正則な Bogoliubov 変換について

信州大学理学部・佐々木　格
Itaru Sasaki
Department of Mathematics, Shinshu University

1　研究の背景と経緯

場の 2 次の相互作用を持つ一般的な量子場のハミルトニアンの対角化の結果 [11] を紹介する。通常，量子力学においてハミルトニアンの対角化とは，それをユニタリ作用素によって掛け算作用素に変換することであるが，ここでは，量子場のハミルトニアンの対角化とは第二量子化作用素と定数の和にユニタリ変換することと定義する。つまり，量子場のハミルトニアン H が，あるユニタリ変換 U によって

$$U^*HU = d\Gamma_{\rm b}(S) + E \tag{1}$$

と第二量子化作用素と定数の和になるとき，H は U によって対角化されるという。ここで S は掛け算作用素でなくもよく，また，そのスペクトルが知られていなくてもよい。一旦，(1) が示されれば，量子場の模型のスペクトル解析は一粒子ハミルトニアン S の解析に帰着される。また，$S>0$ ならば，H の基底状態はフォック真空 Ω を用いて一意に $U\Omega$ と表わされ，E は基底状態エネルギーとなる。

一般に生成・消滅作用素の 2 次であるような量子場のハミルトニアンは Bogoliubov 変換によって対角化できると考えられており[*1]，そのような Bogoliubov 変換は，Arai[2, 3, 4] によって調和振動子と Bose 場の結合系や双極近似の Pauli-Fierz 模型の模型の解析に用いられてきた。単純な場の 2 次のハミルトニアン $d\Gamma_{\rm b}(T) + (\lambda/2)\Phi_{\rm S}(g)^2$ は Pair Theory として Klein-McCormick[9] によって（物理的に）研究されており，Henley and Thirring の教科書でも解説されている。このモデルの数学的な解析は Asahara-Funakawa[6] によって行われた。これらの数学的な論文では，

[*1] 文献 [7] に様々なことが書かれているが，多くの定理について，その証明は不十分であり，そこにある結果を信用して用いるのは危険である。

Bogoliubov 変換は散乱理論を用いて構成され，その方法はもっとも単純な [6] の場合でもかなり複雑である。また，変換構成のために作用素 T に対してどうしても絶対連続性が必要になってしまう。

Bogoliubov 変換に関する最近の数学的研究には Nam-Napiòrkowskia-Solovei[10] や Dereziǹski[8] がある。そこでは一般的な 2 次のハミルトニアンが Bogoliubov 変換によって対角化されるための条件が研究されているが，対角化後のハミルトニアンの陽な形は与えられていないため，その先の解析（例えばスペクトル解析）に進むのは困難であるように思われる。

我々の論文 [11] では，少しハミルトニアンの形を制限するものの，応用上十分に広いクラスの 2 次のハミルトニアンが対角化される。そして対角化後のハミルトニアンの形も具体的に与えられる。

なお，この講演の内容と解説は松澤泰道氏 (信州大学)，宇佐美京介氏 (信州大学) との共同研究に基づく。

2　モデルの定義と主定理

量子場の数学的基礎はフォック空間とその上の作用素論である。定義や記号は教科書 [1], [5] に従う。

可分な複素ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上のフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上に作用するハミルトニアン

$$H = d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Phi_{\mathrm{S}}(g_n)^2 \tag{2}$$

を考える。ここで，T は 1 粒子ハミルトニアンを表す $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素である。$g_n \in \mathscr{H}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は結合関数と呼ばれるもので，対相互作用模型においては，これは固定された核子の分布に関係する量である。$\lambda_n \in \mathbb{R}$ は結合定数である。第二量子化作用素 $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ と場の作用素 $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は生成・消滅作用素 $A^*(f), A(f)$ を用いて，適当な稠密な部分空間上で

$$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) = \sum_j A^*(Te_j)A(e_j), \qquad \Phi_{\mathrm{S}}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(A(f) + A^*(f))$$

と表すことができる。ここに $\{e_j\}_j \subset \mathrm{dom}(T)$ は $\mathscr{H}$ の CONS である。この意味において，ハミルトニアン H は生成・消滅作用素について 2 次である。

