CLASSICAL WEIGHT MODULES OVER $\imath$QUANTUM GROUPS AT $q = \infty$

京都大学数理解析研究所　渡邉英也
HIDEYA WATANABE
RESEARCH INSTITUTE FOR MATHEMATICAL SCIENCES, KYOTO UNIVERSITY

1. 概要

本稿は、RIMS 共同研究「組合せ論的表現論の最近の進展」における筆者による講演を加筆修正したものである。

複素半単純 Lie 代数の有限次元既約表現は完全に分類されているが、各既約表現の構造についてはまだまだ研究の余地がある。表現の構造を解析するには様々なアプローチがあるが、ここでは組合せ論的な方法について論じる。特に、量子群の表現論によるアプローチを考える。

量子群とは、Lie 代数を変数 q で変形したものである。すなわち、適当な意味で $q \to 1$ なる極限 (古典極限) をとると、量子群は元の Lie 代数 (の普遍包絡代数) に一致する。量子群の有限次元表現論は、元の Lie 代数のそれとパラレルに展開することができる。特に、タイプ $\mathbf{1}$ と呼ばれるクラスの有限次元既約表現は、Lie 代数の有限次元既約表現と同じように分類される (以下、量子群の有限次元既約表現はタイプ $\mathbf{1}$ であるとする)。さらに、それらは 古典極限をとると、Lie 代数の有限次元既約表現に一致する。従って、Lie 代数の有限次元既約表現の構造を知りたければ、量子群の有限次元既約表現の構造を調べればよいということになる。

量子群の有限次元既約表現は、古典極限の他に、$q \to \infty$ なる極限 (結晶極限) もとることができる (文献によっては我々の q が q^{-1} に対応しており、$q \to 0$ を結晶極限と呼ぶ)。このような極限には、柏原作用素と呼ばれる線形作用素が作用する。さらに、結晶極限における特別な基底「結晶基底」が存在し、結晶基底と柏原作用素は、「結晶グラフ」という有向グラフで表現される組合せ論的な対象となる。結晶グラフは、元の量子群の有限次元既約表現からすると、かなり情報が失われているように感じられるが、実際には結晶グラフから元の表現を復元することができる。このようにして、量子群の有限次元既約表現の構造を調べるという問題は、組合せ論的な問題に落とし込めるのである。

さて、量子群は Lie 代数の q-変形であると述べたが、Lie 代数の q-変形は量子群の他にも存在する。タイトルにある $\imath$ 量子群がそのひとつである。量子群のように、$\imath$ 量子群の有限次元既約表現の結晶極限を考えることで、Lie 代数の既約表現の新しい組合せ論的な構造が得られると期待される。

2. Lie 代数

$\mathfrak{g}$ を有限次元複素半単純 Lie 代数とし、I をその Dynkin 図形、$e_i, f_i, h_i,\ i \in I$ を Chevalley 生成元とする。$h_i, i \in I$ で生成される部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数という。$\mathfrak{g}$-加群 M と $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し、

$$M_\lambda := \{m \in M \mid hm = \lambda(h)m \ \text{ for all } h \in \mathfrak{h}\}$$

Date: January 29, 2021.

を M のウェイト μ のウェイト空間という。有限次元 $\mathfrak{g}$-加群はウェイト空間分解を持ち、そのウェイトは

$$P := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(h_i) \in \mathbb{Z} \ \text{ for all } i \in I\}$$

という集合 ($\mathfrak{g}$ のウェイト格子と呼ぶ) に属すことが知られている。P は、支配的順序 $\leq$ という半順序によって半順序集合の構造を持つ。

有限次元 $\mathfrak{g}$-加群は完全可約である。すなわち、既約加群の直和に分解する。有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群は、支配的整ウェイトの集合

$$P^+ := \{\lambda \in P \mid \lambda(h_i) \geq 0 \ \text{ for all } i \in I\}$$

で分類される。$\lambda \in P^+$ に対応する既約 $\mathfrak{g}$-加群を $V(\lambda)$ と書く。以下は、$V(\lambda)$ の顕著な特徴である：

- ウェイト空間 $V(\lambda)_\lambda$ は 1 次元である。以下、0 でない $v_\lambda \in V(\lambda)_\lambda$ を固定する。
- $\mu \leq \lambda$ でなければ $\dim V(\lambda)_\mu = 0$.
- $v \in V(\lambda)$ が $e_i v = 0$ for all $i \in I$ を満たすならば、$v \in \mathbb{C}v_\lambda$.
- $V(\lambda) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{f_{i_1} \cdots f_{i_r} v_\lambda \mid r \geq 0,\ i_1, \dots, i_r \in I\}$.

