有限生成であることと等価である）に議論を限定することが多いが、本稿で興味があるのは階数が有限とは限らない Coxeter 群の性質である。そこで、以降では特に断りのない限り、(W,S) の階数は有限とは限らないものとする。

注意．Coxeter 群 W の階数が有限であっても、その部分群として階数が無限の Coxeter 群が現れることは意外と多いことを強調しておく。後述するように、鏡映と呼ばれる種類の元たちで生成される W の部分群は Coxeter 群となることが知られているが、W が有限生成であったとしてもその部分群はしばしば有限生成とはならない。例えば [11] や [13, Section 6] を参照されたい。

Coxeter 群において、生成系 S の部分集合で生成される部分群は、それ自身も自然に Coxeter 群をなすなど多くの良い性質を備えている。本稿で主に取り扱うのは、そうした部分群やそれらと密接に関連するある種の部分群たちである。より詳しくは、S のある部分集合 I で生成される部分群 $\langle I \rangle \le W$ と W において共役な部分群のことを W の（あるいは、(W,S) の）**放物型部分群**（parabolic subgroup）と呼ぶ。部分群 $\langle I \rangle$ 自体の方を**標準的**（standard）放物型部分群と呼ぶこともある（$\langle I \rangle$ の方を単に「放物型部分群」と呼ぶ流儀もある）。Coxeter 群の群論的性質の研究においては、標準的放物型部分群のことを visible subgroup と称することもある（筆者の知る限りでは標準的な邦訳はまだ存在しない）。上でも少し述べたように、$(\langle I \rangle, I)$ はそれ自身 Coxeter 系をなす。また後述するように、**W の階数が有限であれば**、W の任意個の放物型部分群たちの交わりも常に放物型部分群となることが知られている。しかし一方で、W の階数が無限である場合には、W の任意個の放物型部分群たちの交わりが常に放物型部分群になるとは限らない（のであるが、この点を誤解した記述を含んでいる文献も残念ながら少なからず存在する）。こうした考察から、「群論的な観点では、放物型部分群の「正しい」定義が別に存在するのではないか？」との疑問を抱いたことが、本稿で紹介する研究の出発点であった。

2 準備

Coxeter 群の群表示を簡潔に記述する道具として、Coxeter グラフと呼ばれるグラフ（Weyl 群に対する Dynkin 図形の類似物）が用いられている。Coxeter 系 (W, S) の **Coxeter グラフ**（Coxeter graph）$\Gamma(W, S)$ とは、S を頂点集合とする単純無向グラフで、$m(s, t) \geq 3$ のとき頂点 s, t が重み $m(s, t)$ を持つ辺で結ばれ、$m(s, t) = 2$ の場合には辺で結ばれないものと定義される。グラフ $\Gamma(W, S)$ のある連結成分の頂点集合 I を S の**既約成分**（irreducible component）と呼び、対応する Coxeter 系 $(\langle I \rangle, I)$ を (W, S) の**既約成分**とも呼ぶ。ちょうど一つの既約成分からなる S（あるいは (W, S)）は**既約**（irreducible）であるという。$S = \bigsqcup_\lambda S_\lambda$ を既約成分による分割とすると、W は部分群 $\langle S_\lambda \rangle$ たちの直和（制限直積）となる。なお、(W, S) が既約であるとき、W が有限群の場合には W が抽象群として直既約であるとは限らないが、W が無限群の場合には直既約であることが知られている [12]。

Coxeter 群 W が有限群であるとき、W（あるいは、S や (W, S)）は**有限型**（finite type）であるという。古典的な結果として、既約な有限型の Coxeter 系は完全に特定されている（図 1）。

