# 円内接七・八角形の「面積 × 半径」公式の計算について

# Computing the “area times circumradius” formula for cyclic heptagons and octagons (Extended Abstract)

筑波大学 図書館情報メディア系　　森継 修一 *1
Shuichi Moritsugu
Faculty of Library, Information and Media Science
University of Tsukuba

**Abstract**

This paper describes computations of the relations between the circumradius $R$ and area $S$ of cyclic polygons given by the lengths of the sides. The classic results of Heron and Brahmagupta clearly show that the product of $R$ and $S$ is expressed by the lengths of the sides for triangles and cyclic quadrilaterals. In the author's previous paper (2015), the similar *integrated formulae* of the circumradius and the area for cyclic pentagons and hexagons were computed using elimination by resultants and factorization of polynomials. In this study, we try to compute analogous formulae for cyclic heptagons and octagons. However, we consider the method of numerical interpolation in this case, instead of elimination. As a result, we succeeded in computing the integrated formula for cyclic heptagons, where it should be a polynomial equation in $z = 4SR$ with degree 38 and 31,590 terms.

## 1 序

本研究では，ユークリッド幾何の古典的な問題である円内接多角形問題を扱う．すなわち，円に内接する $n$ 角形の各辺の長さを $a_1, a_2, \ldots, a_n$ としたとき，$n$ 角形の面積 $S$，外接円の半径 $R$，さらに $R$ と $S$ の関係を辺長 $a_i$ の式で表わせ，という問題である．本稿では，特に $n = 7$ の場合に $z = 4SR$ がみたすべき定義多項式 (以後，面積 × 半径公式あるいは統合公式とよぶ) の導出に焦点を当てる．これは，筆者の前論文 [6] において解明された，$n = 5, 6$ の場合に対する拡張になっている．

以下，第 2 節において $n = 3, 4$ の場合，第 3 節において $n = 5, 6$ の場合の結果を再掲し，第 4 節において $n = 7$ の場合の詳細と計算結果を示す．さらに第 5 節において，現時点での結論を示すとともに，$n = 8$ の場合への拡張に向けた課題を論じる．

全体としては進行中の研究であるため，本稿は Extended Abstaract の形でまとめ，補遺において，先行研究である Svrtan[9] による定式化に関する考察を記すこととした．本稿と同一の結果を示した正式な論文は他に見つからないが，Svrtan によるスライド資料 [9] には「$n = 7$ に対しては，$31,590$ 項をもつ $Z = (4SR)^2$ に関する多項式を得た」という結論のみが示されている．これを「$z = 4SR$ に関する多項式」の誤記とみれば，本研究の結果と項数は一致している．そこで用いられた消去計算の詳細は不明であるが，本稿の補遺において再現を試みることとする．

*1 〒 305-8550 つくば市春日 1-2　E-mail: moritsug@slis.tsukuba.ac.jp

## 2　古典的な結果 ($n = 3, 4$)

三辺の長さを $a_1, a_2, a_3$ とする三角形は常に外接円をもち，その面積と外接円の半径は次の式で与えられる (Heron の公式)．

$$\begin{cases} S &= \dfrac{\sqrt{(a_1+a_2+a_3)(-a_1+a_2+a_3)(a_1-a_2+a_3)(a_1+a_2-a_3)}}{4} \\ R &= \dfrac{a_1a_2a_3}{\sqrt{(a_1+a_2+a_3)(-a_1+a_2+a_3)(a_1-a_2+a_3)(a_1+a_2-a_3)}} \end{cases} \tag{1}$$

ここから，面積 $S$ と半径 $R$ の積に関して，次の関係式が得られる．

$$4SR = a_1a_2a_3 \tag{2}$$

ここでは，2 本のベクトル $\vec{OA}= [x_1, y_1]$，$\vec{OB}= [x_2, y_2]$ の間の三角形の面積を，行列式

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \tag{3}$$

で定義しているため，角度の向きに応じて，面積は「符号付き」であることに注意する．ここで，$z = 4SR$, $Z = (4SR)^2$ とおくと，式 (2) は $a_i^2$ に関する 3 次の基本対称式 $s_3 = a_1^2a_2^2a_3^2$, $\sqrt{s_3} = a_1a_2a_3$ を用いて

$$\begin{cases} |z| - \sqrt{s_3} &= 0 \\ Z - s_3 &= 0 \end{cases} \tag{4}$$

と書き換えられる．

次に，円内接四角形の面積および外接円半径に関する Brahmagupta の公式を結合すると

$$(4SR)^2 = (a_1a_2 + a_3a_4)(a_1a_3 + a_2a_4)(a_1a_4 + a_2a_3) \tag{5}$$

と表される．ここで，$a_i^2$ に関する 4 次の基本対称式 $s_1 = a_1^2 + \cdots + a_4^2$, $s_2 = a_1^2a_2^2 + \cdots$, $s_3 = a_1^2a_2^2a_3^2 + \cdots$, $\sqrt{s_4} = a_1a_2a_3a_4$ を用いると，次のような簡潔な表現が得られる．