3. 量子群

ここでは、量子群の有限次元表現論と結晶基底についてよく知られた事実を述べる。詳細は、標準的な教科書 [2] や [5] を参照されたい。$U_q(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の量子群とする。これは、$\mathbb{C}(q)$ 上の結合代数である。$E_i, F_i, K_i^{\pm 1}, i \in I$ を Chevalley 生成元とする。量子群の表現論では、$K_i^{\pm 1}, i \in I$ で生成される部分代数 $U_q(\mathfrak{g})^0$ が Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ の役割を果たす。すなわち、$U_q(\mathfrak{g})$-加群 M と $\lambda \in P$ に対し、

$$M_\lambda := \{m \in M \mid K_i m = q_i^{\lambda(h_i)} m \ \text{ for all } i \in I\}$$

を M のウェイト μ のウェイト空間という。(タイプ $\mathbf{1}$ の) 有限次元 $U_q(\mathfrak{g})$-加群はウェイト空間分解を持つことが知られている。

【概要】で述べた通り、有限次元既約 $U_q(\mathfrak{g})$-加群は、有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群と同じく P^+ で分類される。$\lambda \in P^+$ に対応する既約 $U_q(\mathfrak{g})$-加群を $V_q(\lambda)$ と書く。

$\mathbf{A}_1 := \mathbb{C}(q)_{(q-1)}$ とおく。すなわち、$\mathbf{A}_1$ は、$q = 1$ において極を持たない有理関数のなす環である。既約 $U_q(\mathfrak{g})$-加群 $V_q(\lambda)$ は、ある自由 $\mathbf{A}_1$-部分加群 $V_q(\lambda)_{\mathbf{A}_1}$ を持ち、$V_q(\lambda)_1 := V_q(\lambda)_{\mathbf{A}_1} \otimes_{\mathbf{A}_1} \mathbb{C}$ は自然な $\mathfrak{g}$-加群の構造を持つ。ここで、$\mathbf{A}_1$ は $\mathbb{C}$ に $q = 1$ で作用している。このとき、$V_q(\lambda)_1$ は、既約 $\mathfrak{g}$-加群 $V(\lambda)$ に同型である。

既約 $U_q(\mathfrak{g})$-加群 $V_q(\lambda)$ は、既約 $\mathfrak{g}$-加群 $V(\lambda)$ と類似の以下の特徴を持つ：

- ウェイト空間 $V_q(\lambda)_\lambda$ は 1 次元である。以下、0 でない $v_\lambda \in V_q(\lambda)_\lambda$ を固定する。
- $\mu \leq \lambda$ でなければ $\dim V_q(\lambda)_\mu = 0$.
- $v \in V_q(\lambda)$ が $E_i v = 0$ for all $i \in I$ を満たすならば、$v \in \mathbb{C}(q)v_\lambda$.
- $V_q(\lambda) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}(q)}\{F_{i_1} \cdots F_{i_r} v_\lambda \mid r \geq 0,\ i_1, \dots, i_r \in I\}$.

$\wp^* : U_q(\mathfrak{g}) \to U_q(\mathfrak{g})$ を、以下で定義される $\mathbb{R}(q)$-反代数自己同型写像とする：

$$\wp^*(E_i) = q_i^{-1} E_i K_i^{-1}, \quad \wp^*(F_i) = q_i^{-1} F_i K_i, \quad \wp^*(K_i) = K_i, \quad \wp^*(z) = z^*,\ z \in \mathbb{C}$$

ただし、z^* は z の複素共役である。既約 $U_q(\mathfrak{g})$-加群 $V_q(\lambda)$ は、次の 2 条件を満たす唯一のエルミート内積 $(\cdot,\cdot)_\lambda$ を持つ：

- $(v_\lambda, v_\lambda)_\lambda = 1$.
- $(xu, v) = (u, \wp^*(x)v)$ for all $x \in U_q(\mathfrak{g}), u, v \in V_q(\lambda)$.

