単純ホップ分岐判定法の実装

Implementation of criteria for simple Hopf bifurcations

九州大学　深作亮也 *1
Ryoya Fukasaku
Kyushu University

新潟大学　田島慎一 *2
Shinichi Tajima
Niigata University

ホップ分岐とは, パラメータに依存するような常微分方程式系の停留点において, 発生するもしくは消滅する, 安定もしくは不安定である, リミットサイクルに関連した局所的な分岐である. 例えば, [8, §4.3 例 1] で考察されている, 単一のパラメータ $a \in \mathbb{R}$ に依存する, 次のような常微分方程式系を考えることにする:

$$\dot{x} = ax - y - x^3 - xy^2, \qquad \dot{y} = x + ay - x^2y - y^3.$$

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $(x, y) = (0, 0)$ がその系の停留点であることに注意し, 初期値として $(x(0), y(0)) \neq (0, 0)$ を考え, 更に $r^2 = x^2 + y^2$, $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ とする. このとき $r > 0$ に対して極座標で常微分方程式系

$$\dot{r} = r(a - r^2), \qquad \dot{\theta} = 1$$

が $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$, $r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x}$ から得られる. 初期値 $(r(0), \theta(0)) = (r_0, 0)$ に対して $d\theta/dt = 1$ から解 $\theta(t) = t$ を得る. ここで, 解 $r(t)$ の振る舞いについて考察するため, パラメータ $a \in \mathbb{R}$ を場合分けする.

- $a \leq 0$ の場合: 任意の $r_0 > 0$ に対し $dr/dt(r_0) = r_0(a - r_0^2) < 0$ なので, t が無限大に近づくと $r(t)$ は 0 に収束する. つまり, 解 $(x(t), y(t))$ は反時計回りの軌道を描きながら停留点 $(0, 0)$ に収束する.
- $a > 0$ の場合: $dr/dt(r_0)$ は, $0 < r_0 < \sqrt{a}$ ならば 0 より大きく, $r_0 = \sqrt{a}$ ならば 0 に等しく, $r_0 > \sqrt{a}$ ならば 0 よりも小さい. 初期値 $r_0 = \sqrt{a}$ に対する解は $dr/dt(r_0) = 0$ から $r(t) = \sqrt{a}$ なので, 初期値 $(x(0), y(0)) = (\sqrt{a}, 0)$ の解は周期軌道 $(x(t), y(t)) = (\sqrt{a}\cos(t), \sqrt{a}\sin(t))$ である. 一方, 初期値 $r_0 < \sqrt{a}$ もしくは $r_0 > \sqrt{a}$ に対して解の一意性から t が無限大に近づくと $r(t)$ は $\sqrt{a}$ に収束する. 従って, $(x(t), y(t)) = (\sqrt{a}\cos(t), \sqrt{a}\sin(t))$ は安定な極限集合, 即ち安定なリミットサイクルである.

こうした安定な (もしくは不安定な) リミットサイクルの発生 (もしくは消滅) がホップ分岐と呼ばれる.

ホップ分岐は [5] で詳細に扱われている. また, [2] でもホップ分岐に関する計算が詳細に扱われているが, こうした計算は実数上での線形変換や中心多様体への簡約化 (もしくは中心多様体における正規形) を必要とする. [3] ではそうした変換や簡約化を伴わない, 単純ホップ分岐を特徴付けるための判定法を Kruff と Walcher が提案した. 本項ではこの手法を Kruff-Walcher 判定法と呼ぶ. 我々は Kruff-Walcher 判定法の一部を数式処理システム SageMath に実装した. 本稿では, [3, 定理 3.2] からホップ分岐に関する基本定理を与え, Kruff-Walcher 判定法を紹介したのちに, 我々の実装の利用方法を説明する.

*1 〒 819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744　E-mail: fukasaku@math.kyushu-u.ac.jp
*2 〒 950-2102 新潟県新潟市西区五十嵐 2 の町 8050　E-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

1 ホップ分岐

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^\ell$ とし, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$ を C^4 級ベクトル場として, パラメータ $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^\ell$ に依存する常微分方程式系

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \tag{1}$$

を考える．また, 本稿では $\boldsymbol{0}$ で零ベクトルを表す．そして, $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき, $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ に対し, $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}^*)$ によって下の行列で与えられる線型変換を表す:

$$D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}^*) \end{pmatrix},$$

つまり $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}^*)$ はベクトル場 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$ の $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$ における線型近似である．ここで, ホップ点を定義する．