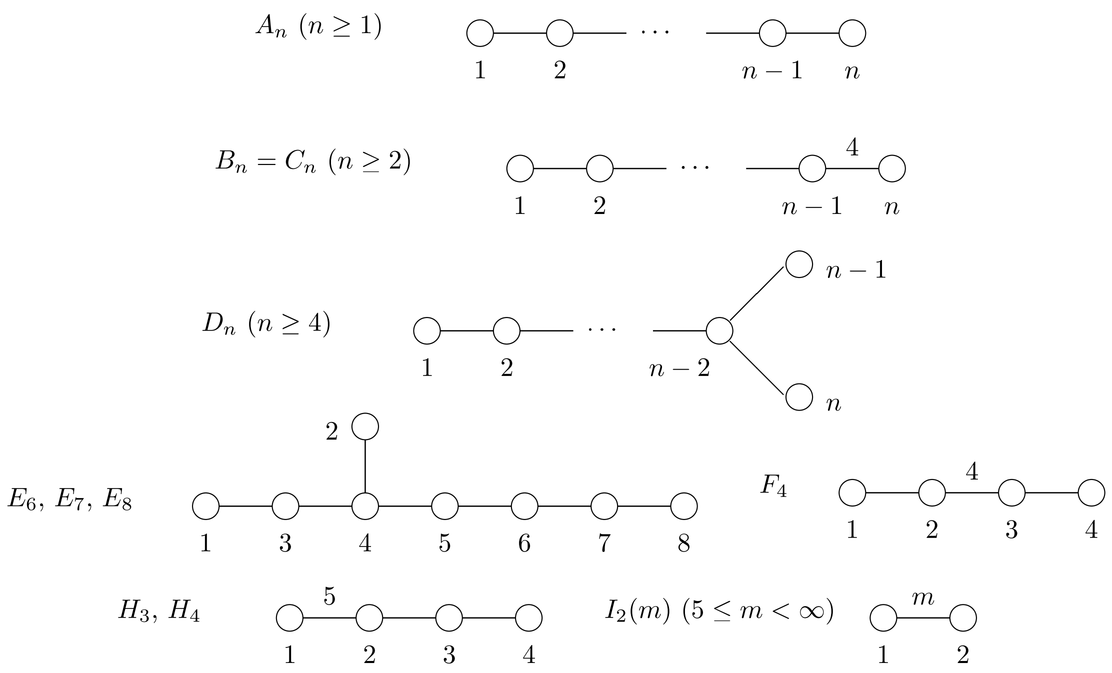

図 1: 有限型の既約 Coxeter 系（頂点に振られた番号は生成元 s_i の添字 i を表し、辺重み 3 の場合には記載を略している。また E_6 型と E_7 型についてはそれぞれ E_8 型の中で 6 番目までおよび 7 番目までの頂点に制限したグラフと対応し、H_3 型は H_4 型の中で 3 番目までの頂点に制限したグラフと対応する）

Coxeter 群には、以下のようなある種の空間における鏡映群としての表現が定められる。以降では実線型空間 V は、S の元で添字付けられた基底 $\Pi := \{\alpha_s \mid s \in S\}$ を有するとする。この Π の元は**単純ルート**（simple root）と呼ばれる。このとき、V 上の対称な双線型形式で、$s, t \in S$ について

$$\langle \alpha_s, \alpha_t \rangle = \begin{cases} -\cos(\pi/m(s,t)) & (m(s,t) < \infty) \\ -1 & (m(s,t) = \infty) \end{cases}$$

を満たすものがただ一つ存在する。これを用いて、$s \in S$ の $v \in V$ への作用を

$$s \cdot v := v - 2\langle \alpha_s, v \rangle \alpha_s$$

で定義すると、この作用は W 全体へと拡張でき、上記の双線型形式を保つ忠実な作用 $W \curvearrowright V$ が得られる。この作用による Π の軌道 $\Phi := W \cdot \Pi \subseteq V$ を**ルート系**（root system）といい、その元を**ルート**（root）と呼ぶ。（Weyl 群のルート系の場合とは異なり、ここでのルートはどれも長さ 1 のベクトルであることを注意しておく。）上記の定義（と、ルートが長さ 1 であること）より、S の元 s は α_s と直交する超平面に関する（幾何学的な意味での）鏡映として V へ作用する。同様に、S の元と共役な W の元はどれも V へ鏡映として作用することがわかる。そこで、S の元と共役な W の元を W の（あるいは (W,S) の）**鏡映**（reflection）と呼ぶ。(W,S) の鏡映全体の集合を S^W で表す。すなわち

$$S^W := \{wsw^{-1} \in W \mid s \in S, w \in W\}$$

である。

Coxeter 群の異なる Coxeter 生成系に対応する鏡映の集合については、以下の性質が知られている。

命題 1 ([2, Lemma 3.7])**.** *W を Coxeter 群、S_1 と S_2 を W の Coxeter 生成系とし、${S_1}^W \subseteq {S_2}^W$ であるとする。このとき ${S_1}^W = {S_2}^W$ が成り立つ。*

3 放物型部分群とその応用

以下は 1 章でも述べた定義であるが、重要であるため再掲する。

定義 1. W の部分群 G が**放物型部分群**（parabolic subgroup）であるとは、ある $I \subseteq S$ と $w \in W$ によって $G = w\langle I \rangle w^{-1}$ と表せることと定める。

前述のように $\langle I \rangle$ は I を Coxeter 生成系とする Coxeter 群であるため、それと共役な放物型部分群 G もまた Coxeter 群である。

有限個の放物型部分群の交わりについては以下の事実が知られている。

命題 2 ([5, Corollary 7])**.** *$I, J \subseteq S$, $w \in W$ のとき、放物型部分群 $\langle I \rangle$ と $w\langle J \rangle w^{-1}$ との交わり G は、ある $K \subseteq I$ と $u \in \langle I \rangle$ を用いて $G = u\langle K \rangle u^{-1}$ と表される。さらに G が $\langle I \rangle$ より真に小さい場合には K も I の真部分集合となる。*

この性質を再帰的に用いることで、有限個の放物型部分群の交わりが常に放物型部分群となることが示される。（ここでは W の階数に関する条件は課されていないことを注意しておく。）また、有限個とは限らない放物型部分群の交わりについては以下が成り立つ。

系 1. *$\mathcal{F}$ を W の放物型部分群からなる空でない族とする。*

1. *$\mathcal{F}$ のある要素 $G = w\langle I \rangle w^{-1}$ が有限生成である、つまり $|I| < \infty$ が成り立つとすると、交わり $\bigcap \mathcal{F}$ も W の放物型部分群である。*
2. *W の階数 $|S|$ が有限であれば、交わり $\bigcap \mathcal{F}$ も W の放物型部分群である。*

証明. 主張 1 については、命題 2 により、$\mathcal{F}$ の要素と G との交わり（これも放物型部分群である）が G の真部分群である場合にはその「階数」$|I|$（$< \infty$）が真に減少する。この性質を再帰的に用いれば、交わりをとることによる減少列が有限の長さで停止し、最終的に得られる $\bigcap \mathcal{F}$ も放物型部分群となることがわかる。