ハミルトニアンを定める T, λ_n, g_n に対して，次の条件を定める：

(B1) $T > 0$。つまり T は非負で単射な自己共役作用素である。

(B2) $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $g_n \in \mathrm{dom}(T^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(T^{-1/2})$, $n = 1, 2, \cdots$

(B3) $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|T^{-1/2} g_n\|^2 < \infty$

(B4) $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|T^{1/2} g_n\|^2 < \infty$

(B5) ある $\varepsilon > 0$ があって，次の作用素の等式が成り立つ：

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, |T^{-1/2} g_n\rangle \, \langle T^{-1/2} g_n| \geq \varepsilon$$

(B6) 次を満たす $\mathscr{H}$ 上の共役子 J が存在する：

$$JTJ = T, \qquad J g_n = g_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

注意. (B5) は $|\lambda|$ がある程度小さければ成り立つ。したがって $\lambda \in \mathbb{R}$ は負であることも可能である。

まず，H の自己共役性は次によって保証される。

定理 1. 仮定 (B1)–(B6) のもとで，H は $\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ 上で自己共役かつ $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の任意の芯上で本質的に自己共役である*2。

Proof. 証明は [11] を参照。 □

注意. (B6) によって $\Phi_{\mathrm{S}}(g_n)$ は位置座標を表すと解釈できる。このことは自己共役性を証明する上でも活用される。(B6) を仮定しない場合，H で下に有界でないものを作ることができ，このとき，H は自己共役にならない。この非自己共役となる例は 6 節で与える。

主定理を述べる前に次に Bogoliubov 変換の一般論を紹介する。一般に J を $\mathscr{H}$ 上の共役子とし，有界作用素 $X, Y \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ で関係式

$$X^* X - Y^* Y = I, \qquad X^* JYJ - Y^* JXJ = 0 \tag{3}$$

を満たすものを考え，

$$B(f) := \overline{A(f) + A^*(JYf)}, \qquad f \in \mathscr{H} \tag{4}$$

*2 dom は定義域を意味する。

とおくと，$\{B(f), B^*(f)\}$ も正準交換関係を満たす。逆に $B(f)$ から $A(f)$ を作るための条件は

$$XX^* - JYY^*J = I, \qquad -XY^* + JYX^*J = 0 \tag{5}$$

である。そこで

$$\begin{aligned}\mathfrak{Sp} &:= \{(X,Y) \in \mathfrak{Sp} \mid (X,Y) \text{ は } (3),(5) \text{ を満たす。}\}\\ \mathfrak{Sp}_2 &:= \{(X,Y) \in \mathfrak{Sp} \mid Y \text{ は Hilbert-Schmidt}\}\end{aligned}$$

と定義する。$(X,Y) \in \mathfrak{Sp}_2$ であるとき，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上のユニタリ作用素 U で

$$UB(f)U^* = A(f), \qquad f \in \mathscr{H} \tag{6}$$

を満たすものが存在することが知られている[*3]。この U を (正則)Bogoliubov 変換という。

一般論はここまでにして，H の対角化の話に戻る。(B1)–(B6) を仮定する。

$$S^2 := T^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left|T^{1/2}g_n\right\rangle \left\langle T^{1/2}g_n\right|$$

とおく。(B5) から $\mathrm{dom}(T^2)$ 上で

$$S^2 = T\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left|T^{-1/2}g_n\right\rangle \left\langle T^{-1/2}g_n\right|\Big)T \geq \varepsilon T^2 > 0 \tag{7}$$

となるので，S^2 は単射かつ非負な自己共役作用素である。そこで

$$S := \left(T^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left|T^{1/2}g_n\right\rangle \left\langle T^{1/2}g_n\right|\right)^{1/2} \tag{8}$$

とおき，作用素 X, Y を

$$X := \frac{1}{2}\left(\overline{T^{-1/2}S^{1/2}} + \overline{T^{1/2}S^{-1/2}}\right), \qquad Y := \frac{1}{2}\left(\overline{T^{-1/2}S^{1/2}} - \overline{T^{1/2}S^{-1/2}}\right) \tag{9}$$