定義 1
下の性質たちを満たすような曲線 $\mathfrak{C} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\ell \ ; \ \varepsilon \mapsto \mathfrak{C}(\varepsilon) = (\mathfrak{C}_{\boldsymbol{a}}(\varepsilon), \mathfrak{C}_{\boldsymbol{x}}(\varepsilon))$ が存在するとき, $(\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{x}^*) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^n$ はパラメータ $\boldsymbol{a}$ に依存する常微分方程式系 *(1)* の**ホップ点**と呼ばれる*:*

- $\mathfrak{C}(0) = (\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{x}^*)$ かつ $\boldsymbol{f}(\mathfrak{C}_{\boldsymbol{a}}(\varepsilon), \mathfrak{C}_{\boldsymbol{x}}(\varepsilon)) = \boldsymbol{0}$ が満たされる,
- $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\mathfrak{C}_{\boldsymbol{a}}(\varepsilon), \mathfrak{C}_{\boldsymbol{x}}(\varepsilon))$ が以下の性質を満たすような重複度 *1* の複素共役固有値組 $\alpha(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$ を持つ*:*

$$\alpha(0) = 0, \qquad \frac{d\alpha}{d\varepsilon}(0) \neq 0, \qquad \beta(0) \neq 0,$$

  ただし $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ である,
- 複素共役固有値組 $\pm\beta(0)i$ を除いた, 線型変換 $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{x}^*)$ の全ての固有値は負の実部を持つ．

上のように与えられる曲線 $\mathfrak{C}$ をホップ点 $(\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{x}^*)$ の**関連曲線**と呼ぶ．

注意 1
$(\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{x}^*) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^n$ が *(1)* のホップ点と仮定して, さらに $\mathfrak{C}(\varepsilon) = (\mathfrak{C}_{\boldsymbol{a}}(\varepsilon), \mathfrak{C}_{\boldsymbol{x}}(\varepsilon)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^n$ をその関連曲線とする．$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} - \mathfrak{C}_{\boldsymbol{x}}(\varepsilon)$ によって変数変換することで, ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{X} + \mathfrak{C}_{\boldsymbol{x}}(\varepsilon))$ を考える．このとき, $\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n$ は次の単一パラメータ ε 依存常微分方程式系の任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対する停留点である*:*

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\mathfrak{C}_{\boldsymbol{a}}(\varepsilon), \boldsymbol{X}),$$

つまり任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して $\boldsymbol{F}(\mathfrak{C}_{\boldsymbol{a}}(\varepsilon), \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ なので, ホップ点として $(\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{0})$ を持つような *(1)* を扱うことは一般性を失わない．また, $\mathfrak{C}_{\boldsymbol{a}}$ は曲線であるので, 次の表現を与えるような $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \in \mathbb{R}^\ell$ が存在する*:*

$$\mathfrak{C}_{\boldsymbol{a}}(\varepsilon) = \boldsymbol{a}^* + \sum_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{a}_j \varepsilon^j.$$

注意 1 から次の曲線 $\mathfrak{C}$ が与えられ, 任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して $\boldsymbol{f}(\mathfrak{C}_{\boldsymbol{a}}(\varepsilon), \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ が満たされると仮定する:

$$\mathfrak{C}(\varepsilon) = (\mathfrak{C}_{\boldsymbol{a}}(\varepsilon), \boldsymbol{0}) = \left(\boldsymbol{a}^* + \sum_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{a}_j \varepsilon^j, \boldsymbol{0} \right),$$

ただし $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \in \mathbb{R}^\ell$．また, $\boldsymbol{g}(\varepsilon, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}^* + \sum_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{a}_j \varepsilon^j, \boldsymbol{x})$ として, 次の常微分方程式系を考える:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{g}(\varepsilon, \boldsymbol{x}). \tag{2}$$

原点 $\mathbf{0}$ が任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して (2) の停留点である, つまり $\boldsymbol{g}(\varepsilon, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ が満たされることに注意する．ここで常微分方程式系 (2) はホップ点 $(0, \mathbf{0}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ を持つとする．このとき $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ での線形近似 $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{g}(\varepsilon, \mathbf{0})$ が

$$D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{g}(\varepsilon, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \alpha(\varepsilon) & -\beta(\varepsilon) & \mathbf{0} \\ \beta(\varepsilon) & \alpha(\varepsilon) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & S(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

の形を持つような, 滑らかなパラメータ ε 依存の線形変換が存在する, ただし $S(0)$ の全ての固有値の実部は負である (証明は [2, 命題 8.22] や [5, § 3：ステップ 1] を参照せよ)．さらに, 中心多様体定理によって

