Inverse K-Chevalley formula for type A semi-infinite flag manifolds

東京工業大学・理学院数学系　河野 隆史
Takafumi Kouno
Department of Mathematics,
Tokyo Institute of Technology

概要

半無限旗多様体における同変 K 群は，通常の旗多様体の量子 K 理論と密接な関係があり，重要な研究対象である．近年，半無限旗多様体の同変 K 群の (テンソル) 積構造を明らかにするために，Chevalley 公式と呼ばれる等式が研究されてきた．本研究の主な目的は，A 型の単純代数群について，Chevalley 公式を逆に解いた公式を具体的に記述することである．本稿では，本研究で得られた結果について，証明等の詳細を省いて概説する．本稿は，RIMS 共同研究「組合せ論的表現論の最近の進展」における講演 "Inverse K-Chevalley formula for type A semi-infinite flag manifolds" のまとめである．なお，本稿は内藤聡氏，Daniel Orr 氏，佐垣大輔氏との共同研究に基づく．

1 Introduction

本稿を通して，G を連結かつ単連結な単純代数群とし，H を G の極大トーラス，N を G の冪単根基とする．また，Δ を G のルート系，Δ^+ を G の正ルート全体の集合とし，P を G のウェイト格子，$P^+ \subset P$ を G の優整ウェイト全体の集合，Q を G のルート格子とする．続いて，I を G の Dynkin 図形の頂点全体のなす集合とし，G の単純ルート全体の集合を $\{\alpha_i \mid i \in I\}$，$G$ の単純余ルート全体の集合を $\{\alpha_i^\vee \mid i \in I\}$，$G$ の基本ウェイト全体の集合を $\{\varpi_i \mid i \in I\}$ と書く．

本節では，本稿で主として扱う半無限多様体やその同変 K-群の定義を復習し，本研究で考察した「逆 Chevalley 公式」を導入する．半無限旗多様体の定義や性質等について，詳しくは [KNS] や [O] などを参照していただきたい．

1.1 半無限旗多様体

代数群 G から構成される**半無限旗多様体** $\mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}}$ とは，$\mathbb{C}$-値点の集合 $\mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}}(\mathbb{C})$ が $G(\mathbb{C}(\!(z)\!))/(H(\mathbb{C})\cdot N(\mathbb{C}(\!(z)\!)))$ に一致するような被約 ind-スキームである．ここで，$\mathbb{C}(\!(z)\!)$ は $\mathbb{C}$-係数 Laurent 級数全体のなす体である．半無限旗多様体 $\mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}}$ は，通常の旗多様体 $G/(HN)$ のある種のループ化であ

る．本稿では $\mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}}$ の同変 K 理論について議論するため，まずは必要な設定を以下で復習する．

半無限旗多様体 $\mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}}$ には，通常の旗多様体の Bruhat 分解の類似に当たる分解が存在することが知られている．$\mathbf{I}$ を $G(\mathbb{C}[\![z]\!])$ の岩堀部分群とする．ここで $\mathbb{C}[\![z]\!]$ は $\mathbb{C}$-係数形式的冪級数環である．そして，$\mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}}$ の $\mathbf{I}$-作用に関する軌道全体の集合は，G のアフィン Weyl 群 W_{af} と 1 対 1 に対応する．そこで，$x \in W_{\mathrm{af}}$ に対応する $\mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}}$ の $\mathbf{I}$-軌道の閉包を $\mathbf{Q}_G(x)$ と書き，これを x に対応する**半無限 Schubert 多様体**と呼ぶ．とくに，単位元 $e \in W_{\mathrm{af}}$ に対応する半無限 Schubert 多様体 $\mathbf{Q}_G(e)$ を単に $\mathbf{Q}_G$ と書き，特に混乱のない限り $\mathbf{Q}_G$ も半無限旗多様体と呼ぶ．各 $x \in W_{\mathrm{af}}$ に対し，半無限 Schubert 多様体 $\mathbf{Q}_G(x)$ の構造層を $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}$ と書く．

