確率偏微分方程式を用いた Φ_3^4-measure の構成

楠岡誠一郎 (京都大学)

近年, Hairer 氏による Regularity structure ([7] を参照) や, Gubinelli 氏らによる paracontrolled calculus ([6] を参照) によって, 繰り込みが必要な確率偏微分方程式の話題が急速に発展している。これらの一般論においては時間局所解しか構成はできないが, モデルに依存した議論を行うことにより様々な場合に時間大域解を構成することもできるようになった。特に, Φ_3^4-measure の確率量子化により得られる方程式に対してこれらの手法を用いることにより, Φ_3^4-measure の新しい構成方法も得られている。ただし, ここで述べている Φ_3^4-measure とは, 数学的に厳密な議論で構成された, Φ_3^4-measure と呼ぶにふさわしい確率測度であり, 量子場の公理を全て満たすかどうかは未解決である。一方, Φ_3^4-measure に関してはある一定の universality があると信じられているため, それを踏まえるとこの確率偏微分方程式を用いて構成された確率測度は Φ_3^4-measure であると言ってよいであろう。この講究録では, Φ_3^4-measure の確率量子化に話を限定し, [1] で得られた結果について, 先行結果である [9] と比較しながら解説する。

まず, Λ を 3 次元トーラスとし, mass m_0^2 を持つ Λ 上の free field measure μ_0 を考える。μ_0 は Λ 上の超関数の空間 $\mathcal{D}'$ 上のガウス測度で, 平均は 0, 共分散は

$$\int \langle f, \phi\rangle \langle g, \phi\rangle \mu_0(d\phi) = \frac{1}{2}\int_\Lambda f(m_0^2 - \triangle)^{-1} g dx, \quad f, g \in \mathcal{D}(\Lambda) := C^\infty(\Lambda)$$

で与えられるものである。ここで, $\langle f, \phi\rangle$ はペアリングである。これを用いて, Φ_3^4-measure は形式的に次で与えられる。

$$\mu(d\phi) = \frac{1}{Z}\exp\left(-\lambda \int_\Lambda \left(\frac{1}{4}\phi(x)^4 - \infty \cdot \phi(x)^2\right) dx\right) \mu_0(d\phi) \tag{1}$$

ここで, Z は正規化定数であり, $\lambda > 0$ は coupling constant と呼ばれるある定数, ∞ は繰り込み定数である。繰り込み定数が現れることからもわかるように, これはあくまで形式的な表示である。繰り込みが現れる理由は, μ_0 が超関数上の測度であるため, 普通の意味では $\phi(x)^4$ が定義できないからである。L^4-空間に属さない関数は 4 乗して積分すると発散するから, $\int_\Lambda \phi(x)^4 dx$ が ∞ に発散するということはすぐに予想がつく。そこで, $-\infty \cdot \phi(x)^2$ という項で適切に打ち消し合わせて, $\int_\Lambda \left(\frac{1}{4}\phi(x)^4 - \infty \cdot \phi(x)^2\right) dx$ に意味を持たせようということである。この繰り込みという操作は数学的には都合の良い操作に思えるが, 物理においてはちゃんと認められているため, 繰り込みについては物理の考え方に従って話を進める。また, ここではトーラス上で考えているが, Gubinelli 氏と Hofmanova 氏により全空間 $\mathbb{R}^3$ の場合も議論されている ([4] を参

照)。後でベゾフ空間が現れるが, 全空間 $\mathbb{R}^3$ の場合は Besov 空間を重み付き Besov 空間に置き換えて議論をし直すことになる。

この Φ_3^4-measure は量子力学において現れるものであり, この Φ_3^4-measure を適切な意味で数学的に厳密に構成するということが構成的場の理論における問題である。まず思い付くことは超関数である ϕ を良い関数で近似して極限を取ることであろう。そこで, 近似作用素 $P_N : \mathcal{D}'(\Lambda) \to C^\infty(\Lambda)$ を用いて

$$\mu_N(d\phi) = \frac{1}{Z_N} \exp\left(-\lambda \int_\Lambda \left(\frac{1}{4}(P_N\phi(x))^4 - \frac{3}{2}(C_1^{(N)} - 3\lambda C_2^{(N)})(P_N\phi(x))^2\right) dx\right) \mu_0(d\phi) \tag{2}$$

という Φ_3^4-measure の近似を考える。ここで, $P_N\phi(x)$ は既に滑らかな関数であるから 4 乗は定義できている。よって, $C_1^{(N)}$ と $C_2^{(N)}$ はただの実数であり, 特に有限の数である。このように ϕ を近似 $P_N\phi$ に置き換えれば (2) は形式的な記述は全くなく, $\mu_N(d\phi)$ が (2) により定義される。そこで問題は $\mu_N(d\phi)$ の $N \to \infty$ での極限を考えることとなるのであるが, その際に $\lim_{N\to\infty} C_1^{(N)} = \lim_{N\to\infty} C_2^{(N)} = \infty$ となるところが難点である。