主張 2 は、$\mathcal{F}$ に W を追加しても交わりが変化しないことと、W 自体が有限生成な放物型部分群であることを踏まえて、主張 1 を適用すればよい。 □

上の性質により、W の部分集合 X がある有限生成な放物型部分群に包含される（例えば、X が有限集合である）とき、X を包含する W の放物型部分群すべての交わり $P(X)$ もまた放物型部分群になることがわ

かる（この定義において、W 自身も W の放物型部分群であり X を包含することを注意しておく）。この $P(X)$ を X の**放物閉包**（parabolic closure）と呼ぶ。

S の部分集合 I が有限型であり、$\langle I \rangle$ の最長元 r_I が $\langle I \rangle$ の中心 $Z(\langle I \rangle)$ に属するとき、I は **-1 型**（(-1)-type）であるという。このような I について以下が成り立つ。

命題 3 ([10, Lemma 4.12])**.** $I \subseteq S$ が -1 型であるとき、$P(r_I) = \langle I \rangle$ が成り立つ。

また、以下の事実は Tits による結果として知られている。

命題 4 (Tits)**.** W の有限部分群 G は、何らかの有限な放物型部分群に包含される。

この事実より、W の有限部分群 G の放物閉包 $P(G)$ もまた有限な放物型部分群であることがわかる。

4　内在的鏡映と同型問題：有限階数の場合

一般に、Coxeter 群 W の元が「鏡映である」という性質は、W の Coxeter 生成系 S の選び方に依存する。例えば、位数 12 の二面体群でもある $I_2(6)$ 型 Coxeter 群 W（$S = \{s, t\}$, $m(s,t) = 6$）において、別の生成系 $S' = \{(st)^3\} \cup \{s, ststs\}$ を選ぶと W は $A_1 \times A_2$ 型の Coxeter 群でもあることがわかるが、この場合 $(st)^3$ は (W, S') においては鏡映であるが (W, S) においては鏡映ではない。こうした現象を踏まえて、筆者らの論文 [9] において以下の定義を導入した（なお、用語の邦訳は筆者が勝手に与えたものである）。

定義 2 ([9, Section 1])**.** $w \in W$ を Coxeter 群 W における対合とする。この w が W の**内在的鏡映**（intrinsic reflection）であるとは、W のあらゆる Coxeter 生成系 S について $w \in S^W$ であることと定める。

Coxeter 群における**同型問題**（isomorphism problem）は、狭義には与えられた二つの Coxeter 群が互いに（抽象群として）同型であるかを判定する問題を指すが、広義には与えられた Coxeter 群についてその Coxeter 生成系がどれだけ多様な性質を備え得るかを調べる問題も「Coxeter 群の同型問題」と称されることが少なくない。例えば、Coxeter 群 W の二つの Coxeter 生成系 S_1 と S_2 について常に ${S_1}^W = {S_2}^W$ が成り立つとき、W は**鏡映独立**（reflection independent）[1] であると称される（この用語の邦訳も筆者が勝手に与えたものである）。鏡映独立な Coxeter 群を完全に決定することは Coxeter 群の同型問題の大きな部分問題の一つである。ここで、命題 1 を踏まえると、Coxeter 系 (W, S) について、W が鏡映独立であることは S の元がすべて W の内在的鏡映であることと等価であることがわかる。そして、後述するように、Coxeter 群の内在的鏡映についてはその特徴付けが筆者らの最近の研究によって（階数が有限の場合には [7, Theorem 1] で、一般の階数の場合には [10, Theorem 2.2] で）与えられている。このことから、Coxeter 群が鏡映独立であるかどうかを原理的には（Coxeter 生成系の元の共役類の各々について、上述の特徴付けを確認することで）判定可能な状態となったといえる。ただし、鏡映独立な Coxeter 群のクラスを直接的に特徴付ける「閉じた」条件が見出されたわけではないことを注意しておく。

この章の以降では、階数が有限の場合に的を絞って、内在的鏡映や同型問題についてより詳しく紹介する。その鍵となる性質の一つを述べる。

補題 1. W の階数が有限であるとき、W のどの有限部分群も、W の何らかの極大な有限部分群に包含され、さらに後者は W の放物型部分群である。

証明. 主張の後半部分は命題 4 より直ちに導かれる。主張の前半部分について、もし有限部分群 $G \leq W$ を包含する W の極大有限部分群が存在しないとすると、その事実と命題 4 を交互に繰り返し用いることで、有限放物型部分群からなる無限の真の上昇列 $G \subseteq H_1 \subsetneq H_2 \subsetneq H_3 \subsetneq \cdots$ が存在することがわかる。しかし、W の Coxeter 生成系 S は前提より有限集合であり、したがって S の部分集合で生成される W の部分群の濃度も有限個の種類しか存在せず、共役で濃度が変わらないことから W の放物型部分群の濃度も有限個の種類しか存在しない。これらは矛盾するので、主張の前半部分も成り立つ。 □