また，通常の旗多様体と同様に，各 $\lambda \in P$ に対して $\mathbf{Q}_G$ 上の直線束を次のように構成することができる．各 $\mu \in P^+$ に対し，μ を最高ウェイトにもつ G の既約最高ウェイト表現を $L(\mu)$ と書くとき，$\mathbf{Q}_G$ の射影空間への埋め込み

$$\mathbf{Q}_G \hookrightarrow \mathbb{P} := \prod_{i \in I} \mathbb{P}(L(\varpi_i) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\![z]\!]) \tag{1}$$

が存在する．そこで，$\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P$ $(m_i \in \mathbb{Z})$ に付随する $\mathbf{Q}_G$ 上の直線束 $\mathcal{O}(\lambda)$ を，射影空間 $\mathbb{P}$ 上の直線束 $\boxtimes_{i \in I} \mathcal{O}(m_i)$ の，埋め込み (1) による引き戻しとして定義する．

1.2 同変 K-群

これまでの準備をもとに，$\mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}}$ の同変 K-群の定義を復習する．$q \in R(\mathbb{C}^*)$ を loop rotation 作用に関する指標とする．すなわち，$q : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*;\ q(a) := a^{-1}$ である．まず群 $K_{\mathbf{I} \rtimes \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G)$ を

$$K_{\mathbf{I} \rtimes \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G) := \left\{ f = \sum_{\lambda \in P} f_\lambda [\mathcal{O}(\lambda)] \;\middle|\; f_\lambda \in \mathbb{Z}[P][\![q^{-1}]\!],\ \text{and } f \text{ satisfies } (\#) \right\} \Big/ \sim,$$

$$\begin{aligned}
(\#) :&\ \sum_{\lambda \in P} |f_\lambda| \operatorname{gch} H^0(\mathbf{Q}_G, \mathcal{O}(\lambda + \mu)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[P][\![q^{-1}]\!] \text{ for all } \mu \in P, \\
(\sim) :&\ f \sim 0 \iff \sum_{\lambda \in P} f_\lambda \operatorname{gch} H^0(\mathbf{Q}_G, \mathcal{O}(\lambda + \mu)) = 0 \text{ for all } \mu \gg 0.
\end{aligned}$$

と定める．ここで，各 $\nu \in P$ に対し，コホモロジー群 $H^k(\mathbf{Q}_G, \mathcal{O}(\nu))$ $(k \geq 0)$ は $(H \times \mathbb{C}^*)$-加群であり，$\operatorname{gch} H^k(\mathbf{Q}_G, \mathcal{O}(\nu))$ とは $H^k(\mathbf{Q}_G, \mathcal{O}(\nu))$ の $(H \times \mathbb{C}^*)$-加群としての指標である．また，$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \lambda \in P} m_{k,\lambda} q^{-k} e^\lambda \in \mathbb{Z}[P][\![q^{-1}]\!]$ $(m_{k,\lambda} \in \mathbb{Z})$ に対し，$|f| := \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \lambda \in P} |m_{k,\lambda}| q^{-k} e^\lambda$ と定めている．なお，$\mu \gg 0$ の定義は省略するが，μ が "十分優整ウェイト" であることを意味している．(ただし，後に定義する「S に関して十分優整」とは条件が異なることに注意する．)

続いて $\mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}}$ の同変 K-群を定義する．各 $\beta \in Q^{\vee,+} := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i^\vee$ に対し，埋め込み $(i_\beta)_* : K_{\mathbf{I} \rtimes \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G) \to K_{\mathbf{I} \rtimes \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G)$ であって，$(i_\beta)_*([\mathcal{O}(\lambda)]) = q^{\langle \lambda, \beta \rangle} [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(t_{-w_\circ \beta})} \otimes \mathcal{O}(\lambda)]$ $(\lambda \in P)$ が成り立つものが存在する．ただし，$w_\circ$ は G の Weyl 群 W の最長元であり，各 $\xi \in Q^\vee = \sum_{i \in I} \mathbb{Z} \alpha_i^\vee$ に対し，$t_\xi \in W_{\mathrm{af}}$ は平行移動元である．すると，帰納系 $((K_\alpha)_\alpha, (i_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta})$ を，各 $\alpha \in Q^{\vee,+}$ に対