によって定義すると，X, Y は有界作用素であり，$(X,Y) \in \mathfrak{Sp}_2$ であることが示される。

次が主定理である。

[*3] Shale の定理として知られている。作用素論的証明は [12] にある。

定理 2. (B1)–(B6) を仮定する。U を (6) となる Bogoliubov 変換とするとき

$$UHU^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}(S) + E \tag{10}$$

となる。ここに，基底状態エネルギー E は

$$E = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\overline{S - T})$$

で与えられる。

定理 2 の証明の流れを以下の章で解説する。

3 Bogoliubov 変換による対角化の一般論

一般的なハミルトニアンが Bogoliubov 変換によって対角化されるための条件を整理する。ハミルトニアン H が Bogoliubov 変換 U によって対角化されるための条件を調べたいのだが，鍵となることは，対角化によって $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ と $A(f)$ との関係は，H と $B(f)$ に変わるということである。つまり $B(f)$ が消滅作用素に見える世界では H が第二量子化作用素にみえなければならない。

そこで，$B(f), B^*(f)$ から場の作用素

$$\phi(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{(B(f) + B^*(f))}$$

を作る。(3) によって $B(f), B^*(f)$ は CCR を満たすので，$\phi(f)$ も Weyl 型交換関係を満たす：

$$e^{i\phi(f)}e^{i\phi(h)} = e^{-i\,\mathrm{Im}\langle f,h\rangle/2}e^{i\phi(f+h)}.$$

実線型写像 $F : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ を

$$F(f) := Xf + JYf, \qquad f \in \mathscr{H}$$

を定義すると $\phi(f) = \Phi_{\mathrm{S}}(Ff)$ となる。また，条件 (3), (5) によって F は全単射となり，$\{e^{i\phi(f)} | f \in \mathscr{H}\}$ は既約となる。

さらに，場の作用素と第二量子化作用素は $e^{itd\Gamma_{\mathrm{b}}(T)}\Phi_{\mathrm{S}}(f)e^{-itd\Gamma_{\mathrm{b}}(T)} = \Phi_{\mathrm{S}}(e^{itT}f)$ の関係にあることから，H が U によって対角化されるのなら $(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T), \Phi_{\mathrm{S}}(f)) \to (H, \phi(f))$ とした関係式も成り立つべきであり，実際，次が成り立つ。

定理 3. H を $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上の自己共役作用素，S を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする。$\mathscr{H}$ の稠密な部分空間 $\mathscr{D}$ が存在し，

$$e^{itH}\phi(f)e^{-itH} = \phi(e^{itS}f), \qquad t \in \mathbb{R}, f \in \mathscr{D} \tag{11}$$

が成り立つとする。このとき，定数 $E \in \mathbb{R}$ が存在し $UHU^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}(S) + E$ となる。

(2) で定義される H を対角化しようと思うとき，e^{itH} の具体系がわからないので，上の定理 3 の条件 (11) を直接確認するのは難しい。その条件を導く為の十分条件を与えるのが次の命題である。

命題 4. H を $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上の自己共役作用素，$S > 0$ を $\mathscr{H}$ 上の単射な非負自己共役作用素とする。以下の条件 (i)–(v) を仮定する。

(i) 稠密な部分空間 $\mathscr{D}_1 \subset \mathscr{H}$ が存在して $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D}_1) \subset \mathrm{dom}(H)$.

(ii) $\mathrm{dom}(H) \subset \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)^{1/2})$.