また, P_N がどのような近似作用素化を明確にしておく。$\psi \in C^\infty([0,\infty);[0,1])$ を単調非増加で

$$\psi(r) = 1 \ (r \in [0,1]), \quad \psi(r) = 0 \ (r \in [2,\infty))$$

を満たすものとし、

$$\psi_N^{\otimes 3}(\xi) := \psi(2^{-N}|\xi_1|)\psi(2^{-N}|\xi_2|)\psi(2^{-N}|\xi_3|), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$$

と書く。$\{e_k\}$ を Λ 上の Fourier basis とし

$$P_N f := \psi_N^{\otimes 3}(\nabla) f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \psi_N^{\otimes 3}(k) \langle f, e_k \rangle e_k$$

と定める。このようにある程度具体的に近似作用素 P_N を与える理由は, 議論にベゾフ空間と paraproduct を使うため, それらにとって良い近似にする必要があるからである。

近似を定めると, $\int_\Lambda (P_N\phi(x))^4 dx$ の発散の速さが決まるため, 繰り込み定数も具体的に書けるようになる。この近似においては

$$C_1^{(N)} := \frac{1}{2|\Lambda|} \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \frac{\psi_N^{\otimes 3}(k)^2}{k^2 + m_0^2},$$
$$C_2^{(N)} := \frac{1}{2|\Lambda|^2} \sum_{l_1, l_2 \in \mathbb{Z}^3} \frac{\psi_N^{\otimes 3}(l_1)^2 \psi_N^{\otimes 3}(l_2)^2 \psi_N^{\otimes 3}(l_1 + l_2)^2}{(l_1^2 + m_0^2)(l_2^2 + m_0^2)(l_1^2 + l_2^2 + (l_1 + l_2)^2 + 3m_0^2)}$$

となる。ただし、$|\Lambda|$ はトーラス Λ の体積である。発散項の打ち消しができればよいので, 本当は $C_1^{(N)}$ や $C_2^{(N)}$ を, 収束するような数列 $\{a_N\}$, $\{b_N\}$ を用いて $C_1^{(N)}+a_N$ や $C_2^{(N)}+b_N$ と置き換えても良いが, このように選ぶと

$$C_1^{(N)}=\frac{1}{|\Lambda|}\int_\Lambda (P_N\phi(x))^2\mu_0(d\phi),\quad x\in\Lambda$$

となるため, 最も自然な選び方である。$C_2^{(N)}$ の方も似たような意味で自然なのであるが, 簡単には述べられないので省略する。以下は $C_1^{(N)}$, $C_2^{(N)}$ はこのようなものとしておく。

$\mu_N(d\phi)$ の確率量子化の方程式として, 次のような Λ 上の確率偏微分方程式を考える。

$$\begin{aligned}dY_t^N(x) &= dW_t(x)-(-\triangle+m_0^2)Y_t^N(x)dt\\ &\quad -\lambda P_N\left\{(P_NY_t^N)^3(x)-3\left(C_1^{(N)}-3\lambda C_2^{(N)}\right)P_NY_t^N(x)\right\}dt.\end{aligned}\tag{3}$$

ここで、$dW_t(x)$ は white noise (cylindrical Brownian motion $W_t(x)$ の時間微分ともみなしている) である。この方程式の解は $\mu_N(d\phi)$ を不変測度に持つことは, 以前から使われている手法で分かる ([1] の Theorem 4.1 を参照)。

$\tilde{X}_t^N$ を (3) の解で初期分布が μ_N で与えられるものとする。このとき, $\tilde{X}_t^N$ は定常なマルコフ過程で、各時刻の分布は μ_N となっている。$\tilde{\psi}:[0,\infty)\to[0,1]$ を単調非増加で

$$\tilde{\psi}(r)=1\ (r\in[0,2]),\quad \tilde{\psi}(r)=0\ (r\in[4,\infty))$$

を満たすものとし, ψ の代わりに $\tilde{\psi}$ を用いて P_N を与えたときと同様に $\tilde{P}_N$ を定めておく。そして, $X_t^N:=\tilde{P}_N\tilde{X}_t^N$ とする。また, $B_{p,r}^s$ を Besov 空間とし, $B_p^s:=B_{p,\infty}^s$ とする。Besov 空間は Sobolev 空間と似たものであるが paraproduct を考える際には Besov 空間が本質的に現れる。Besov 空間と paraproduct については [2] を参照のこと。