し $K_\alpha := K_{\mathbf{I}\rtimes\mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G)$，また $\beta-\alpha\in Q^{\vee,+}$ を満たす $\alpha,\beta\in Q^{\vee,+}$ に対し $i_{\alpha,\beta} := (i_{\beta-\alpha})_*$ で定めることができる．$\mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}}$ の $(\mathbf{I}\rtimes\mathbb{C}^*)$**-同変** K**-群** $K_{\mathbf{I}\rtimes\mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}})$ は，この帰納系 $((K_\alpha)_\alpha,(i_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta})$ の帰納極限として定まる．すなわち

$$K_{\mathbf{I}\rtimes\mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}}) := \mathbb{Z}[P](\!(q^{-1})\!)\otimes_{\mathbb{Z}[P][\![q^{-1}]\!]}\varinjlim_{\alpha} K_\alpha$$

と定める．

さらに，本稿で主として扱う同変 K-群を次のように定める．各 $x\in W_{\mathrm{af}}$ に対し，$\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}$ のクラス $[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}]\in K_{\mathbf{I}\rtimes\mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}})$ が定まる．このクラス $[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}]$ を**半無限 Schubert 類**と呼ぶ．$W_{\mathrm{af}}^{\geq 0} := W\times\{t_\xi \mid \xi\in Q^{\vee,+}\}\subset W_{\mathrm{af}}$ とするとき，$\mathbf{Q}_G$ **の** $(H\times\mathbb{C}^*)$**-同変** K**-群** $K_{H\times\mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G)$ は，$\sum_{x\in W_{\mathrm{af}}^{\geq 0}}|f_x|\in\mathbb{Z}_{\geq 0}(\!(q^{-1})\!)[P]$ を満たすすべての $\sum_{x\in W_{\mathrm{af}}^{\geq 0}} f_x[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}]$ $(f_x\in\mathbb{Z}[q,q^{-1}][P])$ から成る $K_{\mathbf{I}\rtimes\mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}})$ の $\mathbb{Z}[q,q^{-1}][P]$-部分加群として定義される．

1.3 Chevalley 公式と逆 Chevalley 公式

半無限旗多様体 $\mathbf{Q}_G$ の $(H\times\mathbb{C}^*)$-同変 K-群 $K_{H\times\mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G)$ は，通常の旗多様体 $G/(HN)$ の量子 K 理論と密接な関係があることが知られている．よって，$K_{H\times\mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G)$ の (テンソル) 積構造を調べることには重要な意義がある．

この構造を調べる手法のひとつとして，Chevalley 公式を記述することが挙げられる．Chevalley 公式とは，半無限 Schubert 類 $[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}]$ と直線束のクラス $[\mathcal{O}(\lambda)]$ のテンソル積 $[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}\otimes\mathcal{O}(\lambda)]$ を，半無限 Schubert 類 $[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(y)}]$ にトーラス H の表現環 $R(H)=\mathbb{Z}[P]\ni e^\mu$ を作用させて得られるクラス $e^\mu\cdot[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(y)}] := [\mathbb{C}_\mu\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(y)}]$ たちの整数係数 (ある種の無限) 一次結合として具体的に表す公式である．すなわち，以下のような形の等式である．

$$[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}\otimes\mathcal{O}(\lambda)] = \sum_{\mu\in P,\ y\in W_{\mathrm{af}}} c_{\mu,y}e^\mu\cdot[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(y)}]$$

ここで，$c_{\mu,y}\in\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ である．

Chevalley 公式についてはこれまで様々な設定で研究され，λ が優整ウェイトのときは [KNS], λ が反優整ウェイトのときは [NOS] でそれぞれ具体的に記述された．また，優整または反優整とは限らない一般の λ に対する Chevalley 公式も [LNS] で研究されている．