$$Z = s_3 + s_1\sqrt{s_4} \tag{6}$$

なお，式 (5) は凸四角形の場合を表しているので，凸でない場合には，$a_4 := -a_4$ とおいた式が成り立つ．

$$(4SR)^2 = -(a_1a_2 - a_3a_4)(a_1a_3 - a_2a_4)(a_1a_4 - a_2a_3) \tag{7}$$

これを基本対称式表現に変換すると次のように表される．

$$Z = s_3 - s_1\sqrt{s_4} \tag{8}$$

さらに，$n$ が偶数の場合の補助的な表現 $\sqrt{s_n} = a_1 \cdots a_n$ の係数に *crossing parity* $\varepsilon$ [8][2] を導入し，$\varepsilon = 0$ (三角形), 1 (凸四角形), -1 (凸でない四角形) に対応させると，統一した表現が得られる．

**定理 1**
式 *(4) (6) (8)* をまとめて，$n = 3, 4$ の場合の面積 × 半径公式は，以下のような多項式で表現される．

$$\begin{cases} \varphi_3(z) &= |z| - \sqrt{s_3} \\ \psi_{3,4}(Z) &= Z - (s_3 + \varepsilon \cdot s_1\sqrt{s_4}) \end{cases} \tag{9}$$

このとき，$s_3^{(3)} = s_3^{(4)} |_{a_4=0}$ などの関係があるため，$\varepsilon = 0, \pm 1$ に対応させて記法は意図的に混用されている．以後，文脈上明らかな場合は，変数の個数 $n$ を省略して，$s_i^{(n)}$ を単に $s_i$ で表すことにする．

## 3 最新の結果 $(n = 5, 6)$

筆者の前論文 [6] において，$n = 5, 6$ の場合に対する面積 × 半径公式の導出を詳述した．まず，円内接五角形を三角形と四角形に対角線 $d$ で分割して，終結式計算で $d$ を消去することにより，次の結果を得た．

**定理 2**
円内接五角形の場合の $z = 4SR$ の定義多項式は，次の形である．

$$\begin{aligned} \varphi_5(z) \quad = \quad & |z|^7 - 2s_3|z|^5 - (s_1^2 + 4s_2)\sqrt{s_5}|z|^4 + (s_3^2 - s_1^2 s_4 - 14s_1 s_5)|z|^3 \\ & -(s_1^2 s_3 + 8s_1 s_4 - 4s_2 s_3 + 24s_5)\sqrt{s_5}|z|^2 \\ & -(s_1^2 s_2 - 4s_2^2 + 2s_1 s_3 + 16s_4)s_5|z| \\ & -(s_1^3 - 4s_1 s_2 + 8s_3)s_5\sqrt{s_5} \qquad \textit{(18 項)} \end{aligned} \tag{10}$$

式 (10) を $Z = z^2 = (4SR)^2$ の多項式に書き換えるため，方程式 $\varphi_5(z) = 0$ を偶数次の項と奇数次の項に振り分ける．

$$|z|\left(z^6 - 2s_3 z^4 + \cdots\right) \quad = \quad (s_1^2 + 4s_2)\sqrt{s_5}z^4 + \cdots + (s_1^3 - 4s_1 s_2 + 8s_3)s_5\sqrt{s_5} \tag{11}$$

両辺を 2 乗し，$z^2 = Z$ とおけば，次を得る．

**定理 3**
円内接五角形の場合の $Z = (4SR)^2$ の定義多項式は，次の形である．

$$\begin{aligned} \psi_5(Z) \quad = \quad & Z^7 - 4s_3 Z^6 + \left(-28s_1 s_5 - 2s_1^2 s_4 + 6s_3^2\right) Z^5 \\ & + \left((-s_1^4 - 10s_1^2 s_2 - 8s_2^2 + 52s_1 s_3 - 32s_4)s_5 + 4s_3(s_1^2 s_4 - s_3^2)\right) Z^4 \\ & + \left(4(37s_1^2 - 48s_2)s_5^2 + (-2s_1^4 s_3 + 12s_1^3 s_4 + 64s_3 s_4 + 4s_1^2 s_2 s_3 + 16s_2^2 s_3 \right. \\ & \qquad \left. -20s_1 s_3^2 - 64s_1 s_2 s_4)s_5 + (s_1^2 s_4 - s_3^2)^2\right) Z^3 \\ & + \left(-576s_5^3 + (64s_1 s_4 - 80s_1 s_2^2 + 28s_1^3 s_2 - 8s_1^2 s_3 + 128s_2 s_3 - 2s_1^5)s_5^2 \right. \\ & \qquad +(2s_1^4 s_2 s_4 - 12s_1^3 s_3 s_4 - 8s_1^2 s_2^2 s_4 - s_1^4 s_3^2 - 4s_1 s_3^3 - 32s_1^2 s_4^2 - 32s_3^2 s_4 \\ & \qquad \left. +64s_1 s_2 s_3 s_4 - 8s_2^2 s_3^2 + 6s_1^2 s_2 s_3^2)s_5\right) Z^2 \\ & + \left(-48(s_1^3 - 4s_1 s_2 + 8s_3)s_5^3 \right. \\ & \qquad (-8s_1^2 s_2^3 + 256s_4^2 + s_1^4 s_2^2 - 64s_1 s_3 s_4 - 128s_2^2 s_4 + 64s_2 s_3^2 + 16s_2^4 \\ & \qquad \left. +96s_1^2 s_2 s_4 - 12s_1^2 s_3^2 - 48s_1 s_2^2 s_3 - 2s_1^5 s_3 - 16s_1^4 s_4 + 20s_1^3 s_2 s_3)s_5^2\right) Z \\ & -s_5^3(s_1^3 - 4s_1 s_2 + 8s_3)^2 \qquad \textit{(63 項)} \end{aligned} \tag{12}$$