(iii) 稠密な部分空間 $\mathscr{D} \subset \mathrm{dom}(S)$ が存在して $e^{itS}\mathscr{D} \subset \mathscr{D}(t \in \mathbb{R})$ であり，$F(f), F(Sf) \in \mathrm{dom}(S^{-1/2})$ $(f \in \mathscr{D})$ が成り立つ。

(iv) すべての $f \in \mathscr{D}$ に対して

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| S^{-1/2} F\left(\left(\frac{e^{i\varepsilon S} - 1}{\varepsilon} - iS \right) f \right) \right\| = 0.$$

(v) すべての $f \in \mathscr{F}$ と $\Psi, \Phi \in \mathrm{dom}(H)$ に対して

$$\langle \Phi, [H, B(f)]_{\mathrm{w}} \Psi \rangle = -\langle \Phi, B(Sf)\Psi \rangle,$$
$$\langle \Phi, [H, B^*(f)]_{\mathrm{w}} \Psi \rangle = \langle \Phi, B^*(Sf)\Psi \rangle.$$

ただし，$\langle \Psi, [A, B]_{\mathrm{w}} \Phi \rangle := \langle A\Psi, B\Phi \rangle - \langle B\Psi, A\Phi \rangle$ である。

このとき，

$$e^{itH}\phi(f)e^{-itH} = \phi(e^{itS}f), \qquad t \in \mathbb{R},\ f \in \mathscr{D}$$

が成り立つ。

Proof. 証明は [11] を参照。そこでの証明は，フォック空間と量子場 (下)[1] の補題 12-9 を参考にして行った。 □

4 Bogoliubov 変換の構成

ここでは一般的な自己共役作用素 S, T から $(X, Y) \in \mathfrak{Sp}_2$ を構成する。

この節では S, T は次を満たす一般的な作用素とする：

(A1) S, T は $\mathscr{H}$ に作用する単射かつ非負な自己共役作用素である。
(A2) 定数 $c_1, c_2 > 0$ があって，$c_1^2 S^2 \le T^2 \le c_2^2 S^2$.
(A3) $\left(\overline{ST^{-1}}\right)^* \left(\overline{ST^{-1}}\right) - 1$ はトレース型作用素である。
(A4) $\mathscr{H}$ 上の共役子 J が存在して $SJ = JS$ と $TJ = JT$ が成り立つ。

この節の主結果は次である：

定理 5. (A1)–(A4) を仮定する。このとき，(9) で定義される作用素 X, Y は $(X, Y) \in \mathfrak{Sp}_2$ を満たす。

以下，定理 5 の証明の (概要を) 解説する。

まず (9) で定義される X, Y が有界作用素であることを確認する必要がある。非負の自己共役作用素 A, B に対して，それらの大小を次のように定義する：

$$A \le B \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{dom}(B) \subset \mathrm{dom}(A) \text{ かつ } \langle f, Af \rangle \le \langle f, Bf \rangle \ (f \in \mathrm{dom}(B))$$
$$A \preceq B \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{dom}(B^{1/2}) \subset \mathrm{dom}(A^{1/2}) \text{ かつ } \|A^{1/2} f\| \le \|B^{1/2} f\| \ (f \in \mathrm{dom}(B^{1/2}))$$

このとき，$A \le B \Rightarrow A \preceq B$ であり，B が単射なら $B^{-1} \preceq A^{-1}$ もしたがう。この事実と Heinz の不等式から次の補題が導かれる。

補題 6. (A1), (A2) を仮定する。このとき $p \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ に対して

(1) $\mathrm{dom}(S^p) = \mathrm{dom}(T^p)$,
(2) $\mathrm{dom}(S^p T^{-p}) = \mathrm{dom}(T^{-p})$ かつ $S^p T^{-p}$ は有界で $\overline{S^p T^{-p}} = (T^{-p} S^p)^*$.

上の補題で $p = \pm 1/2$ とすれば (9) で定義される X, Y は有界作用素となることがわかる。また，$p = 1$ を考えれば (A3) の作用素が有界であることもわかる。

次の補題の証明は難しくない。

補題 7. (A1), (A2) を仮定する。$T^{-1/2} S^{1/2}$ と $T^{1/2} S^{-1/2}$ は $\mathrm{dom}(S^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(S^{-1/2})$ を不変にする。

上の補題から次が導かれる。

補題 8. (A1), (A2) を仮定する。このとき，X, Y を (9) で定義される有界作用素とすると

$$X^* = \frac{1}{2}\left(\overline{S^{1/2} T^{-1/2}} + \overline{S^{-1/2} T^{1/2}}\right), \qquad Y^* = \frac{1}{2}\left(\overline{S^{1/2} T^{-1/2}} - \overline{S^{-1/2} T^{1/2}}\right), \quad (12)$$