我々の目標は，Chevalley 公式をある種逆に解いた次のような公式 (**逆 Chevalley 公式**と呼ぶ) を記述することである：

$$e^\mu\cdot[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(y)}] = \sum_{x\in W_{\mathrm{af}},\ \lambda\in P} d_{x,\lambda}[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}\otimes\mathcal{O}(\lambda)],$$

ここで $d_{x,\lambda}\in\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ である．

本研究では，G が A 型で，かつ μ が第 1 基本ウェイト ϖ_1 の W-軌道の元である場合に，係数 $d_{x,\lambda}$ の具体的な記述を得た．本稿では，この結果について説明する．なお，G が A 型の場合は，すべての整ウェイト $\mu\in P$ は第 1 基本ウェイト ϖ_1 の W-軌道の元たちの非負整数係数一次

結合として表すことができる．従って，第 1 基本ウェイトの W-軌道に属するウェイトに対して逆 Chevalley 公式を記述することができれば，任意の整ウェイトに対する逆 Chevalley 公式を記述できることに注意する．

2　量子 Bruhat グラフと extremal ウェイト加群

本節では，結果の記述に必要な量子 Bruhat グラフ，および extremal ウェイト加群を導入する．

2.1　量子 Bruhat グラフ

量子 Bruhat グラフは [BFP] において導入された W 上の有向グラフであり，表現論や組合せ論などの様々な場面で現れる．ここでは，その定義を復習し，いくつかの記号を導入する．いま $\rho := (1/2)\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha$ とおき，各 $\alpha \in \Delta$ に対応する余ルートを $\alpha^\vee$ と書く．また，ℓ を W の長さ関数とする．

定義 2.1 ([BFP, Definition 6.1])**.** 次で定まるラベル付き有向グラフを**量子 Bruhat グラフ**と呼び，$\mathrm{QBG}(W)$ と書く．

- 頂点集合：W
- ラベルの集合：Δ^+
- 辺：$x, y \in W$ に対し，$x \xrightarrow{\alpha} y \iff y = xs_\alpha$ かつ
  (B) $\ell(y) = \ell(x) + 1$ または
  (Q) $\ell(y) = \ell(x) - 2\langle\rho, \alpha^\vee\rangle + 1$.

量子 Bruhat グラフ $\mathrm{QBG}(W)$ 上のパス $\mathbf{p} : x_0 \xrightarrow{\gamma_1} x_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_s} x_s$ に対し，$\mathrm{wt}(\mathbf{p}) \in Q^{\vee,+}$ を

$$\mathrm{wt}(\mathbf{p}) := \sum_{\substack{1\le i\le s \\ x_{i-1}\to x_i \text{ is a quantum edge}}} \gamma_i^\vee$$

で定める．各 $x, y \in W$ に対し，x を始点とし，y を終点とする $\mathrm{QBG}(W)$ 上のパス $\mathbf{p}$ が存在する．そこで，そのような $\mathbf{p}$ のうち長さが最小であるものを一つとり，$\mathrm{wt}(x \Rightarrow y) := \mathrm{wt}(\mathbf{p})$ とする．[P, Lemma 1 (2)] より，$\mathrm{wt}(x \Rightarrow y)$ は well-defined に定まる．

2.2　extremal ウェイト加群とその Demazure 部分加群

$\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ を，G の Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ から構成される (untwisted) アフィン Lie 代数とし，P_{af} を $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ のウェイト格子とする．また，$U_{\mathsf{v}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{af}})$ を $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ から構成される ($\mathbb{C}(\mathsf{v})$ 上の) 量子アフィン代数とする．I_{af} を $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ の Dynkin 図形の頂点の集合とし，各 $i \in I_{\mathrm{af}}$ に対する Chevalley 生成元を $F_i, E_i \in U_{\mathsf{v}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{af}})$ と書く．さらに，$\{F_i \mid i \in I\}$ で生成される $U_{\mathsf{v}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{af}})$ の部分代数を $U_{\mathsf{v}}^-(\mathfrak{g}_{\mathrm{af}})$ と書く．