$\mathbf{A}_\infty := \mathbb{C}(q)_{(q^{-1})}$ とおき、

$$\mathcal{L}(\lambda) := \{v \in V_q(\lambda) \mid (v, v)_\lambda \in \mathbf{A}_\infty\}$$

とおく。これを、$V_q(\lambda)$ の結晶格子と呼ぶ。すると、

$$\overline{\mathcal{L}}(\lambda) := \mathcal{L}(\lambda)/q^{-1}\mathcal{L}(\lambda) \simeq \mathcal{L}(\lambda) \otimes_{\mathbf{A}_\infty} \mathbb{C}$$

は、$V_q(\lambda)$ の $q \to \infty$ 極限と見なせる。これを、$V_q(\lambda)$ の結晶極限と呼ぶ。

$U_q(\mathfrak{g})$ の Chevalley 生成元 E_i, F_i の $V_q(\lambda)$ への作用は、$\mathcal{L}(\lambda)$ を保たない。これを修正した柏原作用素 $\widetilde{E}_i, \widetilde{F}_i \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}(q)}(V_q(\lambda))$ は $\mathcal{L}(\lambda)$ を保つ。従って、柏原作用素は $\overline{\mathcal{L}}(\lambda)$ にも $\mathbb{C}$-線形に作用する。結晶極限と柏原作用素についても、$V(\lambda)$ と同様のことが成り立つ：

- $\overline{\mathcal{L}}(\lambda) = \bigoplus_{\mu \in P} \overline{\mathcal{L}}(\lambda)_\mu$. ただし、$\overline{\mathcal{L}}(\lambda)_\mu := \mathcal{L}(\lambda)_\mu/q^{-1}\mathcal{L}(\lambda)_\mu$, $\mathcal{L}(\lambda)_\mu := \mathcal{L}(\lambda) \cap V_q(\lambda)_\mu$.
- $\dim_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{L}}(\lambda)_\mu = \dim_{\mathbb{C}(q)} V_q(\lambda)_\mu$.
- $b \in \overline{\mathcal{L}}(\lambda)$ が $\widetilde{E}_i b = 0$ for all $i \in I$ を満たすならば $b \in \mathbb{C}(v_\lambda + q^{-1}\mathcal{L}(\lambda))$.
- $\overline{\mathcal{L}}(\lambda) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\widetilde{F}_{i_1} \cdots \widetilde{F}_{i_r}(v_\lambda + q^{-1}\mathcal{L}(\lambda)) \mid r \geq 0,\ i_1, \ldots, i_r \in I\}$.

M を有限次元 $U_q(\mathfrak{g})$-加群であって、次を満たすエルミート内積 $(\cdot,\cdot)_M$ を持つとする：

$$(xu, v)_M = (u, \wp^*(x)v)_M \quad \text{for all } x \in U_q(\mathfrak{g}), u, v \in M.$$

このような内積はいつでも存在する。実際、$M = \bigoplus_{k=1}^r M_k$, $M_k \simeq V_q(\lambda_k)$, $\lambda_k \in P^+$ と既約分解すれば、各既約成分は上の条件を満たす内積を持つ。逆に、上の条件を満たす内積は実質的にこのようなものであることもわかる。

$$\mathcal{L}_M := \{v \in M \mid (v,v)_M \in \mathbf{A}_\infty\}, \quad \overline{\mathcal{L}}_M := \mathcal{L}_M/q^{-1}\mathcal{L}_M$$

とおくと、内積も込めた既約分解 $M \simeq \bigoplus_{k=1}^r V_q(\lambda_k)$ の下で $\mathcal{L}_M \simeq \bigoplus_{k=1}^r \mathcal{L}(\lambda_k)$, $\overline{\mathcal{L}}_M \simeq \bigoplus_{k=1}^r \overline{\mathcal{L}}(\lambda_k)$ と分解する。この観察と、先に述べた $\overline{\mathcal{L}}(\lambda)$ の特徴から次がわかる：