であり，X, Y, X^*, Y^* は $\mathrm{dom}(S^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(S^{1/2})$ を不変にする。さらに，これらは関係式

$$X^*X - Y^*Y = 1, \qquad X^*Y - Y^*X = 0, \tag{13}$$
$$XX^* - YY^* = 1, \qquad -XY^* + YX^* = 0. \tag{14}$$

を満たす。さらに (A4) を仮定すると，$(X, Y) \in \mathfrak{Sp}$ となる。

Proof. 主張の前半については，前の補題の結果である。(13), (14) は，稠密な部分空間 $\mathrm{dom}(S^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(S^{-1/2})$ 上で閉包をなくして計算して確かめられる。最後に，(A4) を仮定すれば $T^{\pm 1/2}, S^{\pm 1/2}$ は J と可換になるので，(13), (14) はそれぞれ (3) と (5) と同値になり $(X, Y) \in \mathfrak{Sp}$ が得られる。 □

作用素 Y が Hilbert-Schmidt になるための必要条件が (A3) である。上の補題と次の補題から定理 5 が導かれる。

補題 9. (A1)–(A3) を仮定する。このとき Y は Hilbert-Schmidt である。

Proof. Y^*Y がトレース型であることを示せばよい。$\mathrm{dom}(S^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(S^{-1/2})$ 上で

$$Y^*Y = S^{1/2}(T^{-1} - S^{-1})S^{1/2} + S^{-1/2}(T - S)S^{-1/2} \tag{15}$$

と計算し, 各項がトレース型であることを示す。(A3) の作用素は $\mathrm{dom}(T^{-1}) \cap \mathrm{dom}(T)$ 上で

$$\left(\overline{ST^{-1}}\right)^* \left(\overline{ST^{-1}}\right) - 1 = T^{-1}S^2T^{-1} - 1 = T^{-1}(S^2 - T^2)T^{-1} \tag{16}$$

となることに注意する。(15) の第 1 項を変形するために，T^{-1} に対する積分表示

$$T^{-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (T^2 + t^2)^{-1} dt \tag{17}$$

を用いる。すると

$$S^{1/2}(T^{-1} - S^{-1})S^{1/2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty S^{-1/2}\Big\{(T^2 + t^2)^{-1} - (S^2 + t^2)^{-1}\Big\}S^{-1/2} dt \tag{18}$$

と表わされる。ここでレゾルベント公式を用いることで (16) の作用素を作ることができ，これがトレース型であることを用いて (15) の第 1 項目もトレース型であることが示される。第 2 項についてもほぼ同様である。 □

5　定理 2 の証明（対角化部分）

主定理の証明を行う。(B1)–(B6) を仮定する。証明の手順を要約すると次のとおりである。

(Step1) (8) によって定義される S に対して (A1)–(A4) が成り立つことを確認する。

- このとき，定理 5 により (9) で定義される X, Y は $(X, Y) \in \mathfrak{Sp}_2$ を満たす。したがって，Bogoliubov 変換の一般論より，(6) を満たすようなユニタリ変換が存在する。

(Step2) 次に命題 4 の仮定 (i)–(v) をすべて確認する。

- すると命題 4 の帰結 (11) が得られる。これにより，定理 3 から H が U によって対角化される。

(Step1) を示す。$T, S > 0$ なので (A1) が成り立つ。(A2) は次の補題で示される。

補題 10. $\varepsilon > 0$ を (B5) のものとし，$c_1 = (1 + \sum_n |\lambda_n| \|T^{-1/2} g_n\|^2)^{-1/2}$, $c_2 = \varepsilon^{-1/2}$ とするとき，$c_1^2 S^2 \le T^2 \le c_2^2 S^2$ が成り立つ。すなわち (A2) がなりたつ。