$U_{\mathsf{v}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{af}})$ の表現論において重要な役割を果たす加群のひとつが，[K1] で導入された extremal ウェイト加群およびその Demazure 部分加群である．ただし，extremal ウェイト加群の正確な定義は複雑であるため，本稿では概略にとどめる．正確な定義については，[K1] を参照していただきたい．

定義 2.2 ([K1, Definition 8.1.1])**.** M を可積分 $U_{\mathsf{v}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{af}})$-加群とする．$\lambda \in P_{\mathrm{af}}$ に対し，以下の条件を満たす $v \in M$ をウェイト λ の **extremal ウェイトベクトル**と呼ぶ．

1. v はウェイト λ のウェイトベクトルである．
2. ベクトルの族 $\{v_x\}_{x \in W_{\mathrm{af}}} \subset M$ が存在して，以下を満たす：
   - $v_e = v$
   - 各 $i \in I_{\mathrm{af}}$ に対し，$\langle x\lambda, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$ ならば $E_i v_x = 0$ かつ $F_i^{(\langle x\lambda, \alpha_i^\vee \rangle)} v_x = v_{s_i x}$
   - 各 $i \in I_{\mathrm{af}}$ に対し，$\langle x\lambda, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$ ならば $F_i v_x = 0$ かつ $E_i^{(-\langle x\lambda, \alpha_i^\vee \rangle)} v_x = v_{s_i x}$

ただし，各 $i \in I_{\mathrm{af}}$ および $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，$F_i^{(k)}$ および $E_i^{(k)}$ は v-divided power を表す．

定義 2.3 ([K1, Proposition 8.2.2])**.** $\lambda \in P_{\mathrm{af}}$ とする．1 つの元 v_λ で生成され，「v_λ がウェイト λ の extremal ウェイトベクトルである」という基本関係式によって定義される可積分 $U_{\mathsf{v}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{af}})$-加群をウェイト λ の **extremal ウェイト加群**と呼び，$V(\lambda)$ と書く．

続いて，Demazure 部分加群を復習する．$v_\lambda \in V(\lambda)$ は extremal ウェイトベクトルであるから，ベクトルの族 $\{v_x\}_{x \in W_{\mathrm{af}}} \subset V(\lambda)$ であって，定義 2.2 の条件を満たすようなものが存在する．

定義 2.4 ([K2, Section 2.8])**.** $\lambda \in P_{\mathrm{af}}$，$x \in W_{\mathrm{af}}$ に対し，$U_{\mathsf{v}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{af}})$ の **Demazure 部分加群** $V_x^-(\lambda)$ を $V_x^-(\lambda) := U_{\mathsf{v}}^-(\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}) v_x$ で定める．

Demazure 部分加群は，次のようなウェイト分解を持つ：

$$V_x^-(\lambda) = \bigoplus_{\gamma \in Q,\ k \in \mathbb{Z}} V_x^-(\lambda)_{\lambda+\gamma+k\delta},$$

ここで，各 $\nu \in P_{\mathrm{af}}$ に対し，$V_x^-(\lambda)_\nu$ は $V_x^-(\lambda)$ のウェイト ν に対するウェイト空間であり，有限次元である．また，δ は null ルートである．そこで，(次数付き) **Demazure 指標** $\mathrm{gch}\, V_x^-(\lambda)$ を

$$\mathrm{gch}\, V_x^-(\lambda) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{\gamma \in Q} \dim(V_x^-(\lambda)_{\lambda+\gamma+k\delta}) e^{\lambda+\gamma} \right) q^k$$

と定める．

3　Demazure 指標と K 理論の関係

これ以降，G は A_n 型であるとする．我々の目標は，次のような形の逆 Chevalley 公式を具体的に記述することであった：

$$e^{y\varpi_1} \cdot [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}] = \sum_{w \in W_{\mathrm{af}},\ \mu \in P} d_{w,\mu}[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(w)} \otimes \mathcal{O}(\mu)].$$