階数が有限の Coxeter 群に対する同型問題の研究に用いられている道具の一つを紹介する。

定義 3 ([6])**.** Coxeter 群 W の階数が有限であると仮定し、部分集合 $X \subseteq W$ が生成する W の部分群 $\langle X \rangle$ が有限群であるとする。このとき、W における X の **finite continuation** $\mathrm{FC}_W(X)$ を、X を包含する W の極大有限部分群すべての交わりと定義する。X が単元集合 $\{w\}$ のときには、$\mathrm{FC}_W(\{w\})$ のことを単に $\mathrm{FC}_W(w)$ とも書く。

W の階数が有限であるという仮定と補題 1 により、上の定義における「極大有限部分群」が少なくとも一つは存在することが保証される。また同じく補題 1 により、それらの「極大有限部分群」はどれも W の放物型部分群であり、したがって系 1 により、それらの交わりである $\mathrm{FC}_W(X)$ もまた W の放物型部分群である。ここで、$\mathrm{FC}_W(X)$ の定義および上記の性質を導くための議論に W の Coxeter 生成系の選び方がまったく関与していない（階数の有限性は Coxeter 生成系とは無関係に定まる）点が重要であり、同型問題の考察において異なる Coxeter 生成系たちの間を繋ぐ役割を $\mathrm{FC}_W(X)$ が果たしている。（W の階数が有限でない場合にも、空の部分集合族の交わりを W と定めるなどの工夫により $\mathrm{FC}_W(X)$ を同様に定義すること自体は可能であるが、そうして定義した $\mathrm{FC}_W(X)$ が階数有限の場合と同様の良い性質を有する保証はない。）

例えば、W の階数が有限であるとし、W の Coxeter 生成系 S の元 s が $\mathrm{FC}_W(s) = \langle s \rangle$ を満たすとする。このとき、W の別の Coxeter 生成系 $S^\dagger$ をとったとき、s は（$(W, S^\dagger)$ における鏡映であるかどうかはさておき）W の対合であるため、Richardson の定理 [15] により、ある -1 型の部分集合 $I^\dagger \subseteq S^\dagger$ について、s は $\langle I^\dagger \rangle$ の最長元 $r_{I^\dagger}$ と共役である。すると $\mathrm{FC}_W(s) = \langle s \rangle$ も $\mathrm{FC}_W(r_{I^\dagger})$ と共役になる。一方で、$\mathrm{FC}_W(r_{I^\dagger})$ は前述のように $(W, S^\dagger)$ における放物型部分群であり、したがって $r_{I^\dagger}$ の放物閉包を包含する。すると命題 3 より $I^\dagger \subseteq \mathrm{FC}_W(r_{I^\dagger})$ が成り立つ。ここで前述のように $\mathrm{FC}_W(r_{I^\dagger})$ が $\mathrm{FC}_W(s) = \langle s \rangle$ と共役であることから $|\mathrm{FC}_W(r_{I^\dagger})| = 2$ であり、したがって（選び方より $I^\dagger \neq \emptyset$ であるため）$I^\dagger$ は単元集合でなければならない。このことから $r_{I^\dagger}$ は $(W, S^\dagger)$ の鏡映となり、それと共役である s も $(W, S^\dagger)$ の鏡映であることがわかる。こうして s が内在的鏡映であることが示される。なお、[6] において、階数有限の場合に Coxeter 生成系 S の元 s に対する finite continuation の構造が完全に特定されており、それによると「大抵の場合」（厳密な定義ではなく、直感的な意味で）には上記の条件 $\mathrm{FC}_W(s) = \langle s \rangle$ が満たされることがわかる。例えば、S が既約で W が無限群で、かつ $m_{t,t'}$ の値がすべて有限である場合（この最後の条件を満たす Coxeter 系は **2-spherical** であると称される）には、S のすべての元 s について $\mathrm{FC}_W(s) = \langle s \rangle$ が成り立ち、したがって上記の議論より W は鏡映独立である。

Coxeter 群の同型問題に現れる重要なクラスで「鏡映独立」以外のものの一つとして、Coxeter 群 W の Coxeter 生成系たちがどれも互いに共役である場合に W は**強剛**（strongly rigid）であると称される（この用語の邦訳も筆者が勝手に与えたものである）。一般に W のある Coxeter 生成系と共役な部分集合もまた W の Coxeter 生成系となるため、強剛な Coxeter 群はある意味で「Coxeter 生成系の種類が最も少ない」Coxeter 群であるとも考えられる。また、定義より直ちに、強剛な Coxeter 群は鏡映独立でもあることがわかる。この強剛な Coxeter 群のクラスを特定することは Coxeter 群の同型問題の分野における大きな問題の一つとされてきたが、筆者らの最近の研究 [7] において、階数有限の場合に強剛な Coxeter 群について Coxeter グラフの言葉による完全な特徴付けを与えた。（具体的な内容は複雑すぎるため割愛する。詳しくは [7, Theorem 3] を参照されたい。）この結果を得るための、それ自体も重要な中間的成果として、階数有限の場合における内在的鏡映の特徴付けも同じ論文 [7, Theorem 1] で与えている。例えば、前述のように S が（有限集合かつ）既約で、W が無限群でかつ 2-spherical である場合に W は鏡映独立であるが、この前提のもとではさらに W は強剛でもあることが示される（これ自体は既知の事実であったが、比較的説明しやすい部分クラスであるためここで紹介した）。これらの結果においても、上記の議論と同様に、[6] で特定されている finite continuation の構造が重要な役割を果たしている。