Proof. 右の不等式は (7) の直接の結果である。$v \in \mathrm{dom}(T^2)$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle v, S^2 v \rangle &= \langle v, T^2 v \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left\langle v, T^{1/2} g_n \right\rangle \left\langle T^{1/2} g_n, v \right\rangle \\
&= \langle v, T^2 v \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|T^{-1/2} g_n\|^2 \|Tv\|^2 \\
&= c_1^{-2} \langle v, T^2 v \rangle
\end{aligned}$$

となるので，左側の不等式も成り立つ。 □

次に (A3) を示す。$\mathrm{dom}(T) \cap \mathrm{dom}(T^{-1})$ 上で

$$\begin{aligned}
\left(\overline{ST^{-1}}\right)^* \left(\overline{ST^{-1}}\right) - 1 = T^{-1} S^2 T^{-1} - 1 &= T^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |T^{1/2} g_n\rangle \langle T^{1/2} g_n| T^{-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |T^{-1/2} g_n\rangle \langle T^{-1/2} g_n|
\end{aligned}$$

となる。(B3) よりこれはトレース型作用素である。したがって (A3) が成り立つ。

最後に (B6) より $TJ = JT$, $S^2 J = JS^2$ なので $SJ = JS$ も成り立つ。よって (A4) がしたがう。以上より，(Step1) が示された。

以下，(Step2) を示す。まず

$$\mathscr{D}_1 := \mathrm{dom}(T)$$

とすれば，$\mathscr{D}_1$ は稠密であり，

$$\mathrm{dom}(H) = \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)) \supset \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathscr{D}_1)$$

なので，(i) が成り立つ。(ii) が成り立つことは

$$\mathrm{dom}(H) = \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)) = \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)) \subset \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)^{1/2})$$

からすぐにわかる。次に (iii) を示す。

$$\mathscr{D} = \mathrm{dom}(S^2) \cap \mathrm{dom}(S^{-1/2})$$

とおくと明らかに $\mathscr{D} \subset \mathrm{dom}(S)$ であり，$\mathscr{D}$ は e^{itS} で不変である。また，$f \in \mathscr{D}$ とするとき $F(f) = Xf + JYf$ であり X, Y は $\mathrm{dom}(S^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(S^{-1/2})$ を不変にする (補題 8 ので $F(f), F(Sf) \in \mathrm{dom}(S^{-1/2})$ である。よって (iii) が成り立つ。(iv) も $S^{-1/2}XS^{1/2}, S^{-1/2}YS^{1/2}$ が有界であることに注意し，強微分の定義にしたがって計算すれば，簡単に示せる。

最後に (v) を示す。これを示すためには定義域に関してより詳細な取り扱いが必要である。そこで次の補題を用意する：

補題 11. (B1)–(B6) を仮定する。このとき，$X\,\mathrm{dom}(T) \subset \mathrm{dom}(T)$ かつ $Y\,\mathrm{dom}(T) \subset \mathrm{dom}(T)$ であり，$\mathrm{dom}(T)$ 上で

$$TX = XS - \frac{1}{2}W_0(X - Y),$$
$$TY = -YS + \frac{1}{2}W_0(X - Y)$$

が成り立つ。ここで $W_0 := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left|g_n\right\rangle \left\langle g_n\right|$ は有界作用素である。

Proof. 形式的な計算で上の関係式を満たすのは難しくない。定義域の関係式を示すのが手間である。証明は [11] の Lemma 5.5 を参照。 □

(v) の証明を行う。$f \in \mathscr{D}$, $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T^2))$ とするとき，補題 11 より

$$B(f)\Psi,\ \ B^*(f)\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T)) \subset \mathrm{dom}(H)$$

が成り立つ。これに注意して

$$\langle \Phi, [H, B(f)]\Psi\rangle = \langle \Phi, -B(Sf)\Psi\rangle, \qquad \Psi, \Phi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T^2)) \tag{19}$$

を示す。まず $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T^2))$ 上で

$$[d\Gamma_{\mathrm{b}}(T), B(f)] = [d\Gamma_{\mathrm{b}}(T), A(Xf) + A^*(JYf)] = A(-TXf) + A^*(TJYf)$$