この公式を記述するために，等式の両辺に現れる層のコホモロジー群を考える．

いま，ある種の関数のなす $\mathbb{C}[q,q^{-1}][P]$-加群 $\mathrm{Fun}_P(\mathbb{C}(\!(q^{-1})\!)[P])$，およびその $\mathbb{C}[q,q^{-1}][P]$-部分加群 $\mathrm{Fun}_P^{\mathrm{neg}}(\mathbb{C}(\!(q^{-1})\!)[P])$，商加群 $\mathrm{Fun}_P^{\mathrm{ess}}(\mathbb{C}(\!(q^{-1})\!)[P])$ を

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fun}_P(\mathbb{C}(\!(q^{-1})\!)[P]) &:= \{\Phi : P \to \mathbb{C}(\!(q^{-1})\!)[P]\}, \\
\mathrm{Fun}_P^{\mathrm{neg}}(\mathbb{C}(\!(q^{-1})\!)[P]) &:= \left\{ \Phi \in \mathrm{Fun}_P(\mathbb{C}(\!(q^{-1})\!)[P]) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{There exists } \gamma \in P \\ \text{such that } \Phi(\mu) = 0 \text{ for all } \mu \in \gamma + P^+ \end{array} \right\}, \\
\mathrm{Fun}_P^{\mathrm{ess}}(\mathbb{C}(\!(q^{-1})\!)[P]) &:= \mathrm{Fun}_P(\mathbb{C}(\!(q^{-1})\!)[P]) / \mathrm{Fun}_P^{\mathrm{neg}}(\mathbb{C}(\!(q^{-1})\!)[P])
\end{aligned}$$

で定める．このとき，以下の事実が知られている．

命題 3.1 (cf. [KNS, Lemma 5.7])**.** $\mathbb{Z}[q,q^{-1}][P]$-加群の単射準同型写像 $\Psi : K_{H \times \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G) \to \mathrm{Fun}_P^{\mathrm{ess}}(\mathbb{C}(\!(q^{-1})\!)[P])$ であって，各クラス $[\mathcal{E}] \in K_{H \times \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G)$ および $\lambda \in P$ に対し

$$(\Psi([\mathcal{E}]))(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{gch} H^i(\mathbf{Q}_G, \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(\lambda))$$

が成り立つものが存在する．

よって，逆 Chevalley 公式の考察においては，半無限 Schubert 多様体の構造層 $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}$ のコホモロジー群が重要な役割を果たす．このコホモロジー群については，以下の事実が知られている．

命題 3.2 ([KNS, Corollary 4.30])**.** 各 $x \in W_{\mathrm{af}}^{\geq 0}$ および $\lambda \in P$ に対し

$$\operatorname{gch} H^i(\mathbf{Q}_G, \mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)} \otimes \mathcal{O}(\lambda)) = \begin{cases} \operatorname{gch} V_x^-(-w_\circ \lambda) & \text{if } \lambda \in P^+ \text{ and } i = 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ．

注意 3.3. 命題 3.1 および命題 3.2 は，G が A_n 型でなくても成り立つ．

これらの事実を用いて，逆 Chevalley 公式を Demazure 指標に関する等式に言い換える．$S \subset W_{\mathrm{af}} \times P$ を有限集合とする．$\lambda \in P^+$ は，次の条件 (SD) を満たすとき S **に関して十分優整であると呼ぶ**．

(SD) $(w, \mu) \in S$ となる $w \in W$ が存在するような任意の $\mu \in P$ に対し $\lambda + \mu \in P^+$

命題 3.1，および命題 3.2 の系として，以下が従う．

系 3.4. $x, y \in W$ とし，有限集合 $S \subset W_{\mathrm{af}} \times P$ と族 $\{d_{w,\mu}\}_{(w,\mu)\in S} \subset \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ を固定する．このとき，次の 1. と 2. は同値である．