次に，円内接六角形の場合は，対角線 $d$ で 2 つの四角形に分割する．終結式による消去と多項式の因数分解により，以下を得た．

**定理 4**
円内接六角形 (凸なものを含むグループ) に対する $Z = (4SR)^2$ の定義多項式は以下である．

$$\begin{aligned} \psi_6^{(+)}(Z) \quad = \quad & Z^7 - (4s_3 + 28\sqrt{s_6})Z^6 + (\cdots)Z^5 + \cdots + (\cdots)Z \\ & -(s_1^3 - 4s_1 s_2 + 8s_3 - 16\sqrt{s_6})^2 \\ & \quad \times(s_5^3 - 4\sqrt{s_6}^5 + (s_1^3 - 4s_1 s_2 + 4s_3)\sqrt{s_6}^4 \\ & \qquad +(-s_1^2 s_4 + 2s_1 s_5 + 4s_2 s_4 - s_3^2)\sqrt{s_6}^3 + (s_1 s_3 s_5 - 4s_4 s_5)\sqrt{s_6}^2 \\ & \qquad -s_2 s_5^2\sqrt{s_6}) \qquad \textit{(327 項)} \end{aligned} \tag{13}$$

**系 5**
$\psi_6^{(+)}(Z)$ において $\sqrt{s_6}$ を $-\sqrt{s_6}$ で置き換えれば，凸六角形を含まないグループに対する公式 $\psi_6^{(-)}(Z)$ が得られる．

**系 6**
$\psi_6^{(+)}(Z)$ および $\psi_6^{(-)}(Z)$ において，$\sqrt{s_6}$ に *0* を代入すれば，式 *(12)* における $\psi_5(Z)$ を得る．したがって，これら *3* つの多項式は，*crossing parity* $\varepsilon$ により，統一的に表現される．

**定理 7**
結論として，式 *(10) (12) (13)* は以下の多項式にまとめられる．

$$\begin{cases} \varphi_5(z) &=& |z|^7 - 2s_3|z|^5 - (s_1^2+4s_2)\sqrt{s_5}|z|^4 + \cdots & (18\text{ 項}) \\ \psi_{5,6}(Z) &=& Z^7 - (4s_3 + 28\varepsilon\sqrt{s_6})Z^6 + \cdots & (327\text{ 項}) \end{cases} \tag{14}$$

ただし，$\varepsilon = 0$ は五角形の場合，$\varepsilon = 1$ は凸六角形を含むグループ，$\varepsilon = -1$ は凸な場合を含まないグループに対応している．

Robbins [8] が五角形の面積公式を発見 (1994) して以来，面積公式および半径公式については，多くの研究 [1][2] [3] [4] [5] [7] [10] がある．しかしながら，面積 $S$ と半径 $R$ の関係について論じた研究は少なく，Svrtan[10] に一部言及がある他は，筆者によるもの [6] が唯一である．

したがって，本研究の目的は，式 (14) に相当する面積 $\times$ 半径公式 (統合公式) を $n = 7, 8$ の場合に求めることである．これまでの研究で求められた円内接七角形・八角形に対する面積公式および外接円半径公式と同様に，統合公式は $z = 4SR$ および $Z = (4SR)^2$ に関する 38 次式になることが類推される．本研究の結果，円内接七角形に関しては，面積 $\times$ 半径公式を明示的に計算することに成功したので，以下に報告する．

# 4 円内接七角形に対する主要な結果と導出過程

次の定理が本稿の主要な結果であり，以下の各節で導出過程を示す．

**定理 8**
円内接七角形の面積 $S$ と外接円半径 $R$ の積に関して，$z = 4SR$ および $Z = z^2 = (4SR)^2$ の定義多項式は以下のように表される．

$$\begin{cases} \varphi_7(z) &=& |z|^{38} - 8s_3|z|^{36} + \cdots + B_1 z + B_0 & (31,590\text{ 項}) \\ \psi_7(Z) &=& Z^{38} - 16s_3 Z^{37} + \cdots + C_1 Z + C_0 & (973,558\text{ 項}) \end{cases} \tag{15}$$

ここで，$s_i$ は $a_i^2$ に関する *7* 次の基本対称式

$$s_1 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_7^2,\ \ldots,\ s_7 = a_1^2 a_2^2 \cdots a_7^2,\ (\sqrt{s_7} = a_1 a_2 \cdots a_7) \tag{16}$$