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{h}(\varepsilon, \boldsymbol{u}) \tag{3}$$

のような平面上の常微分方程式系に (2) を簡約できる, ただし $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ で, $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ での線形近似は

$$D_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{h}(\varepsilon, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \alpha(\varepsilon) & -\beta(\varepsilon) \\ \beta(\varepsilon) & \alpha(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

を満たし, $\boldsymbol{h}(\varepsilon, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ を満たす．さらに, 単一パラメータ ε を新たな変数とみなしたとき, [3, (3)] のように

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= 0 \\ \dot{u_1} &= -\beta(0)u_2 + \varepsilon(Au_1 - Bu_2) + (u_1^2 + u_2^2)(Qu_1 - Px_2) + \varepsilon^2(Cu_1 - Du_2) \\ \dot{u_2} &= \beta(0)u_1 + \varepsilon(Au_2 + Bu_1) + (u_1^2 + u_2^2)(Qu_2 + Px_1) + \varepsilon^2(Cu_2 + Du_1) \end{aligned} \tag{4}$$

のような表現で, テイラー展開の 3 次の項までの, (3) に対する中心多様体における正規系が得られる．そして, $v = u_1^2 + u_2^2$ とする．このとき, 常微分方程式形 (4) は次のような平面上の常微分方程式系に変換される:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= 0 \\ \dot{v} &= 2(A + C\varepsilon)\varepsilon v + 2Qv \end{aligned} \tag{5}$$

こうして得られた (4) と (5) は [3, 補題 3.3] のように停留点とリミットサイクルに関する次の性質を持つ．

補題 2
$A \neq 0$ かつ $Q \neq 0$ を仮定する．このとき, 常微分方程式系 (4) と (5) の解軌道は次のように振る舞う:

- *A と $A + C\varepsilon$ の符号が同じであるような十分小さい $|\varepsilon|$ を持つ $\varepsilon > 0$ が与えられた場合を考える:*
  - *$A > 0$ ならば常微分方程式系 (5) の停留点 $v = 0$ は不安定であり, さらに*
    - *$Q > 0$ ならば $v > 0$ において更なる停留点は存在しない,*
    - *$Q < 0$ ならば $v > 0$ において唯一つの安定な停留点が $v = -(A + C\varepsilon)\varepsilon/Q$ で存在して, その停留点が常微分方程式系 (4) に対して唯一つの安定なリミットサイクルを引き起こす.*
  - *$A < 0$ ならば常微分方程式系 (5) の停留点 $v = 0$ は安定であり, さらに*
    - *$Q < 0$ ならば $v > 0$ において更なる停留点は存在しない,*
    - *$Q > 0$ ならば $v > 0$ において唯一つの不安定な停留点が $v = -(A + C\varepsilon)\varepsilon/Q$ で存在し, その停留点が常微分方程式系 (4) に対して唯一つの不安定なリミットサイクルを引き起こす.*
- *A と $A + C\varepsilon$ の符号が同じであるような十分小さい $|\varepsilon|$ を持つ $\varepsilon < 0$ が与えられた場合を考える:*
  - *$A > 0$ ならば常微分方程式系 (5) の停留点 $v = 0$ は安定であり, さらに*

* $Q < 0$ ならば $v > 0$ において更なる停留点は存在しない,
* $Q > 0$ ならば $v > 0$ において唯一つの不安定な停留点が $v = -(A + C\varepsilon)\varepsilon/Q$ で存在し, その停留点が常微分方程式系 *(4)* に対して唯一つの不安定なリミットサイクルを引き起こす.

– $A < 0$ ならば常微分方程式系 *(5)* の停留点 $v = 0$ は不安定であり, さらに

* $Q > 0$ ならば $v > 0$ において更なる停留点は存在しない,
* $Q < 0$ ならば $v > 0$ において唯一つの安定な停留点が $v = -(A + C\varepsilon)\varepsilon/Q$ で存在し, その停留点が常微分方程式系 *(4)* に対して唯一つの安定なリミットサイクルを引き起こす.

ホップ分岐に関する基本定理を [3, 定理 3.2] から与える.

定理 3 (基本定理)

(4) を, パラメータ ε に依存する常微分方程式形 *(2)* に対する, 中心多様体における 3 次の項までの正規形とする. $A \neq 0$ かつ $Q \neq 0$ を仮定する. このとき, 十分小さな $|\varepsilon|$ を持つ ε に対して, 補題 *2* における *(4)* の停留点とリミットサイクルに関する主張が, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ の近傍で *(2)* に対しても満たされる. こうした停留点とリミットサイクルに関する振る舞いの分岐が**単純ホップ分岐**と呼ばれる.