5　階数が無限になると起きること

前章で述べた、階数有限の Coxeter 群の同型問題におけるいろいろな「良い」性質は、階数が有限でない場合には必ずしも維持されない。典型的な例として、図 2 に記す可算無限個の頂点からなる二つの Coxeter グラフから定まる Coxeter 群 $W(A_\infty)$ および $W(A_{\pm\infty})$ を考える。A_n 型 Coxeter 群（$n < \infty$）が対称群 S_{n+1} と同型であるのと同様の原理により、$W(A_\infty)$ は $\mathbb{Z}_{\geq 1}$（正整数全体の集合）上の有限な台を持つ置換全体のなす群 $\mathrm{Sym}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z}_{\geq 1})$ と同型であり、同様に $W(A_{\pm\infty})$ は $\mathbb{Z}$ 上の有限な台を持つ置換全体のなす群 $\mathrm{Sym}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z})$ と同型である。（いずれも、i 番目の生成元 s_i が隣接互換 $(i\ \ i+1)$ を表す、という対応関係である。）ここで、それらの置換の定義域である $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ と $\mathbb{Z}$ は互いに等しい濃度を持つため、全単射 $\sigma\colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}$ をとることができる。この σ を用いると、$\mathrm{Sym}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z}_1)$ から $\mathrm{Sym}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z})$ への群同型写像が $\tau \mapsto \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ で与えられるので、$W(A_\infty)$ と $W(A_{\pm\infty})$ も抽象群として互いに同型であることがわかる。これらの Coxeter 群は無限群で既約、かつ 2-spherical であるため、前章で紹介した強剛な Coxeter 群の充分条件のうち「階数が有限」以外はすべて満たしている。しかしながら、この Coxeter 群にはこのような二つの異なる型（同型でない Coxeter グラフ）を持つ Coxeter 生成系が存在し、特にそれらは互いに共役ではあり得ないため、この Coxeter 群は強剛ではない。こうして、前述の強剛な Coxeter 群の充分条件は階数を無限に拡張すると正しくなくなることがわかる。

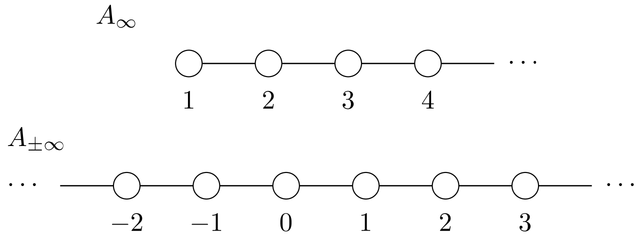

図 2: 可算無限の階数を持つ Coxeter 系の例

また、階数有限の Coxeter 系においては、系 1 の主張 2 で述べたように放物型部分群というクラスは任意個の交わりに関して閉じている。一方で、これから紹介するように、階数が有限でない場合には放物型部分群のクラスが交わりについて閉じないことがある。この事実は筆者が [14, Example 1]（以下の例と同じもの）において初めて指摘した。

例 1. W を A_∞ 型の Coxeter 群、$S := \{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ をその Coxeter 生成系とする（生成元の番号付けは図 2 のとおりである）。s_i に対応する単純ルート α_{s_i} のことを、簡略化して α_i で表す。このとき $i \geq 1$ について $\beta_i := \alpha_{2i-1} + \alpha_{2i}$ は (W, S) のルートであり、それに対応する鏡映 s_{β_i} たちからなる集合 $T := \{s_{\beta_i}\}_{i=1}^{\infty}$ について、$G := \langle T \rangle$ は Coxeter 群であり T はその（A_∞ 型の）Coxeter 生成系である。このことは、ルート β_i たちのなす角（双線型形式の値）が A_∞ 型 Coxeter 系における単純ルートたちのなす角に等しいことに基づいて示せる（詳細は割愛する）し、また W の置換群としての表示において s_{β_i} が互換 $(2i-1\ \ 2i+1)$ に対応することを用いても示せる。

さて、各整数 $k \geq 1$ について、$w \in \langle \{s_j\}_{j=1}^{2k-1} \rangle$ をうまく選ぶと、$i \leq k$ のとき $w s_{\beta_i} w^{-1} = s_{k+i}$、また $j \geq 2k+1$ のとき $w s_j w^{-1} = s_j$、となる。詳細は割愛するが、w の構成の概略を図 3 に示している。このことから、集合 $T_k := \{s_{\beta_i}\}_{i=1}^{k} \cup \{s_j\}_{j=2k+1}^{\infty}$ は w による共役作用で S の部分集合に移るため、$G_k := \langle T_k \rangle$ は (W, S) の放物型部分群である。さらに (G_k, T_k) は Coxeter 系でもある。また定義より G_k は G を包含する。

ここで $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = G$ であることを示すために、$\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ の元 u をとる。u は有限個の生成元の積で表されるため、ある $k \geq 1$ について $u \in \langle \{s_i\}_{i=1}^{2k} \rangle$ となる。この k について $u \in G_k$ でもあることから、u は s_i（$i \leq 2k$）たちの積でも T_k の元たちの積でも表せることになる。すると T_k の構成より、u は s_{β_i}（$i \geq k$）