であり，各係数はこれらの多項式 $B_j \in \mathbf{Z}[s_1, \ldots, s_6, \sqrt{s_7}]$)，$C_j \in \mathbf{Z}[s_1, \ldots, s_6, s_7]$) である．

## 4.1 計算済みの面積公式・外接円半径公式 ($n = 7, 8$)

Maley et al. [2] の結果から終結式を具体的に展開すると，$x = (4S)^2$ に関する面積公式の多項式表現が以下の形で得られる．

$$\begin{cases} G_7(x) &=& x^{38} + M'_{37}x^{37} + \cdots + M'_0 & (955{,}641\text{ 項}) \\ G_8(x) &=& x^{38} + M_{37}x^{37} + \cdots + M_0 & (3{,}248{,}266\text{ 項}) \\ && (M_i \in \mathbf{Z}[s_1, \ldots, s_7, \varepsilon\sqrt{s_8}],\ M'_i = M_i|_{\varepsilon=0}) \end{cases} \tag{17}$$

また，筆者の論文 [4][5] で詳述したように，外接円半径公式は，$y=R^2$ に関する次の多項式である．

$$\left\{\begin{array}{lcll} F_7(y) & = & P'_{38}y^{38}+\cdots+P'_1y+P'_0 & (199{,}695\ \text{項}) \\ F_8(y) & = & P_{38}y^{38}+\cdots+P_1y+P_0 & (845{,}027\ \text{項}) \\ & & \multicolumn{2}{r}{(P_i\in\mathbf{Z}[s_1,\ldots,s_7,\varepsilon\sqrt{s_8}],\ P'_i=P_i|_{\varepsilon=0})} \end{array}\right. \tag{18}$$

面積と半径の積 $Z=xy=(4SR)^2$ を考える場合であっても，これらを直接結びつけることはできない．単純な終結式計算では，$(38\times 38=)$ 1444 次式が得られ，それを因数分解して真の因子である 38 次式を取り出す必要があるが，いずれも実行困難である．

なお以下の議論では，$n=3,4,5,6$ に対する統合公式 (9)(14) に加え，面積公式・半径公式

$$G_3(x),F_3(y),\ G_4(x),F_4(y),\ G_5(x),F_5(y),\ G_6(x),F_6(y) \tag{19}$$

も，計算済みであると仮定する．

### 4.2 多項式 $\psi_7(Z)$ における定数項 $C_0$

式 (17) (18) から，式 (15) における定数項 $C_0$ は，直接計算することができる．$x=(4S)^2$ と $y=R^2$ に対し，$Z=xy$ を根とする多項式においては，

$$\prod_{i=1}^{38}(x_iy_i)=\left(\prod x_i\right)\cdot\left(\prod y_i\right)=M'_0\cdot\frac{P'_0}{P'_{38}}=C_0 \tag{20}$$

が成り立ち，$M'_0$ は確かに $P'_{38}$ で整除されて多項式表現 $C_0\in\mathbf{Z}[s_1,\ldots,s_6,s_7])$ を得る．さらに，式 (15) において $B_0$ を求めるために，$C_0=(\pm B_0)^2$ と因数分解を行うが，符号の自由度が残る．この符号は，ランダムな素数を選んで $a_i:=p_i$ と代入した場合を比較して，決定することができる．

### 4.3 基本関係式の導出

円内接七角形 $\{a_1,\ldots,a_7\}$ を対角線 $d$ により三角形 $\{a_1,a_2,d\}$ と六角形 $\{d,a_3,\ldots,a_7\}$ とに分割し，それぞれの面積を $S_7,S_3,S_6$ で表す．半径公式に関する論文 [4] でも論じたように，凸六角形を含む場合のみ考えればよく，それぞれに半径公式を適用する．

$$\left\{\begin{array}{lcll} F_6^{(+)}(y) & = & A_7(a_3,\ldots,a_7,d)y^7+\cdots+A_0(a_3,\ldots,a_7,d) & (19{,}499\ \text{項}) \\ F_3(y) & = & (a_1^4+a_2^4+d^4-2a_1^2a_2^2-2a_1^2d^2-2a_2^2d^2)y+a_1^2a_2^2d^2 & \end{array}\right.$$

ここでは，半径 $y(=R^2)$ を終結式により消去して，対角線 $d$ の定義多項式を導く．

$$H(d):=\mathrm{Res}_y(F_6^{(+)},F_3)=\left(a_3^4a_4^4a_5^4a_6^4a_7^4\right)d^{38}+\cdots\qquad(357{,}520\ \text{項}) \tag{21}$$

一方，面積の関係から $S_7=S_3+S_6$ であり，$z=4S_7R$ とおけば，次が成り立っている．

$$4S_6R=4S_7R-4S_3R=z-a_1a_2d \tag{22}$$

さらに，六角形に対する統合公式は計算済みと仮定しているから，式 (13) を辺長 $a_i$ の表現に展開し，$Z_6=(4S_6R)^2$ とおけば，次を得る．

$$\Psi_6^{(+)}(a_3,\ldots,a_7,d,Z_6)=Z_6^7+\cdots\qquad(44{,}926\ \text{項}) \tag{23}$$