本節ではホップ分岐に関する基本定理を実数上の線形変換や中心多様体における正規形を利用することでで与えた. 次節では, そうした変換や正規形を利用せず, 座標系にも依存しないような次の手法を紹介する:

- [4] で Liu によって提案された, ホップ点を特徴付ける Liu 判定法,
- [3] で Kruff と Walcher によって提案された, 単純ホップ分岐を特徴付ける Kruff-Walcher 判定法.

そして, 簡単な例を通してこれらに関する計算方法を説明する.

注意 2

- *[3]* では, 中心多様体における正規形の計算なしで, *(4)* における A, Q を計算するための方法が提案された. 補題 *2* のように, リミットサイクルの半径を計算するには *(4)* における C が必要であるが, *[3]* ではその計算方法は与えられていない. また, 本稿では A に関する計算は扱わず, Q に関する計算手法を *Kruff-Walcher* 判定法として紹介する *(*Q は**リアプノフ数**と呼ばれる*)*.
- *[6]* では, 中心多様体における正規形を計算する, 座標系に依存しないような手法が提案された. その手法を用いることで単純ホップ分岐を特徴付けることもできる. その手法はリーブラケットを利用するが, リーブラケットから与えられる行列の次元は大きくなりやすい. 一方で, *Kruff-Walcher* 手法はリー微分を利用する. リー微分から与えられる行列の次元はリーブラケットから与えられる行列の次元よりも小さいので, *Kruff-Walcher* 手法は中心多様体における正規形を計算するよりも効率的にホップ分岐を特徴付けることができる.

2 座標系に依存しないホップ分岐の判定法

2.1 Liu 判定法

前節同様, (1) と (2) は次を満たす, つまり $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ が任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ に対して停留点である, と仮定する:

$$\varepsilon \in \mathbb{R} \quad \left(\boldsymbol{f}(\mathfrak{C}_{\boldsymbol{a}}(\varepsilon), \mathbf{0}) = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{a}^* + \sum_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{a}_j \varepsilon^j, \mathbf{0} \right) = \boldsymbol{g}(\varepsilon, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \right).$$

そして, $B(\varepsilon)$ を $\boldsymbol{g}(\varepsilon,\boldsymbol{x})$ の原点 $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^n$ における線形近似 $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{g}(\varepsilon,\mathbf{0})$ として, 線形近似 $B(\varepsilon)$ の固有多項式が

$$\chi(\varepsilon,\sigma)=\det(\sigma I_n-B(\varepsilon))=c_n(\varepsilon)\sigma^n+\cdots+c_1(\varepsilon)\sigma+c_0(\varepsilon).$$

の形によって与えられていると仮定する．さらに, j 次**フルビッツ行列** R_j を次のような形によって定義する:

$$\begin{aligned}
R_1(\varepsilon) &= \begin{pmatrix} c_1(\varepsilon) \end{pmatrix},\\
R_1(\varepsilon) &= \begin{pmatrix} c_1(\varepsilon) & c_0(\varepsilon)\\ c_3(\varepsilon) & c_2(\varepsilon)\end{pmatrix},\\
&\vdots\\
R_n(\varepsilon) &= \begin{pmatrix} c_1(\varepsilon) & c_0(\varepsilon) & \cdots & c_{-(n-2)}(\varepsilon)\\ c_3(\varepsilon) & c_2(\varepsilon) & \cdots & c_{-(n-4)}(\varepsilon)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{2n-1}(\varepsilon) & c_{2n-2}(\varepsilon) & \cdots & c_n(\varepsilon)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ただし $c_n(\varepsilon)=1$ で, $j<0,\ j>n$ に対し $c_j(\varepsilon)=0$ である．$H_j(\varepsilon)$ をフルビッツ行列 $R_j(\varepsilon)$ の行列式とする．

定理 4 (Liu 判定法)
次の二つの条件は等価である:

- *線形変換* $B(\varepsilon)$ *が次の二つの性質を満たす:*
  - $B(\varepsilon)$ *が次を満たす重複度 1 の複素共役固有値* $\alpha(\varepsilon)\pm i\beta(\varepsilon)$ *を持つ, ただし* $\alpha,\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *である:*

$$\alpha(0)=0,\qquad \frac{d\alpha}{d\varepsilon}(0)\neq 0,\qquad \beta(0)\neq 0,$$