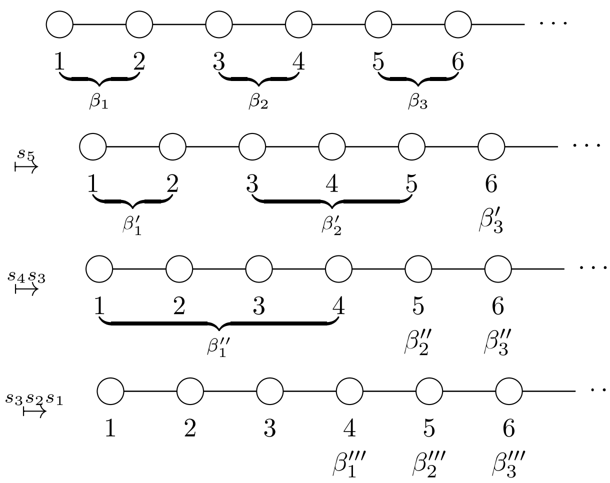

図 3: 例 1 における共役をとる元 w の構成の例（$k = 3$ の場合：図に示している点や区間は、対応するルートにおける係数が 1 となっている単純ルートの位置を示しており、また記号 $\mapsto$ はその上に書かれた元による作用を表している）

たちの積で表されることがわかる（厳密な証明は割愛する）。これは $u \in G$ であることを意味するので、確かに $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = G$ である。

一方で、G 自体は (W, S) の放物型部分群ではないことがわかる。これを確かめるために、S の部分集合 J と W の元 w について $G = w\langle J\rangle w^{-1}$ であると仮定する。w が有限個の生成元の積で表されることから、ある整数 $k \geq 1$ について $w \in \langle \{s_i\}_{i=1}^{2k-1} \rangle$ が成り立つ。すると s_{β_j}（$j \geq k+1$）はどれも w と可換であり、したがって w による共役で不変である。これらの性質より、$w^{-1}Gw = \langle J\rangle$ の Coxeter 生成系 $w^{-1}Tw$ の元たちを S の元たちの（長さ最短の）積で表した際に、$s_{\beta_{k+1}} \in w^{-1}Tw$ には s_{2k+1} と s_{2k+2} が現れるが、それ以外の元については s_{2k+1} も s_{2k+2} も現れない。このことから、$J \subseteq S$ は s_{2k+1} と s_{2k+2} を含んでいる必要があるが、一方で s_{2k+1} も s_{2k+2} も $w^{-1}Tw$ の元たちの積では表せないことがわかる（厳密な証明は割愛する）。これは $w^{-1}Gw = \langle J\rangle$ と矛盾する。こうして G は放物型部分群ではないことが示されるが、G_k たちの各々は前述のように放物型部分群であるため、これが所望の反例を与えている。

上記の事実に加えて、補題 1 も階数の有限性の前提を外すと必ずしも成り立たないことを注意しておく。実際、A_∞ 型や $A_{\pm\infty}$ 型の Coxeter 群においては、そもそも極大な有限部分群自体が一つも存在しないため、補題 1 の結論は成り立ちようがない。

6　局所放物型部分群：定義とその応用

前章では Coxeter 群の階数の有限性を外した場合に「変な」現象が生じることを紹介した。ここで、例 1 で与えた部分群 G の性質を再考すると、その生成系 T は全体としては S の部分集合と共役ではないものの、「局所的」には S の部分集合と共役になっている。また、前章の最後で言及した A_∞ 型や $A_{\pm\infty}$ 型の Coxeter 群は、全体としては有限群ではないものの、**局所有限**（locally finite）な群ではあることがわかる（群 H が局所有限とは、その有限部分集合が常に有限群を生成することと定義される）。こうした考察から、放物型部分群や有限部分群といった対象の「局所版」をうまく導入することで、有限階数における良い性質を一般の階数の場合にも引き継がせることができるようになるのではないか、との直感が得られる。

そのために Coxeter 群の前提知識をいくつか準備する。Coxeter 群 W の部分群 G が**鏡映部分群**（reflection subgroup）であるとは、$G = \langle G \cap S^W \rangle$、すなわち G の生成系として鏡映からなるものがとれることと定める。鏡映部分群に対する重要な結果 [3, 4] として、鏡映部分群は常に Coxeter 群をなすことが知られてい

る。より詳しくは、鏡映部分群 $G \leq W$ について、(W,S) のルート系 Φ の部分集合 $\Phi(G)$ を

$$\Phi(G) := \{\gamma = w \cdot \alpha_s \in \Phi \mid s_\gamma := wsw^{-1} \in G\}$$

で定め、$\Phi(G)$ に属する正ルートのうち、$\Phi(G)$ に属する他の正ルートたちの正係数（有限）線型結合で表せないもの全体からなる部分集合を $\Pi(G)$ で表す。そして G の部分集合 $S(G)$ を

$$S(G) := \{s_\gamma \mid \gamma \in \Pi(G)\}$$

で定義すると、$(G, S(G))$ は Coxeter 系となり、また $\Phi(G)$ および $\Pi(G)$ は Coxeter 系 $(G, S(G))$ のルート系および単純ルートの集合とある意味で似た性質を持つことが知られている。これらの対象を基に、筆者の論文 [14] において以下の定義を導入した（この用語の邦訳も筆者が勝手に与えたものである）。

定義 4 ([14, Definition 1])**.** Coxeter 群 W の部分群 G が**局所放物型部分群**（locally parabolic subgroup）であるとは、G が鏡映部分群であり、その Coxeter 生成系 $S(G)$ の有限部分集合が W において常に S の部分集合と共役であることと定義する。