式 (22) を式 (23) に代入すれば，$z$ と $d$ に関する次の多項式を得る．

$$
\begin{aligned}
f^{(+)}(z,d) &= (z-a_1a_2d)^{14}+\cdots \\
&= z^{14}-(14a_1a_2d)\,z^{13}+\cdots \\
&= -\left(a_3^4a_4^4a_5^4a_6^4a_7^4\right)d^{22}+\cdots \qquad (145{,}234\ \text{項})
\end{aligned}
\tag{24}
$$

式 (21)(24) から対角線 $d$ を終結式により消去できれば，$z$ と $a_i$ の関係を表す多項式が得られるが，この実行は困難である．以下，辺長に相異なる素数を代入 ($a_i := p_i$) したときの多項式の構造を解析する．

終結式から得られる多項式は $z$ に関して $(14\times 38=)532$ 次，その結果は 3 つの多項式に因数分解され，各因子の次数は 38, 38, 456 である．

$$
\mathrm{Res}_d(H(d),f^{(+)}(z,d)) = u(a_i;z)\cdot v(a_i;z)\cdot w(a_i;z),
\tag{25}
$$

この中で，$a_i^2$ に関して対称式になっている 38 次因子 ($z^{37}$ の項を持たないもの) を取り出せば， それが真の因子である．

$$
u(a_i;z) = z^{38}+\triangledown z^{36}+\cdots
\tag{26}
$$

最後に，辺長表現 $\mathbf{Z}[a_1,\ldots,a_7]$ から基本対称式表現 $\mathbf{Z}[s_1,\ldots,s_6,\sqrt{s_7}]$) に変換したものが，求める $z$ の定義多項式 $\varphi_7^{(+)}(z)$ である．以上の計算を記号的に行うことは困難であるが，辺長に数値を代入したもとでの計算は可能であることから，素数の 7 つ組 $(a_1,\ldots,a_7)^{(j)}$ を多数代入して，それぞれの結果から未定係数を数値補間して求める方法を試すこととした．

## 4.4　各係数における全次数の分布

未定係数法を適用するためには，出現する単項式の次数を評価する必要がある．まず，$a_i^2$ からなる単項式の全次数を以下で定義する．

$$
\text{t-deg}\left(a_1^{2k_1}a_2^{2k_2}\cdots a_n^{2k_n}\right) := k_1+k_2+\cdots+k_n
\tag{27}
$$

基本対称式 $s_1=a_1^2+\cdots+a_n^2$, $s_2=a_1^2a_2^2+\cdots$ , ..., $s_n=a_1^2a_2^2\cdots a_n^2$ は，それぞれ $i$ 次 $(i=1,\ldots,n)$ で斉次であり，その全次数は

$$
\text{t-deg}\left(s_1^{k_1}s_2^{k_2}\cdots s_n^{k_n}\right) = k_1+2k_2+\cdots+nk_n
\tag{28}
$$

で表される．例外的に，$\sqrt{s_7}=a_1a_2\cdots a_7$ に対しては，$\text{t-deg}(\sqrt{s_7})=7/2=3.5$ で定義する．

面積公式・半径公式における各係数の次数の分布から類推すると，統合公式においても，$z^k, Z^k$ の各係数は同次な単項式のみからなり，その次数の分布は，主係数と定数項の間を規則的に埋めるものと仮定して，下の表のカッコ内の値のように推測される．

| 主変数の次数 | 38 | 37 | 36 | $\cdots$ | $\cdots$ | 2 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 面積 ($x=(4S)^2$) | 0 | 2 | 4 | $\cdots$ | $\cdots$ | 72 | 74 | 76 |
| 外接円半径 ($y=R^2$) | 32 | 33 | 34 | $\cdots$ | $\cdots$ | 68 | 69 | 70 |
| 面積 × 半径 ($z=4SR$) | 0 | (1.5) | (3.0) | $\cdots$ | $\cdots$ | (54.0) | (55.5) | 57.0 |
| 面積 × 半径 ($Z=(4SR)^2$) | 0 | (3) | (6) | $\cdots$ | $\cdots$ | (108) | (111) | 114 |

表 1: $n=7$ に対する各定義多項式における係数の次数の分布

### 4.5 単項式の探索と係数の決定

表 1 に示した $z = 4SR$ に対する係数それぞれの全次数 $d$ に対し，出現可能性のある単項式を以下の方法で探索し，数値補間によって各係数を決定する．

(1) $e_1 + 2e_2 + \cdots + 6e_6 + 3.5e_7 = d$ をみたす整数の 7 つ組 $(e_1, \ldots, e_6, e_7)$ をすべて拾い出し，その個数を $N$ とする．

(2) $N$ 個の単項式 $m_k(a_i) = s_1^{e_1^{(k)}} \cdots s_6^{e_6^{(k)}} \sqrt{s_7}^{e_7^{(k)}}$ $(k = 1, \ldots, N)$ を生成し，未定係数 $c_1, \ldots, c_N$ を用いて，$h(a_i) = c_1 m_1(a_i) + \cdots + c_N m_N(a_i)$ とおく．