  - *複素共役固有値* $\pm\beta(0)i$ *を除いた,* $B(0)$ *の全ての固有値は負の実部を持つ.*
- $H_{n-1}(0)=0\wedge c_0(0)>0\wedge\bigwedge_{j=1}^{n-2}H_j(0)>0\wedge\frac{dH_{n-1}}{d\varepsilon}(0)\neq 0$ *が満たされる.*

本節の仮定から $\boldsymbol{f}(\mathfrak{C}_{\boldsymbol{a}}(\varepsilon),\mathbf{0})=\mathbf{0}$ が満たされる．そして, 曲線を $\mathfrak{C}(\varepsilon)=(\mathfrak{C}_{\boldsymbol{a}}(\varepsilon),\mathbf{0})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}^*+\sum_{j=1}^{\infty}\boldsymbol{a}_j\varepsilon^j,\mathbf{0})$ で与えているが, $H_{n-1}(0),c_0(0),H_1(0),H_{n-2}(0),[dH_{n-1}/d\varepsilon](0)$ は $\boldsymbol{a}^*,\boldsymbol{a}_1$ のみから構成される．従って, Liu 判定法から次の系を与えることができる．

系 5

$$H_{n-1}(0)=0\wedge c_0(0)>0\wedge\bigwedge_{j=1}^{n-2}H_j(0)>0\wedge\frac{dH_{n-1}}{d\varepsilon}(0)\neq 0$$

を満たす $\boldsymbol{a}_1\in\mathbb{R}^\ell$ *が存在するとき, パラメータ* $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^\ell$ *依存の系 (1) がホップ点* $(\boldsymbol{a}^*,\mathbf{0})\in\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^n$ *を持つ.*

上の系の通り, 曲線として $\mathfrak{C}(\varepsilon)=(\mathfrak{C}_{\boldsymbol{a}}(\varepsilon),\mathbf{0})=(\boldsymbol{a}^*+\boldsymbol{a}_1\varepsilon,\mathbf{0})$ を考えれば十分であることに注意する．

2.2 Kruff-Walcher 判定法

$(\boldsymbol{a}^*,\mathbf{0})$ をパラメータ $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^\ell$ 依存の常微分方程式系 (1) のホップ点と仮定する．$A^*=D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}^*,\mathbf{0})$ とし, $\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}^*,\boldsymbol{x})$ とする．さらに $\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ におけるテイラー展開によって次の形を持つとする:

$$\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x})=A^*\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_2^*(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}_3^*(\boldsymbol{x})+O(4)$$

ただし $\boldsymbol{f}_2^* \in \mathcal{H}_2$ であり, $\boldsymbol{f}_3^* \in \mathcal{H}_3$ であり, $O(4)$ はランダウ記号 $O(x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n} : d_1 + \cdots + d_n \geq 4,\ d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ を意味する. 前節のようなリアプノフ数 Q を計算するための Kruff-Walcher 判定法を与える.

定理 6 (Kruff-Walcher 判定法)
リー微分 $\mathcal{L}_{A^*}$ は $\mathcal{H}_3$ 上で正則であり, さらに $\mathcal{H}_2$ 上と $\mathcal{H}_4$ 上では一次元の核を持つ. $\mathcal{L}_{A^*}|_{\mathcal{H}_2}$ の核は階数 *2* の半正定値二次形式 ϕ_2 で張られて, $\mathcal{L}_{A^*}|_{\mathcal{H}_4}$ の核は ϕ_2^2 によって張られる. さらに多項式 $\phi = \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$ が

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{f}^*}\phi = Q\phi_2^2 + O(5).$$

を満たすような $\phi_3 \in \mathcal{H}_3$ と $\phi_4 \in \mathcal{H}_4$ が存在する. そして, この関係性は線型空間 $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ 及び $\mathcal{H}_4$ において

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{A^*}\phi_2 &= 0 && \in \mathcal{H}_2, \\
\mathcal{L}_{A^*}\phi_3 &= -\mathcal{L}_{\boldsymbol{f}_2^*}\phi_2 && \in \mathcal{H}_3, \\
\mathcal{L}_{A^*}\phi_4 &= -(\mathcal{L}_{\boldsymbol{f}_2^*}\phi_3 + \mathcal{L}_{\boldsymbol{f}_3^*}\phi_2) + Q\phi_2^2 && \in \mathcal{H}_4.
\end{aligned}$$

の関係を与える.