命題 3.1. $\lambda \in P^+$ に対し、

$$\sharp\{k \mid \lambda_k = \lambda\} = \dim_{\mathbb{C}}\{b \in \overline{\mathcal{L}}_{M,\lambda} \mid \widetilde{E}_i b = 0 \ \ \textit{for all } i \in I\}.$$

ただし、$\overline{\mathcal{L}}_{M,\lambda} := \mathcal{L}_{M,\lambda}/q^{-1}\mathcal{L}_{M,\lambda}$, $\mathcal{L}_{M,\lambda} := \mathcal{L}_M \cap M_\lambda$.

注意 3.2. $\overline{\mathcal{L}}_M$ の特別な基底「結晶基底」 $\mathcal{B}_M$ を用いると、命題の右辺は

$$\sharp\{b \in \mathcal{B}_{M,\lambda} \mid \widetilde{E}_i b = 0 \ \ \text{for all } i \in I\}$$

と書ける。これにより、M の既約成分の重複度は、組合せ論的な数え上げ問題に帰着される。

4. $\imath$ 量子群

ここでは $\imath$ 量子群を導入し、その既約表現の結晶極限について述べる。$\imath$ 量子群の教科書はまだないので、論文 [4, 3, 1] などを参照されたい。Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の対合 $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ を考え、その固定点のなす部分 Lie 代数を $\mathfrak{k}$ とおく：

$$\mathfrak{k} := \mathfrak{g}^\theta = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}.$$

このような Lie 代数の組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ を対称対と呼ぶ。一般に、$\mathfrak{k}$ は簡約 Lie 代数であることが知られている。特に、$\mathfrak{k}$ の有限次元既約表現は、$\mathfrak{k}$ の支配的整ウェイトの集合 $P_{\mathfrak{k}}^+$ で分類される。$\nu \in P_{\mathfrak{k}}^+$ に対応する既約 $\mathfrak{k}$-加群を $V(\nu)$ または $V_{\mathfrak{k}}(\nu)$ と書く。

量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数 $U^\imath(\mathfrak{k})$ で、次を満たすものを $\imath$ 量子群と呼ぶ：

- $U^\imath(\mathfrak{k})$ は $\mathfrak{k}$ の q-変形である。
- $U^\imath(\mathfrak{k})$ は $U_q(\mathfrak{g})$ の右余イデアルである。すなわち、$\Delta(U^\imath(\mathfrak{k})) \subset U^\imath(\mathfrak{k}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$.
- $U^\imath(\mathfrak{k})$ は、上記 2 条件を満たすものの中で、包含関係に関して極大である。

この条件では $U^\imath(\mathfrak{k})$ は一意には定まらないが、代数としてはどれも同型である。代数の組 $(U_q(\mathfrak{g}), U^\imath(\mathfrak{k}))$ を量子対称対という。

例 4.1. 対角型の $\imath$ 量子群は、通常の量子群と自然に同型になる。この意味で、$\imath$ 量子群は量子群の一般化であると言える。対角型とは、次のようにして得られるものである。I を Dynkin 図形、$I_1 = \{i_1 \mid i \in I\}, I_2 = \{i_2 \mid i \in I\}$ をそのコピーとし、$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(I_1) \oplus \mathfrak{g}(I_2) \simeq \mathfrak{g}(I) \oplus \mathfrak{g}(I)$ 上の対合 θ を

$$\theta(e_{i_1}) = f_{i_2}, \quad \theta(f_{i_1}) = e_{i_2}, \quad \theta(h_{i_1}) = -h_{i_2} \quad \text{for all } i \in I$$

で定める。すると、$\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^\theta$ は、$f_{i_1} + e_{i_2}, f_{i_2} + e_{i_1}, h_{i_1} - h_{i_2}, i \in I$ で生成され、

$$f_{i_1} + e_{i_2} \mapsto e_i, \quad f_{i_2} + e_{i_1} \mapsto f_i, \quad h_{i_1} - h_{i_2} \mapsto -h_i \quad \text{for all } i \in I$$