定義より、放物型部分群は局所放物型部分群でもある。W の階数が有限の場合にはこの逆も成り立つ [14, Lemma 10] が、一般の階数においては例 1 の部分群 G がその反例、すなわち放物型部分群ではない局所放物型部分群となっている。このことから、局所放物型部分群は放物型部分群の概念を自然に、かつ非自明に拡張したものであると考えられる。

有限階数の Coxeter 群における放物型部分群と同様に、局所放物型部分群は一般の階数の場合においても以下のような良い性質を備えている。

定理 1 ([14, Theorem 1])**.** *Coxeter* 群 W の局所放物型部分群からなる空でない（有限とは限らない）族 $\mathcal{F}$ について、その交わり $\bigcap \mathcal{F}$ も局所放物型部分群である。

証明（概要）. まず、$\bigcap \mathcal{F}$ が鏡映部分群であることを示すために、$w \in \bigcap \mathcal{F}$ と $G \in \mathcal{F}$ をとる。w が G において有限個の生成元の積で表されることと G が局所放物型部分群であることから、w を元に持つ W の放物型部分群で G に包含されるものが存在する。すると w の放物閉包 $P(w)$ も G に包含される。このことから $w \in P(w) \leq \bigcap \mathcal{F}$ であり、w は $P(w) \subseteq \bigcap \mathcal{F}$ の有限個の生成元（それらは鏡映である）の積で表されるため、$\bigcap \mathcal{F}$ が鏡映部分群であることがわかる。

一方、$S(\bigcap \mathcal{F})$ の有限部分集合 X をとると、上と同様の議論により $P(X) \leq \bigcap \mathcal{F}$ となる。このことから $X \subseteq S(\bigcap \mathcal{F}) \cap P(X) \subseteq S(P(X))$ を示すことができ、また $S(P(X))$ は S のある部分集合と共役であることを示すことができる。よって X も S のある部分集合と共役であり、$\bigcap \mathcal{F}$ は局所放物型部分群である。 □

定理 2 ([14, Theorem 3])**.** *Coxeter* 群 W のどの局所有限部分群も、W の何らかの極大な局所有限部分群に包含され、さらに後者は W の局所放物型部分群である。

証明（概要）. 主張の前半部分は、そうした極大な局所有限部分群を（超限再帰を駆使して）実際に構成することで示される。主張の後半部分については、まず、W の局所有限部分群の「局所放物閉包」（それを包含する局所放物型部分群すべての交わり）もまた局所有限であることを（超限再帰を用いて）示すことができる [14, Theorem 2]。これと主張の前半部分を合わせることで証明が完了する。 □

4 章で述べたように、階数有限の Coxeter 群の同型問題については有限部分群の（より正確には、有限部分群を生成するような部分集合の）finite continuation という対象が強力な道具として用いられており、それは Coxeter 群の極大有限部分群や放物型部分群の性質と密接に結び付いている。そこで、この「極大有限部分群」や「放物型部分群」を「極大局所有限部分群」や「局所放物型部分群」に取り換えることで、一般の階数の場合にも有効な道具が得られるのではないかと期待できる。こうして以下の定義に到達する。

定義 5 ([10])**.** Coxeter 群 W の部分集合 $X \subseteq W$ が局所有限であるとする。このとき、W における X の **locally finite continuation** $\mathrm{LFC}_W(X)$ を、X を包含する W の極大局所有限部分群すべての交わりと定義する。X が単元集合 $\{w\}$ のときには、$\mathrm{LFC}_W(\{w\})$ のことを単に $\mathrm{LFC}_W(w)$ とも書く。

finite continuation の場合と同様に $\mathrm{LFC}_W(X)$ は W の Coxeter 生成系の選び方と無関係に定まり、また定理 1 と定理 2 により $\mathrm{LFC}_W(X)$ は局所有限かつ局所放物型となる。なお、部分群 $\langle X \rangle$ 自体が有限群である場合には X の locally finite continuation は finite continuation と一致する [10, Proposition 3.6]。

上記の locally finite continuation の定義は、局所有限な部分集合が極大局所有限部分群に包含されるという「大域的な」性質に基づいている。また、Coxeter 群についてその「大域的な」性質を保証する定理 2 について、少なくとも現在の証明では選択公理が用いられており非構成的な色合いが濃い（超限再帰を用いた「構成」をしているので構成的なのではないかと思われるかもしれないが、超限再帰の各段階では選択公理を特に必要としないものの、すべての段階を統合する際に選択公理の力を借りている）。一方で、locally finite continuation については以下のような「局所的な」性質に基づく定義も可能であり、こちらの locally finite continuation の定義は Coxeter 群以外の一般の群に対しても拡張しやすいものと期待される（これら二つの定義の同値性の証明において上記の定理 2 が用いられており、その意味でこの同値性の証明も暗に選択公理と関連していることを注意しておく）。

補題 2 ([10, Proposition 3.4])**.** $X \subseteq W$ が局所有限であるとき、

$$\mathrm{LFC}_W(X) = \left\{ w \in W \;\middle|\; \begin{array}{c} X \subseteq Z \subseteq W \text{ かつ } Z \text{ が局所有限であれば} \\ Z \cup \{w\} \text{ も常に局所有限である} \end{array} \right\}$$