Kruff-Walcher 判定法を利用する際, 我々はある種の線形代数の問題を扱う. そうした問題を扱うため, [3] では [9] で提案された手法を利用する. そして, その手法では次のような一般化された問題を扱う.

問題 1
V を有限生成線型空間として, $S : V \to V$ を非零線形写像とする. このとき, 与えられた $v \in V$ に対して

$$Sw = v - v_0 \tag{6}$$

を満たすような核の構成因子 $v_0 \in \ker(S)$ とベクトル $w \in V$ を計算する.

以下は, Scheurle と Walcher が [9, 命題 6.1] で与えた, 問題 1 を扱うための手法である.

命題 7 (Scheurle-Walcher 手法)

$$\chi(\sigma) = \sigma^m + \alpha_{m-1}\sigma^{m-1} + \cdots + \alpha_1\sigma + \alpha_0$$

の形で S の消去多項式 $\chi(\sigma)$ が与えられているとする. $\alpha_0 \neq 0$ もしくは $\alpha_1 \neq 0$ が満たされると仮定する.

- $\alpha_0 \neq 0$ の場合, *(6)* は $v_0 = 0$ と以下のような w によって満たされる*:*

$$w = -\frac{1}{\alpha_0}\left(S^{m-1}v + \sum_{j=1}^{m-1}\alpha_j S^{j-1}v\right).$$

- $\alpha_0 = 0$ かつ $\alpha_1 \neq 0$ の場合, *(6)* は次のような v_0 と w によって満たされる*:*

$$\begin{aligned}
v_0 &= \frac{1}{\alpha_1}\left(S^{m-1}v + \sum_{j=1}^{m-1}\alpha_j S^{j-1}v\right), \\
w &= -\frac{1}{\alpha_1}\left(S^{m-2}v + \sum_{j=2}^{m-1}\alpha_j S^{j-2}v\right).
\end{aligned}$$

Scheurle-Walcher 手法では $\alpha_0 \neq 0$ もしくは $\alpha_1 \neq 0$ が仮定されているが, 以下に注意する.

注意 3

Kruff-Walcher 手法は, $\mathcal{H}_3$, $\mathcal{H}_4$ 上でのリー微分 $\mathcal{L}_A^*$ の階数が $n-1$ 以下であることを保証する. 従って, $\alpha_0 \neq 0$ もしくは $\alpha_1 \neq 0$ を満たすような消去多項式 $\sigma(s) = s^m + \alpha_{m-1}s^{m-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$ が存在する. 例えば, $\mathcal{L}_{A^*}|_{\mathcal{H}_3}$ と $\mathcal{L}_{A^*}|_{\mathcal{H}_4}$ の固有多項式はそうした性質を満たす.

2.3 例

[3, §6.1] の例に対して Liu 判定法と Kruff-Walcher 判定法を適用する. $\boldsymbol{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ とし, パラメータ $\boldsymbol{a} = r, s, a, b, c, \ldots, n$ に依存するような $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}_3(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) + O(4)$ を考える, ただし

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{a}) &= \begin{pmatrix} 0 & -r \\ 1 & s \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) &= \begin{pmatrix} ax^2 + bxy + cy^2 \\ dx^2 + exy + fy^2 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{f}_3(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) &= \begin{pmatrix} gx^3 + hx^2y + ixy^2 + jy^3 \\ kx^3 + lx^2y + mxy^2 + ny^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

任意の $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{16}$ に対し $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ であることに注意する. $\boldsymbol{a}_1 = r_1, s_1, a_1, b_1, c_1, \ldots, n_1$ とする. このとき

$$\chi(\varepsilon, \sigma) = \sigma^2 - (s + s_1\varepsilon)\sigma + (r + r_1\varepsilon)$$

が $B(\varepsilon) = A(\boldsymbol{a} + \varepsilon\boldsymbol{a}_1)$ の固有多項式として得られるので, $B(\varepsilon)$ に対する 1 次フルビッツ行列 $R_1(\varepsilon)$ の行列式

$$H_1(\varepsilon) = \det(R_1(\varepsilon)) = -(s + s_1\varepsilon)$$

が得られる. $B(\varepsilon)$ の固有多項式から $c_0(\varepsilon) = r + r_1\varepsilon$ とする. このとき, Liu 判定法から従う系 5 によって

$$\begin{aligned} & \exists \boldsymbol{a}_1 \in \mathbb{R}^{16}\ (H_1(0) = 0 \wedge c(0) > 0 \wedge H_1'(0) \neq 0) \\ \Leftrightarrow\ & \exists \boldsymbol{a}_1 \in \mathbb{R}^{16}\ (-s = 0 \wedge r > 0 \wedge -s_1 \neq 0) \\ \Leftrightarrow\ & s = 0 \wedge r > 0 \end{aligned}$$