という対応で $\mathfrak{g}(I)$ に同型になる。

対応する $\imath$ 量子群 $U^\imath(\mathfrak{k})$ は、$F_{i_1} + E_{i_2}K_{i_1}^{-1}$, $F_{i_2} + E_{i_1}K_{i_2}^{-1}$, $(K_{i_1}K_{i_2}^{-1})^{\pm 1}$, $i \in I$ で生成される。さて、$U_q(\mathfrak{g}) = U_q(\mathfrak{g}(I_1)) \otimes U_q(\mathfrak{g}(I_2))$ は $U_q(\mathfrak{g}(I)) \otimes U_q(\mathfrak{g}(I))$ に同型である。この同型は、

$$\begin{aligned} E_{i_1} &\leftrightarrow F_i \otimes 1, \quad F_{i_1} \leftrightarrow E_i \otimes 1, \quad K_{i_1} \leftrightarrow K_i^{-1} \otimes 1, \\ E_{i_2} &\leftrightarrow 1 \otimes E_i, \quad F_{i_2} \leftrightarrow 1 \otimes F_i, \quad K_{i_2} \leftrightarrow 1 \otimes K_i \end{aligned}$$

で与えられる。このとき、埋め込み $U^\imath(\mathfrak{k}) \hookrightarrow U_q(\mathfrak{g})$ は

$$\begin{aligned} &F_{i_1} + E_{i_2}K_{i_1}^{-1} \mapsto E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \\ &F_{i_2} + E_{i_1}K_{i_2}^{-1} \mapsto 1 \otimes F_i + F_i \otimes K_i^{-1}, \\ &K_{i_1}K_{i_2}^{-1} \mapsto K_i^{-1} \end{aligned}$$

で与えられる。一方、$U^\imath(\mathfrak{k})$ は

$$F_{i_1} + E_{i_2}K_{i_1}^{-1} \mapsto E_i, \quad F_{i_2} + E_{i_1}K_{i_2}^{-1} \mapsto F_i, \quad K_{i_1}K_{i_2}^{-1} \mapsto K_i^{-1}$$

という対応で $U_q(\mathfrak{g}(I))$ に同型である。従って、上の埋め込み $U^\imath(\mathfrak{k}) \hookrightarrow U_q(\mathfrak{g})$ は、量子群 $U_q(\mathfrak{g}(I))$ の余積 $\Delta : U_q(\mathfrak{g}(I)) \to U_q(\mathfrak{g}(I)) \otimes U_q(\mathfrak{g}(I))$ に他ならない。

$\imath$ 量子群の表現論は、量子群の表現論よりずっと難しく、有限次元表現の分類すら達成できていない。筆者は、「古典ウェイト加群 (classical weight module)」という $U^\imath(\mathfrak{k})$-加群のクラスを定義し、次の結果を得た。

定理 4.2 ([6])**.** $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = (\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{so}_n), (\mathfrak{sl}_{2n}, \mathfrak{sp}_{2n}), (\mathfrak{sl}_{2r+1}, \mathfrak{s}(\mathfrak{gl}_{r+1} \oplus \mathfrak{gl}_r)), (\mathfrak{sl}_{2r}, \mathfrak{s}(\mathfrak{gl}_r \oplus \mathfrak{gl}_r))$ のいずれかであるとする。

(1) 有限次元古典ウェイト加群 M は、「ウェイト空間分解」 $M = \bigoplus_{\nu \in P_\mathfrak{k}} M_\nu$ を持つ。ここで、$P_\mathfrak{k}$ は、$\mathfrak{k}$ のウェイト格子である。
(2) $U^\imath(\mathfrak{k})$ の有限次元古典ウェイト加群は完全可約である。
(3) $U^\imath(\mathfrak{k})$ の有限次元既約古典ウェイト加群は、$P_\mathfrak{k}^+$ で分類される。$\nu \in P_\mathfrak{k}^+$ に対応する既約加群 $V^\imath(\nu)$ は、次で特徴づけられる：
  (a) $\dim V^\imath(\nu)_\nu = 1$.
  (b) $V^\imath(\nu)_\xi = 0$ *unless* $\xi \leq \nu$.
(4) $V^\imath(\nu) \to V_\mathfrak{k}(\nu)$ $(q \to 1)$.