が成り立つ。補題 11 の関係式を使うと

$$\begin{aligned}
A(-TXf) &= -A(XSf) + \frac{1}{2}A(W_0(X-Y)f), \\
A^*(TJYf) &= A^*(TYJf) = -A^*(YSJf) + \frac{1}{2}A^*(W_0(X-Y)Jf)
\end{aligned}$$

となるので $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T^2))$ 上で

$$[d\Gamma_{\mathrm{b}}(T), B(f)] = -B(Sf) + \frac{1}{2}A(W_0(X-Y)f) + \frac{1}{2}A^*(W_0(X-Y)f)$$

となる。一方で，相互作用項との交換子は $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T^2))$ 上で

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n[\Phi_{\mathrm{S}}(g_n)^2, B(f)] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n[\Phi_{\mathrm{S}}(g_n)^2, A(Xf) + A^*(JYf)] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\Big(-\langle Xf, g_n\rangle\,\Phi_{\mathrm{S}}(g_n) + \langle g_n, JYf\rangle\,\Phi_{\mathrm{S}}(g_n)\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\,\langle (X-Y)f, g_n\rangle\,(A(g_n) + A^*(g_n)) \\
&= -\frac{1}{2}\Big(A(W_0(X-Y)f) + A^*(W_0(X-Y)Jf)\Big)
\end{aligned}$$

と計算される。したがって，(19) が成立する。同様にして

$$\langle \Phi, [H, B^*(f)]\Psi\rangle = \langle \Phi, B^*(Sf)\Psi\rangle, \qquad \Psi, \Phi \in \mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T^2))$$

を示すことができる。$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{dom}(T^2))$ が H と $B(f), B^*(f)$ の芯であることに注意して極限操作を行えば，(v) が示される。以上から (Step2) が示された。

6 (B6) を仮定しない場合の自己共役性について

定理 (1) で H の自己共役性を与えたが，(B6) を仮定しない場合，H が下に有界でなくなり，したがって $\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ 上では自己共役でないような場合が存在する。そのことについては，論文 [11] では述べておらず，この事実を紹介するのは本解説がはじめてである。

(B1)–(B5) だけから

$$H = d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + \frac{1}{2}\sum_n \lambda_n \Phi_{\mathrm{S}}(g_n)^2$$

の自己共役性が示せるかという問題を考える。

これは実際には不可能である。もし自己共役性が示されるのであれば，パラメーター $\alpha \in [0,1]$ に対して $\lambda_n \to \alpha\lambda_n$ と置き換えて $H \to H_\alpha$ とした場合，H_α も自己共役である。$H_0 = d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ は下に有界な自己共役作用素であるから，閉グラフ定理から H も下に有界でなければならない。したがって，(B1)–(B5) の条件のもとで，H が下に有界でないような λ_n, g_n が存在すれば，そのような λ_n, g_n に対しては H は $\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ 上で自己共役ではないということになる。

e を $\mathscr{H}$ の単位ベクトルとし，

$$T = 1,\ \ g_1 = e,\ \ g_2 = \frac{4}{3}ie,\ \ g_3 = g_4 = \cdots = 0,\ \lambda_1 = 1 = -\lambda_2$$

とおく[*4]。このとき，

$$\begin{aligned} 1 + \lambda_1 |g_1\rangle\langle g_1| + \lambda_2 |g_2\rangle\langle g_2| &= 1 + |e\rangle\langle e| - \frac{16}{9}|e\rangle\langle e| \\ &= (1 - |e\rangle\langle e|) + (2 - \frac{16}{9})|e\rangle\langle e| \\ &\geq \frac{1}{25}(1 - |e\rangle\langle e|) + \frac{2}{9}|e\rangle\langle e| = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

よって，$\epsilon = 2/9$ として (B5) が成り立つ。

$$H = d\Gamma_{\mathrm{b}}(1) + \frac{1}{2}\Phi_{\mathrm{S}}(e)^2 - \frac{1}{2}\Phi_{\mathrm{S}}((4/3)ie)^2$$

が下に非有界であることを示す。

$$H = d\Gamma_{\mathrm{b}}(1 - |e\rangle\langle e|) + d\Gamma_{\mathrm{b}}(|e\rangle\langle e|) + \frac{1}{2}\Phi_{\mathrm{S}}(e)^2 - \frac{16}{18}\Phi_{\mathrm{S}}(ie)^2$$