ならば $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0})$ がホップ点であることがわかる. $s = 0 \wedge r > 0$ を仮定する. まず, 2 次斉次多項式全体 $\mathcal{H}_2$ におけるリー微分 $\mathcal{L}_A$ の表現行列を求める. $\mathcal{H}_2$ の基底として $\{x^2, xy, y^2\}$ を与えられることに注意すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A x^2 &= \begin{pmatrix} 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ry \\ x \end{pmatrix} = -2rxy, \\ \mathcal{L}_A xy &= \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ry \\ x \end{pmatrix} = x^2 - ry^2, \\ \mathcal{L}_A y^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ry \\ x \end{pmatrix} = 2xy \end{aligned}$$

なので, リー微分の 2 次斉次多項式全体 $\mathcal{H}_2$ での制限 $\mathcal{L}_A|_{\mathcal{H}_2}$ の表現行列が次のような形により与えられる:

$$\mathcal{L}_A|_{\mathcal{H}_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2r & 0 & 2 \\ 0 & -r & 0 \end{pmatrix}.$$

表現行列の右核の生成元 w_2 (つまり, $\mathcal{L}_A|_{\mathcal{H}_2} w_2 = \mathbf{0}$ なる w_2) は $w_2 = (1, 0, r)^t$ なので, $\mathcal{L}_A|_{\mathcal{H}_2}$ の核の生成元

$$\phi_2 = x^2 + ry^2$$

が得られる. $\mathcal{H}_3$, $\mathcal{H}_4$ でも各々の基底として $\{x^3, x^2y, xy^2, y^3\}$, $\{x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4\}$ を考えることができ,

$$\mathcal{L}_A|_{\mathcal{H}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3r & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2r & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -r & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_A|_{\mathcal{H}_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3r & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2r & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -r & 0 \end{pmatrix}$$

が各々の表現行列として得られる. まず, $\mathcal{L}_A|_{\mathcal{H}_3}$ の固有多項式 $\chi(\sigma)$ を求めると, $\chi(\sigma) = \sigma^4 + 10r\sigma^2 + 9r^2$ が得られる. 次に $v = -\mathcal{L}_{\boldsymbol{f}_2}\phi_2$ として, $S = \mathcal{L}_A|_{\mathcal{H}_3}$ とする. ここで, Scheurle-Walcher 手法を適用すると

$$w = -\frac{1}{9r^2}(S^3v + 10rSv) = \begin{pmatrix} \frac{-2dr-2b-4f}{3r} \\ 2a \\ -2f \\ \frac{(4a+2e)r+2c}{3} \end{pmatrix}$$

が得られるので, Kruff-Walcher 手法に現れる 3 次の斉次多項式 $\phi_3 \in \mathcal{H}_3$ は次のような形により与えられる:

$$\phi_3 = \frac{-2dr-2b-4f}{3r}x^3 + 2ax^2y + -2fxy^2 + \frac{(4a+2e)r+2c}{3}y^3.$$

$\mathcal{H}_4$ ではリアプノフ数さえ求めればよいので, Scheurle-Walcher 手法における核の構成因子 v_0 (つまり $S = \mathcal{L}_A|_{\mathcal{H}_4}$ を Scheurle-Walcher 手法に適用したときの $v_0 \in \ker(S)$) さえ計算できれば良い. $\mathcal{H}_3$ の計算同様,

$$Q\phi_2^2 = \frac{-2r^2ad - r^2de + rab - ref + 3r^2g + r^2l + bc + 2cf + ri + 3rn}{4r^2}(x^2 + ry^2)$$

が ($S = \mathcal{L}_A|_{\mathcal{H}_4}$ を Scheurle-Walcher 手法に適用したときの $v_0 \in \ker(S)$ の表現から) 得られる.

3　実装

SageMath で Scheurle-Walcher 手法と Liu 判定法とともに Kruff-Walcher 判定法を実装して, それを

`https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~fukasaku/software/Bifurcation/main.sage`

で公開している. その利用方法を説明する前に, 実装に関するいくつかの詳細を与える.