1. 等式
$$e^{y\varpi_1} \cdot [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}] = \sum_{(w,\mu)\in S} d_{w,\mu} [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(w)} \otimes \mathcal{O}(\mu)]$$
が成り立つ．
2. S に関して十分優整である $\lambda \in P^+$ に対し，等式
$$e^{y\varpi_1} \operatorname{gch} V_x^-(-w_\circ\lambda) = \sum_{(w,\mu)\in S} d_{w,\mu} \operatorname{gch} V_w^-(-w_\circ(\lambda+\mu))$$
が成り立つ．

ゆえに，系 3.4 の 2. が成り立つような有限集合 $S \subset W_{\mathrm{af}} \times P$ と族 $\{d_{w,\mu}\}_{(w,\mu)\in S} \subset \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ を求めることが目標となる．

4 逆 Chevalley 公式

本節では，主結果である逆 Chevalley 公式の記述について述べる．本節において，単純ルート α_k $(k = 1, \dots, n)$ に対する単純鏡映を $s_k := s_{\alpha_k}$ と書く．

まず，$k = 0, 1, \dots, n$ に対し，$y_k := s_k \cdots s_1 \in W$ と定める．このとき，ϖ_1 の安定化群 $W_{\varpi_1} = \{w \in W \mid w\varpi_1 = \varpi_1\}$ による W の商 W/W_{ϖ_1} において，その minimal coset representative の全体の集合を W^{ϖ_1} と書くと，$W^{\varpi_1} = \{e = y_0, y_1, \dots, y_n\}$ が成り立つ．

続いて，$1 \le i < j \le n$ である $i, j \in I = \{1, \dots, n\}$ に対し，$\alpha_{i,j} := \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_j$ と定める．すると，G の正ルート全体の集合 Δ^+ は $\Delta^+ = \{\alpha_{i,j} \mid 1 \le i < j \le n\}$ と記述される．いま，Δ^+ 上の全順序 $\lhd_k$ $(k = 1, \dots, n)$ を
$$\underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}_{\langle y_{k-1}\varpi_1, -^\vee\rangle \neq 1} \lhd_k \underbrace{\alpha_{k,n} \lhd_k \alpha_{k,n-1} \lhd_k \cdots \lhd_k \alpha_{k,k}}_{\langle y_{k-1}\varpi_1, -^\vee\rangle = 1}$$
となるような reflection order として定める．ここで，Δ^+ 上の全順序 $\lhd$ は，次の条件 (RO) を満たすとき **reflection order** であるという：

(RO) 各 $\alpha, \beta \in \Delta^+$ に対し，$\alpha + \beta \in \Delta^+$ ならば $\alpha \lhd \alpha + \beta \lhd \beta$ または $\beta \lhd \alpha + \beta \lhd \alpha$ のいずれかが成り立つ．

そして，$w \in W$ および $k = 1, \dots, n$ に対し，集合 $\mathbf{DP}_w^{\lhd_k}$ を $\mathrm{QBG}(W)$ における次の形のパス $\mathbf{p}$ 全体からなる集合として定義する：
$$\mathbf{p} : w = w_0 \xrightarrow{\alpha_{k,j_1}} w_1 \xrightarrow{\alpha_{k,j_2}} \cdots \xrightarrow{\alpha_{k,j_r}} w_r, \quad n \ge j_1 \ge \cdots \ge j_r \ge k.$$

以下，$x, y \in W$ を固定し，整数 $m = m(x, y)$ を $x^{-1}y\varpi_1 = y_m\varpi_1$ が成り立つようにとる．$k = 0, \dots, m$ に対し，集合 $\mathbf{S}_k$ を $\mathrm{QBG}(W)$ における次の形のパス全体からなる集合として定義する：

$$\mathbf{p} : x = x_0 \xrightarrow{\alpha_{i_1+1, i_0}} x_1 \xrightarrow{\alpha_{i_2+1, i_1}} \cdots \xrightarrow{\alpha_{i_p+1, i_{p-1}}} x_p, \quad m = i_0 > i_1 > \cdots > i_p = k.$$