さて、$\mathfrak{k}$ は簡約 Lie 代数であるから、その量子群 $U_q(\mathfrak{k})$ を考えることができる。量子群 $U_q(\mathfrak{k})$ と $\imath$ 量子群 $U^\imath(\mathfrak{k})$ はどちらも $\mathfrak{k}$ の q-変形であるが、両者の代数構造は大きく異なっている。特に本稿で重要になる差異は、量子群への自然な埋め込みの有無である。$\imath$ 量子群 $U^\imath(\mathfrak{k})$ は、その定義から、量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ へ代数として埋め込むことができる。さらに、この埋め込みは、Lie 代数の埋め込み $\mathfrak{k} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ の q-変形である。しかし、この Lie 代数の埋め込みを量子群の埋め込み $U_q(\mathfrak{k}) \hookrightarrow U_q(\mathfrak{g})$ に q-変形することはできない。このことから、量子群では捉えることのできない非 Levi 型の分岐則を、$\imath$ 量子群の表現論から捉えられることがわかる。

以下、この分岐則に関するアイデアを簡単に述べる。詳細は [6, 7] を参照されたい。$\imath$ 量子群 $U^\imath(\mathfrak{k})$ は、量子群 $U_q(\mathfrak{k})$ と違って Chevalley 生成元を持たない。しかし、古典ウェイト加群上には、Chevalley 生成元のように働く線形作用素 X_j, Y_j たちを定義することができる。さらに、量子群の表現論における柏原作用素 $\widetilde{E}_i, \widetilde{F}_i$ のように、Chevalley 生成元の作用を修正した $\tilde{X}_j, \tilde{Y}_j$ を自然に定義することができる。この作用素 $\tilde{X}_j, \tilde{Y}_j$ は、既約 $U_q(\mathfrak{g})$-加群 $V(\lambda)$, $\lambda \in P^+$ の結晶格子 $\mathcal{L}(\lambda)$ を保つ (しかし、結晶基底は保たない)。これにより、$V(\lambda)$ の $U^\imath(\mathfrak{k})$-加群としての構造を、$\mathcal{L}(\lambda)$ や、$\overline{\mathcal{L}}(\lambda)$ 上で解析することができるようになる。このとき、$V(\lambda)$ の $U^\imath(\mathfrak{k})$-加群としての既約分解と、$\overline{\mathcal{L}}(\lambda)$ の $\tilde{X}_j, \tilde{Y}_j$ の作用に関する「既約分解」が完全に対応することが期待されるが、残念ながら未だ証明には至っていない。もしこの予想が正しければ、通常の結晶基底の理論と同様に、$V(\lambda)$ の $U^\imath(\mathfrak{k})$-加群としての既約分解の様子は、$\overline{\mathcal{L}}(\lambda)$ において $\bigcap_j \mathrm{Ker}\tilde{X}_j$ を求めればわかることになる。

謝辞

本稿は、科研費若手研究 20K14286 の助成を受けた研究に基づく。

最後に、RIMS 共同研究「組合せ論的表現論の最近の進展」の開催にご尽力くださり、筆者に講演の機会を与えてくださった土岡俊介先生に感謝の意を表します。

References

[1] H. Bao and W. Wang, Canonical bases arising from quantum symmetric pairs, Invent. Math. 213 (2018), no. 3, 1099–1177.
[2] J. Hong and S.-J. Kang, Introduction to Quantum Groups and Crystal Bases, Graduate Studies in Mathematics, 42. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. xviii+307.
[3] S. Kolb, Quantum symmetric Kac-Moody pairs, Adv. Math. 267 (2014), 395469.
[4] G. Letzter, Symmetric pairs for quantized enveloping algebras, J. Algebra 220 (1999), no. 2, 729–767.
[5] G. Lusztig, Introduction to Quantum Groups, Reprint of the 1994 edition. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer, New York, 2010. xiv+346 pp.
[6] H. Watanabe, Classical weight modules over ıquantum groups, arXiv:1912.11157.
[7] H. Watanabe, Based modules over the ıquantum group of type AI, in preparation.

(H. Watanabe) Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan
Email address: hideya@kurims.kyoto-u.ac.jp