(3) 相異なる 7 個の素数 $(p_1, \ldots, p_7)$ を選び，$h(a_i)$ に代入する．一方で，式 (25) にしたがい，素数代入の下での正しい因子 $u(p_i; z)$ を計算し，対応する係数 $t_d$ を取り出す．結果として，$c_1, \ldots, c_N$ を未知数とする一次方程式 $h(p_i) = t_d$ を得る．

(4) $N$ セットの素数の 7 個組を線形独立に選べれば，連立一次方程式 $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{t}$ が得られる．これを解けば，係数 $c_1, \ldots, c_N$ が求められる．

### 4.6 計算効率化のための工夫

前節で示した一連の処理手順を工夫し，特に連列一次方程式の解法の効率化を図った．

(1) $z^k$ $(k = 1, \ldots, 37)$ の係数の候補となる単項式の個数 $N_k$ を先にすべて求め，その最大が $N = 26,226$ ($z^2$ の係数) であることを得ておく．

(2) 「線形独立」な評価点を得るため，次のような素数の 7 個組を切り出し，対応する $z$ の定義多項式を 26,226 個生成した．式 (25) の終結式計算および因数分解には，全体で 50 日以上の CPU 時間 (約 3 分/組) が必要であるが，複数のジョブを並列に走らせることで実行時間は短縮が可能である．

$$(a_1, a_2, \ldots, a_7) = (101, 103, \ldots, 131),\ (103, 107, \ldots, 137),\ \ldots, \tag{29}$$

(3) 最大で 26,226 元の連立一次方程式 $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{t}$ を整数上で直接解くことは，サイズが小さい場合を除いて，ほとんど不可能である．そこで，これらを $\mathbf{Z}_p$ 上でまず解いて，解

$$\boldsymbol{c} = [\ldots, \star, 0, \star, \ldots, \star, 0, 0, \ldots]^T \pmod{p} \tag{30}$$

を求める．このとき，解ベクトル中で 0 となっている成分は，$\mathbf{Z}$ 上で解いた場合でも 0 となる確率が高いので，$\star$ で示した非零要素だけを抜き出す．$N = 26,226$ の場合，行列サイズは 664 まで縮小される．予期せぬ退化が起こっていないことは，$A \bmod p$ が正則であることにより確かめている．

(4) 最後に，行列サイズが縮小された $A'\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{t}'$ をそれぞれ $\mathbf{Z}$ 上で解き，再度 $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{t}$ に代入して確認する．この工夫により，連立一次方程式の解法にかかる CPU 時間は，総計で 4 日ほどに抑えられている．

## 5 結論と今後の課題

本研究では，円内接七角形に対する「面積 × 半径公式」を数値補間の方法で計算し，$z = 4SR$ の定義多項式 $\varphi_7(z)$ (31,590 項) を求めることに成功した．これを $Z = (4SR)^2$ の式に変換するには，奇数次の項と偶数次の項に振り分けて，

$$|z| \left(B_{35}|z|^{34} + \cdots + B_1\right) = |z|^{38} - s_3|z|^{36} + \cdots + B_0 \tag{31}$$

としたのち，両辺を自乗し $z^2 = Z$ とおけば，式 (15) における $\psi_7(Z)$ (973,558 項) が得られる．

次の目標は八角形の場合の公式 $\psi_8^{(\pm)}(Z)$ であり，これは $\psi_7(Z) = \psi_8^{(\pm)}(Z)|_{\varepsilon\sqrt{s_8}=0}$ をみたし， 七角形の場合を含んだものになる．未定係数法による数値補間を適用した結果，現在までに得られた係数は以下のようになっているが，カッコ内の項は現在の計算環境 (メモリ 256GB) では，ほぼ計算不可能とみられる．

$$\psi_8^{(+)}(Z) = Z^{38} - 16s_3Z^{37} + D_{36}Z^{36} + \cdots + D_{18}Z^{18} + \left(D_{17}Z^{17} + \cdots + D_1Z\right) + D_0 \tag{32}$$

実際に求まった範囲の最大値は，係数 $D_{18}$ で 77,131 項である．定数項 $D_0$ は式 (20) と同様の議論により 554,173 項であることが判明している．

計算が未完の部分では，行列サイズが $D_{17}$ に対する $125,054$ から $D_1$ に対する $4,116,544$ まで単調に増大する．したがって，これらの連立一次方程式の解法を必要とする数値補間の方法では，現在の環境を超えた問題となっていると考えられる．

## 謝　辞

本研究は科研費 (25330006) の助成を受けている．また，国際共同利用・共同研究拠点である京都大学数理解析研究所の助成を受けている．

## 参 考 文 献

[1] Fedorchuk, M. and Pak, I.: Rigidity and Polynomial Invariants of Convex Polytopes, *Duke Math. J.*, **129**(2), 2005, 371–404.

[2] Maley, F. M., Robbins, D. P., and Roskies, J.: On the Areas of Cyclic and Semicyclic Polygons, *Advances in Applied Mathematics*, **34**(4), 2005, 669–689.

[3] Moritsugu, S.: Computing Explicit Formulae for the Radius of Cyclic Hexagons and Heptagons, *Bulletin of Japan Soc. Symbolic and Algebraic Computation*, **18**(1), 2011, 3–9.