注意 4

Kruff-Walcher 判定法のために利用される *Scheurle-Walcher* 手法は一変数多項式に行列を代入するような手続きを持つ. 変数 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ の個数が n のとき, 斉次多項式全体 $\mathcal{H}_3$, $\mathcal{H}_4$ におけるその手続きでは, 各々

$$\frac{(3+n-1)!}{6\,(n-1)!}, \qquad \frac{(4+n-1)!}{24\,(n-1)!}$$

の次数・次元の一変数多項式・行列を扱う. n が大きい場合, その手続きの計算量は重くなるが, 実装には小原・田島により *[7]* で提案された拡張ホーナー法を組み込んでいる *(*計算量については *[7]* を参照せよ*)*.

注意 5
Kruff-Walcher 判定法で 3 次斉次多項式 $\phi_3 \in \mathcal{H}_3$ は求める際, 前節の例では *Scheurle-Walcher* 手法を利用した. *Kruff-Walcher* 判定法によってリー微分 $\mathcal{L}_{A^*}|_{\mathcal{H}_3}$ は正則であることが保証されている. 従って, その手順では $\mathcal{L}_{A^*}|_{\mathcal{H}_3}$ の逆写像を使うこともできるので, 多くの数式処理システムに組み込まれているような逆行列計算関数から 3 次斉次多項式 $\phi_3 \in \mathcal{H}_3$ を求めることもできる.

前節の例を使って実装の利用方法を紹介する. SageMath を起動し, 上の URL にアップロードされているファイル "`main.sage`" をロードし, 以下のように実装のメイン関数 "`hopf`" を利用する:

1. パラメータを設定し, パラメータが変数であるような多項式環 `PR` と有理関数体 `PF` を定義する.

```
sage: r,s,a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n = var("r s a b c d e f g h i j k l m n")
sage: PR.<r,s,a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n> = PolynomialRing(QQ)
sage: PF = Frac(PR)
sage: P = PF.gens()
```

2. 変数を設定し, 係数体が `PF` であるような多項式環を定義する.

```
sage: x,y = var("x y")
sage: VR.<x,y> = PolynomialRing(PF)
sage: V = VR.gens()
```

3. $1, 2, 3$ 次斉次多項式 `H1`, `H2`, `H3` のベクトル場をリストリスト形式で定義する.

```
sage: H1 = [[-r*y],                               [x+s*y]]
sage: H2 = [[a*x^2+b*x*y+c*y^2],                  [d*x^2+e*x*y+f*y^2]]
sage: H3 = [[g*x^3+h*(x^2)*y+i*x*(y^2)+j*y^3], [k*x^3+l*(x^2)*y+m*x*(y^2)+n*y^3]]
```

4. ベクトル場を $1, 2, 3$ 次斉次多項式のリストで定義する.

```
sage: H = [H1, H2, H3]
```

5. Liu 判定法と Kruff-Walcher 判定法を適用する.

```
sage: hopf(1, V, P, H, PR, PF, VR)
```

上の手続きによって, 前節の例で計算したような, Liu 判定法によって計算される条件と Kruff-Walcher 判定法で計算されるリアプノフ数が出力される.

謝　辞

本研究は科研費 (18K03320/20K19745) の助成を受けたものである.

参 考 文 献

[1] Bibikov, Y. N.: Local Theory of Nonlinear Analytic Ordinary Differential Equations, 1st edition. Springer, Berlin, Heidelberg. 1979.

[2] Chicone, C.: Ordinary differential equations with applications, 2nd edition. Springer. 2006.

[3] Kruff, N., Walcher, S.: Coordinate-independent criteria for Hopf bifurcations. Discrete and Continuous Dynamical Systems - S, Volume 13 (4), Page 1319–1340.

[4] Liu, W. M.: Criterion of Hopf Bifurcations without Using Eigenvalues. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 182 (1), Pages 250–256. 1994.

[5] Marsden, J. E, McCracken, M: The Hopf Bifurcation and Its Applications. Springer New York. 1976.

[6] Mayer, S., Scheurle, T., Walcher, S.: Practical normal form computations for vector fields, Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), Volume 84 (7), Page 472–482. 2004.

[7] 小原功任, 田島慎一: 拡張行列ホーナー法と行列スペクトル分解の並列算法. 京都大学数理解析研究所講究録 1785 巻, 123-130 項. 2012.

[8] Perko, L.: Differential equations and dynamical systems, 3rd edition. Springer, New York, NY. 2001.

[9] Scheurle, J., Walcher, S.: On Normal Form Computations. In: Newton, P. K. and Holmes, P. and Weinstein, A. (eds.): Geometry, Dynamics and Mechanics, Page 309–325. Springer New York. 2002.