が成り立つ。

証明. 包含関係 $\subseteq$ について：$w \in \mathrm{LFC}_W(X)$ および $X \subseteq Z \subseteq W$ として、Z が局所有限であるときに、$Z \cup \{w\}$ も局所有限であることを示せばよい。定理 2 により Z を包含する W の極大局所有限部分群 H をとると、H は X も包含するので、$\mathrm{LFC}_W(X)$ の定義より $w \in \mathrm{LFC}_W(X) \subseteq H$ となる。すると $Z \cup \{w\} \subseteq H$ となり H は局所有限であるため、$Z \cup \{w\}$ も確かに局所有限である。

包含関係 $\supseteq$ について：w が右辺の集合に属するとして、W の極大局所有限部分群であり X を包含するような H について常に $w \in H$ となることを示せばよい。$Z := H$ について右辺の集合の条件を適用すると、$H \cup \{w\}$ も局所有限となり、したがって $\langle H \cup \{w\} \rangle$ もまた局所有限である。すると H の極大性より $\langle H \cup \{w\} \rangle = H$ となり、確かに $w \in H$ が成り立つ。 $\square$

こうして導入された locally finite continuation を finite continuation の代わりに用いることで（もちろん、そのために追加の議論が必要であるが）、4 章で紹介した論文 [7] の結果が、以下のように一般の階数の場合へと（部分的に）拡張される。詳細については [10] を参照されたい。

定理 3 (概要：[10])**.** W を（階数が有限とは限らない）*Coxeter* 群とする。

1. W の内在的鏡映の完全な特徴付けが与えられている。
2. W が無限群であり、*Coxeter* 系 (W, S) が既約かつ 2-*spherical* であるとすると、
   - W は鏡映独立である。
   - W の *Coxeter* 生成系 S_1 と S_2 が A_∞ 型でも $A_{\pm\infty}$ 型でもない場合には、それらは互いに「局所的に共役」である、つまり、全単射 $\alpha\colon S_1 \to S_2$ であって、S_1 の有限部分集合 K が常にその像 $\alpha(K) \subseteq S_2$ と共役であるようなものが存在する。したがって、そのような S_1 と S_2 は常に同じ型（対応する *Coxeter* グラフが重み付きグラフとして互いに同型）である。
   - さらにある条件（詳細は割愛）が成り立っているとき、W は強剛である。

謝辞　本研究集会の世話人である土岡俊介氏に対して、発表および本稿の執筆の機会をいただいたことへの感謝の意を表するとともに、新型コロナウィルス感染拡大に伴うオンライン開催という従来にない困難な舵取りを完遂されたことへの深い敬意を表する。なお、本研究は科学研究費補助金（科研費）基盤研究（B）（課題番号 19H01804）の援助を受けている。

参考文献

[1] P. Bahls, “A New Class of Rigid Coxeter Groups”, International Journal of Algebra and Computation, vol.13, no.1 (2003) 87–94

[2] N. Brady, J. P. McCammond, B. Mühlherr, W. D. Neumann, “Rigidity of Coxeter Groups and Artin Groups”, Geometriae Dedicata, vol.94 (2002) 91–109

[3] V. V. Deodhar, “A Note on Subgroups Generated by Reflections in Coxeter Groups”, Archiv der Mathematik, vol.53, no.6 (1989) 543–546

[4] M. Dyer, “Reflection Subgroups of Coxeter Systems”, Journal of Algebra, vol.135, no.1 (1990) 57-–73

[5] W. N. Franzsen, R. B. Howlett, “Automorphisms of Coxeter Groups of Rank Three”, Proceedings of the American Mathematical Society, vol.129 (2001) 2607–2616

[6] W. N. Franzsen, R. B. Howlett, B. Mühlherr, “Reflections in Abstract Coxeter groups”, Commentarii Mathematici Helvetici, vol.81 (2006) 665–697

[7] R. B. Howlett, B. Mühlherr, K. Nuida, “Intrinsic Reflections and Strongly Rigid Coxeter Groups”, Proceedings of the London Mathematical Society, vol.116, no.3 (2018) 534–574

[8] J. E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press, 1990

[9] B. Mühlherr, K. Nuida, “Intrinsic Reflections in Coxeter Systems”, Journal of Combinatorial Theory, Series A, vol.144 (2016) 326–360

[10] B. Mühlherr, K. Nuida, “Locally Finite Continuations and Coxeter Groups of Infinite Ranks”, Journal of Pure and Applied Algebra, vol.225, no.1 (2021) article no.106464

[11] K. Nuida, “A Characterization of Finitely Generated Reflection Subgroups of Coxeter Groups Orthogonal to a Reflection”, arXiv:math.GR/0603667, 2006

[12] K. Nuida, “On the Direct Indecomposability of Infinite Irreducible Coxeter Groups and the Isomorphism Problem of Coxeter Groups”, Communications in Algebra, vol.34, no.7 (2006) 2559–2595

[13] K. Nuida, “On Centralizers of Parabolic Subgroups in Coxeter Groups”, Journal of Group Theory, vol.14, no.6 (2011) 891–930

[14] K. Nuida, “Locally Parabolic Subgroups in Coxeter Groups of Arbitrary Ranks”, Journal of Algebra, vol.350, no.1 (2012) 207–217

[15] R. W. Richardson, “Conjugacy Classes of Involutions in Coxeter Groups”, Bulletin of the Australian Mathematical Society, vol.26 (1982) 1–15