[4] Moritsugu, S.: Computation and Analysis of Explicit Formulae for the Circumradius of Cyclic Polygons, *Communications of JSSAC*, **3**, 2018, 1–17.

[5] Moritsugu, S.: Completing the Computation of the Explicit Formulae for the Circumradius of Cyclic Octagons, *Bulletin of JSSAC*, **25**(2), 2019, 2–11.

[6] Moritsugu, S.: Integrated Circumradius and Area Formulae for Cyclic Pentagons and Hexagons, *ADG 2014* (Botana, F. and Quaresma, P., eds.), *LNAI*, **9201**, Springer, 2015, 94–107.

[7] Pech, P.: Computations of the Area and Radius of Cyclic Polygons Given by the Lengths of Sides, *ADG 2004* (Hong, H. and Wang, D., eds.), *LNAI*, **3763**, Springer, 2006, 44–58.

[8] Robbins, D. P.: Areas of Polygons Inscribed in a Circle, *Discrete & Computational Geometry*, **12**(1), 1994, 223–236.

[9] Svrtan, D.: Intrinsic Geometry of Cyclic Heptagons / Octagons via new Brahmagupta's Formula, https://bib.irb.hr/datoteka/553883.main.pdf, 2010.

[10] Svrtan, D., Veljan, D., and Volenec, V.: Geometry of Pentagons: from Gauss to Robbins, arXiv:math.MG/0403503 v1, 2004.

# A　Svrtan[9] による定式化に関する考察

## A.1　新しい Brahmagupta の公式

Brahmagupta の面積公式

$$16S^2 = 2\left(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2\right) - a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 8abcd \tag{33}$$

において，右辺を $d$ の関数とみなして $G(d)$ で表し，$g(a,b,c;\,d) = G'(d)/4$ とおく．

$$g(a,b,c;\,d) = -d^3 + (a^2+b^2+c^2)d + 2abc \tag{34}$$

一方で，円内接六角形 $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$ を対角線 $d$ により 2 つの円内接四角形 $\{a_1,a_2,a_3,d\}$ と $\{a_4,a_5,a_6,d\}$ とに分割し，それぞれの面積を $S_1, S_2$ とおく．このとき，

$$\frac{S_2}{S_1} = -\frac{g(a_4,a_5,a_6;\,d)}{g(a_1,a_2,a_3;\,d)} \tag{35}$$

が成り立ち，式 (33) を用いて $S_2^2/S_1^2$ を表すより簡潔な表現が得られ，[9] における新規の結果であるとしている．式 (35) の導出には，初等幾何的な線分の長さの関係だけが用いられているが，なぜ導関数の形をしているかなどの解明はなされていない．なお，Brahmagupta の面積公式 (33) は $a=0$ を代入すれば三角形 $\{b,c,d\}$ の面積を表すため，式 (35) は円内接五角形を四角形＋三角形に分割した場合でも成立する．

## A.2　円内接七角形の分割への適用

面積 $S$ の円内接七角形 $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7\}$ を 2 本の対角線 $d_1, d_2$ により，

$$\text{四角形}\{a_1,a_2,a_3,d_1\} \ + \ \text{三角形}\{d_1,d_2,a_7\} \ + \ \text{四角形}\{a_4,a_5,a_6,d_2\} \tag{36}$$

と分割し，それぞれの面積を $S_1,S_2,S_3$ とおくと，$S = S_1+S_2+S_3$ である．また， これらの図形はひとつの外接円を共通にもつので，その半径を $R$ とおく．

このとき，式 (34) を用いて，面積比を

$$\frac{S_2}{S_1} = -\frac{g(a_7,d_2,0;\,d_1)}{g(a_1,a_2,a_3;\,d_1)} = -\frac{\alpha}{\beta} \qquad \frac{S_2}{S_3} = -\frac{g(a_7,d_1,0;\,d_2)}{g(a_4,a_5,a_6;\,d_2)} = -\frac{\gamma}{\delta} \tag{37}$$

と略記する．$S_1 = -\dfrac{\beta}{\alpha}S_2$ および $S_3 = -\dfrac{\delta}{\gamma}S_2$ を $S = S_1+S_2+S_3$ に代入すると

$$S = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)S_2 + S_2 + \left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)S_2 \tag{38}$$

両辺に $4R$ をかけて

$$4SR = \left(-\frac{\beta}{\alpha} + 1 - \frac{\delta}{\gamma}\right)4S_2R \tag{39}$$

ここで三角形に対する面積 × 半径公式 (2) より，$4S_2R = d_1d_2a_7$ に注意し，分母を払うと，$z = 4SR$ (七角形に対する面積 × 半径) に対し，

$$\alpha\gamma \cdot z = \left(-\beta\gamma + \alpha\gamma - \alpha\delta\right) d_1d_2a_7 \tag{40}$$

さらに $d_1 \mid \alpha$, $d_2 \mid \gamma$ を利用して，両辺を $d_1 d_2$ で割ると

$$\begin{aligned} \varphi(a_i, d_1, d_2, z) &= \left(a_7^4 - \left(d_1^2 - d_2^2\right)^2\right) \cdot z + (\beta\gamma - \alpha\gamma + \alpha\delta)\, a_7 \\ & \qquad\qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{Z}[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, d_1, d_2]) \end{aligned} \tag{41}$$