$\mathscr{K} := \mathbb{C}e$ とおき，$\mathscr{H} = \mathscr{K}^\perp \oplus \mathscr{K}$ と分解し同型対応 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) = \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{K}^\perp)\otimes\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{K})$ を考えると

$$H \sim d\Gamma_{\mathrm{b}}(1)\otimes 1 + 1\otimes(d\Gamma_{\mathrm{b}}(1) + \frac{1}{2}\Phi_{\mathrm{S}}(e)^2 - \frac{16}{18}\Phi_{\mathrm{S}}(ie)^2)$$

[*4] 4/3 に深い意味はない $(1, \sqrt{2})$ の間であれば何でもよい。

$\Phi_{\mathrm{S}}(e)=x,\ \Phi_{\mathrm{S}}(ie)=p$ とおくと

$$\begin{aligned}1\otimes(d\Gamma_{\mathrm{b}}(1)+\frac{1}{2}\Phi_{\mathrm{S}}(e)^2-\frac{16}{18}\Phi_{\mathrm{S}}(ie)^2) &= 1\otimes(\frac{1}{2}(p^2+x^2-1)+\frac{1}{2}x^2-\frac{16}{18}p^2)\\ &= 1\otimes\frac{1}{2}(-\frac{7}{18}p^2+2x^2-1)\end{aligned}$$

明らかにこれは下に非有界である。したがって H も下に非有界。

7　最後に

基底状態エネルギーの表式 $E=(1/2)\mathrm{tr}(\overline{S-T})$ は 2019 年度の RIMS の講演の際には得られておらず，その後で示された。この公式の証明と応用例については「量子場の数理とその周辺 2020」で発表したので，そちらの講究録で解説することにしたい。

議論に付き合ってくれた信州大学の大学院生だった所附竜太君，仲本圭佑君に感謝します。彼らの修士論文には Bogoliubov 変換に関する基本事項がまとめられています。*5

この研究は JSPS 科研費 16K17612，20K03628 の助成を受けたものです。

参考文献

[1] 新井朝雄, フォック空間と量子場（上，下），増補改訂版, 日本評論社, 2017

[2] A. Arai, On a model of a harmonic oscillator coupled to a quantized, massless, scalar field. I, *J. Math. Phys.*, **22**, 2539–2548, (1981)

[3] A. Arai, Rigorous theory of spectra and radiation for a model in quantum electrodynamics, *J. Math. Phys.*, **24**, 1896–1910, (1983)

[4] A. Arai, A note on scattering theory in non-relativistic quantum electrodynamics, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **16**, 49–70, (1983)

[5] A. Arai, *Analysis on Fock spaces and Mathematical theory of quantum fields*, World Scientific, (2018)

[6] K. Asahara and D. Funakawa, Spectral analysis of an abstract pair interaction model, to appear in *Hokkaido Math. J.*, arXiv:1807.08408v1

[7] E.A. Berezin, The Method of Second Quantization, Academic Press (1966)

*5 ただし所附君の修士論文の $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)+\Phi(g)^2$ の対角化には誤りがあるので注意してください。実際には，それを訂正することが本結果を得るための出発点となった。

[8] J. Dereziński, Bosonic quadratic Hamiltonians, *J. Math. Phys.*, **58**, 121101, (2017)

[9] A. Klein and B. H. McCormick, Meson Pair Theory, *Phys. Rev.*, **98**, 1428–1445, (1955)

[10] P. T. Nam, M. Napiórkowskia and J. P. Solovej, Diagonalization of bosonic quadratic Hamiltonians by Bogoliubov transformations, *J. Funct. Anal.*, **270**, 4340–4368, (2016)

[11] Y. Matsuzawa, I. Sasaki, K. Usami, Explicit diagonalization of pair interactin models, *Anal. Math. Phys.*,

[12] S. N. M. Ruijsenaars, On Bogoliubov Transformations. II. The General Case, *Ann. Phys.* **116**, 105–134, (1978)