すると，上記の形の $\mathbf{p}$ は減少列 $(i_0, \dots, i_p)$ と同一視できる．この同一視により，$\mathbf{S}_k$ は辞書式順序による全順序集合とみなせる．そこで，$\mathbf{S}_k$ の辞書式順序による最小元 $\min(\mathbf{S}_k)$ をとり，そのパスとしての終点 $\mathrm{end}(\min(\mathbf{S}_k))$ を $v_k(x)$ と書く．

以上の準備をもとに，本研究の主結果である逆 Chevalley 公式の記述を述べる．

定理 4.1 (K.-Naito-Orr-Sagaki)**.** 全ての $0 \le k \le m$ に対して $\lambda + y_k\varpi_1 \in P^+$ であるような $\lambda \in P^+$ に対し，次の等式が成り立つ：

$$e^{y\varpi_1} \operatorname{gch} V_x^-(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} q^{\langle y_k\varpi_1, \mathrm{wt}(x \Rightarrow v_k(x)) \rangle} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbf{DP}_{v_k(x)}^{\lhd k+1}} (-1)^{\ell(\mathbf{p})} \operatorname{gch} V^-_{\mathrm{end}(\mathbf{p}) t_{\mathrm{wt}(x \Rightarrow v_k(x)) + \mathrm{wt}(\mathbf{p})}}(\lambda + y_k\varpi_1). \tag{2}$$

注意 4.2. 等式 (2) の右辺は有限和である．

系 3.4 より，以下が従う．

系 4.3 (K.-Naito-Orr-Sagaki)**.** 各 $x, y \in W$ に対し，次の等式が成り立つ：

$$e^{y\varpi_1} \cdot [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}] = \sum_{k=0}^{m} q^{\langle y_k\varpi_1, \mathrm{wt}(x \Rightarrow v_k(x)) \rangle} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbf{DP}_{v_k(x)}^{\lhd k+1}} (-1)^{\ell(\mathbf{p})} [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(\mathrm{end}(\mathbf{p}) t_{\mathrm{wt}(x \Rightarrow v_k(x)) + \mathrm{wt}(\mathbf{p})})} \otimes \mathcal{O}(-w_\circ y_k\varpi_1)].$$

謝辞

RIMS 共同研究「組合せ論的表現論の最近の進展」にて貴重な講演の機会を頂き，ありがとうございました．また，共同研究者である内藤聡氏，Daniel Orr 氏，佐垣大輔氏に感謝申し上げます．なお，本研究において筆者は JSPS 科研費 20J12058 の助成を受けています．

参考文献

[BFP] F. Brenti, S. Fomin, and A. Postnikov, Mixed Bruhat operators and Yang-Baxter equations for Weyl groups, Int. Math. Res. Not. **1999** (1999), 419–441.

[K1] M. Kashiwara, Crystal bases of modified quantized enveloping algebra, Duke Math. J. **73** (1994), no. 2, 383–413.

[K2] M. Kashiwara, Level zero fundamental representations over quantized affine algebras and Demazure modules, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005), 223–250.

[KNS] S. Kato, S. Naito, and D. Sagaki, Equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds and the Pieri-Chevalley formula, Duke Math. J. **169** (2020), no. 13, 2421–2500.

[LNS] C. Lenart, S. Naito, and D. Sagaki, A Chevalley formula for semi-infinite flag manifolds and quantum K-theory, arXiv:2010.06143.

[NOS] S. Naito, D. Orr, and D. Sagaki, Chevalley formula for anti-dominant weights in the equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds, arXiv:1808.01468.

[O] D. Orr, Equivariant K-theory of the semi-infinite flag manifold as a nil-DAHA module, arXiv:2001.03490.

[P] A. Postnikov, Quantum Bruhat graph and Schubert polynomials, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no. 3, 699–709.