という形で，$z = 4SR$ の定義多項式が 1 次式 (展開すると 31 項) で表せる．Svrtan[9] 自体は,「円内接八角形の面積公式」の導出方法を議論しており，$S = S_1 + S_2 + S_3$ は 3 つの四角形への分割として立式しているが，七角形の場合は上記のような式で検討しているものとみられる．

### A.3 対角線 $d_1, d_2$ の消去の方法

$\varphi(a_i, d_1, d_2, z)$ から対角線 $d_1, d_2$ を消去するためには，$\mathbf{Z}[a_i, d_1, d_2]$ に属する独立な多項式が 2 つ必要である．これには，分割でできた 2 つの四角形と三角形に半径公式を適用した式を基本とする．

$$\begin{aligned} f_1(a_1, a_2, a_3, d_1, R) &= \left(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + d_1^4 + \cdots\right) R^2 + \left(a_1^2 a_2^2 a_3^2 + a_1^2 a_2^2 d_1^2 + a_1^2 a_3^2 d_1^2 + a_2^2 a_3^2 d_1^2 + \cdots\right) \\ f_2(a_7, d_1, d_2, R) &= \left(a_7^4 + d_1^4 + d_2^4 - 2a_7^2 d_1^2 - 2a_7^2 d_2^2 - 2d_1^2 d_2^2\right) R^2 + d_1^2 d_2^2 a_7^2 \\ f_3(a_4, a_5, a_6, d_2, R) &= \left(a_4^4 + a_5^4 + a_6^4 + d_2^4 + \cdots\right) R^2 + \left(a_4^2 a_5^2 a_6^2 + a_4^2 a_5^2 d_2^2 + a_4^2 a_6^2 d_2^2 + a_5^2 a_6^2 d_2^2 + \cdots\right) \end{aligned} \tag{42}$$

これらは外接円半径 $R^2$ が共通なので，終結式を計算して消去すると (以下の組合せによれば，終結式は余計な因子を含まず)，次の 2 式を得る．

$$\begin{aligned} h_1(a_1, \ldots, a_6, d_1, d_2) &:= \mathrm{Res}_{R^2}(f_1, f_3) \\ & \qquad (176\ \text{項}) \quad \deg_{d_1} h_1 = 4, \quad \deg_{d_2} h_1 = 4 \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} h_2(a_4, a_5, a_6, a_7, d_1, d_2) &:= \mathrm{Res}_{R^2}(f_2, f_3) \\ & \qquad (52\ \text{項}) \quad \deg_{d_1} h_2 = 4, \quad \deg_{d_2} h_2 = 7 \end{aligned} \tag{44}$$

そこで，$\{\varphi(a_i, d_1, d_2, z),\ h_1(a_i, d_1, d_2, ),\ h_2(a_i, d_1, d_2)\}$ を連立させて，グレブナー基底を計算して $d_1, d_2$ を消去すればよい，というのが Svrtan[9] の趣旨であるが，実際に計算しているとは考えにくい．相異なる素数を 7 個選んで $a_i := p_i$ を代入した下でグレブナー基底を計算してみると，零点の個数は 38 であり，イデアルとしては冗長な成分を含んでいない．しかしながら，係数に $a_i$ を含んだままでは，目的の多項式 $\tilde{\varphi}(z) \in \mathbf{Z}[a_1, \ldots, a_7; z]$ は 45,728,577 項 (約 1GB) あり，計算は容易ではない．さらに，それを基本対称式 $s_1, \ldots, s_6, \sqrt{s_7}$ の表現に変換すれば項数 31,590 の多項式が得られることになるが，そのためにはアルゴリズムと実装の工夫が必要 [4] である．

一方で，終結式によって，$d_1, d_2$ を順次消去する方法も実行困難と思われる．再び，相異なる素数を 7 個選んで $a_i := p_i$ を代入した下で解析してみると，式 (43)(44) より，$d_1, d_2$ について 4 次の項を含むため，最終結果は $z$ について $(38 \times 4 =)152$ 次式であり，それを因数分解すると 4 個の 38 次式の積となる．

$$\left(z^{38} + \bigtriangledown z^{36} + \cdots\right)\left(\triangle z^{38} + \triangle z^{37} + \cdots\right)\left(\triangle z^{38} + \triangle z^{37} + \cdots\right)\left(\triangle z^{38} + \triangle z^{37} + \cdots\right) \tag{45}$$

これらのうちのひとつ (主係数が 1，かつ，$z^{37}$ の項をもたないもの) が正しい因子 (45,728,577 項) となる．係数に $a_i$ を含んだ記号的計算では，終結式の計算自体が困難であり，その因数分解もなお現実的ではないため，Svrtan[9] が項数 31,590 の多項式をどのように得たのか，これ以上の解析は困難である．

したがって，すでに計算されたことのある結果であっても，数値補間による未定係数法の有効性を解明できたことが，先行研究と比較した場合の本研究の意義であると考えられる．