以上の準備の下, [1] における主定理は次の様に述べられる。

Theorem 1 (Theorem 4.19 in [1])**.** 任意の $\varepsilon\in(0,1/16]$ に対し, $\{X^N\}$ はの分布は $C([0,\infty);B_{4/3}^{-1/2-\varepsilon})$ 上の確率測度の空間において緊密である。X を部分列 $\{X^{N(k)}\}$ の極限とすると, X は $B_{4/3}^{-1/2-\varepsilon}$ 値連続過程であり, 対応する部分列 $\{\mu_{N(k)}\}$ の極限 μ は X の定常測度 *(stationary measure)* となる。

この定理において $\{\mu_N\}$ の部分列の極限として μ が得られているが, $\{\mu_N\}$ は Φ_3^4-measure の自然な近似であったため, μ は Φ_3^4-measure と呼ぶにふさわしい確率測度である。さらに, $\{X^N\}$ の部分列の極限 X は Φ_3^4-measure μ を定常測度に持つ確率過

程である。また, coupling constant λ は任意の正の数である。これはトーラス上で議論しているからだと考えられており, 数理物理学者の間での認識と一致している。

[1] での議論の特徴は, Φ^4_3-measure の構成を中心に問題設定をしているところである。そのため, ここで構成した Φ^4_3-measure は自然な近似の極限であり, 時間発展を伴わない以前から行われている Φ^4_3-measure の構成方法と全く同じ近似である。一方, [9] の構成法ではまず free field measure μ_0 は massless のもの, つまり共分散は $(m_0^2 - \triangle)^{-1}$ ではなく, $(-\triangle)^{-1}$ であるものを考えている。そして, (1) による形式的な Φ^4_3-measure の確率量子化方程式を考えるところから議論が始まる。先に Φ^4_3-measure の近似である μ_N を考えてから確率量子化方程式を考えるのとでは少々違いが生じ, 実際, [9] で考える確率量子化方程式は

$$dX_t = dW_t + \triangle X_t dt - \left\{ X_t^3 - 3\left(C_1^{(N)} - 3C_2^{(N)} \right) X_t \right\} dt.$$

となっている。さらに形式的な確率量子化方程式を導入した後, 初期値を固定して Hairer 氏による時間局所解 ([7] を参照) とつなぎ合わせ, つなぎ合わせた時刻以降の解が時間大域的に伸びることを示し, さらにその時間無限大での挙動を調べることにより, 測度を構成している。この測度を彼らは Φ^4_3-measure と呼んでいる。よって, 得られた確率量子化方程式を Hairer 氏や Gubinelli 氏らのアイデアに従って時間大域解を構成するという部分は [1] と [9] で同じではあるが, そもそもその確率量子化方程式に行き着くまでの経緯は異なる。この部分が Theorem 1 の既存の結果との最も大きな違いである。[1] の設定では時間局所解とのつなぎ合わせは必要なく、パス空間上での緊密性を示すことにより直接的に時間大域解を構成し、さらにその時間ごとの分布の収束から Φ^4_3-measure に相当する測度を得ている。

また注意点として, Theorem 1 で得られた確率過程 X は定常過程であり, μ に関してほとんど全ての初期値からしか X は出発できないということがある。[9] では出発点について明確な記載はないが, [8] の Remark 1.1 において初期値についての言及がある。出発点に関して除外集合が生じるのは, 確率偏微分方程式や無限次元空間におけるディリクレ形式の観点からすると自然なことである。

この定常過程を用いた議論はその後 [5] によって確率量子化を用いた離散近似による Φ^4_3-measure の構成において効果的に適用された。上でも述べたように, この定常過程を用いた議論は以前から行われている構成方法と対応しているため, [5] が構成した Φ^4_3-measure は [3] で得られたものと一致していることもわかる。

参考文献

[1] S. Albeverio and Sei. Kusuoka, The invariant measure and the flow associated to the Φ_3^4-quantum field model, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, to appear, arXiv: 1711.07108.

[2] H. Bahouri, J.-Y. Chemin and R. Danchin, *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations*, volume 343 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, 2011.

[3] David C. Brydges, Jürg Fröhlich, and Alan D. Sokal. A new proof of the existence and nontriviality of the continuum φ_2^4 and φ_3^4 quantum field theories. *Comm. Math. Phys.*, 91(2):141–186, 1983.

[4] M. Gubinelli and M. Hofmanova, Global solutions to elliptic and parabolic Φ 4 models in Euclidean space, *Comm. Math. Phys.* 368 (2019), no. 3, 1201–1266.

[5] M. Gubinelli and M. Hofmanova, A PDE construction of the Euclidean Φ_3^4 quantum field theory, arXiv:1810.01700.

[6] M. Gubinelli, P Imkeller and N. Perkowski, Paracontrolled distributions and singular PDEs, *Forum Math. Pi* 3 (2015), e6, 75 pp.

[7] M. Hairer, A theory of regularity structures, *Invent. Math.* 198 (2014), no. 2, 269–504.

[8] M. Hairer and P. Schönbauer, The support of singular stochastic PDEs, arXiv:1909.05526.

[9] J.-C. Mourrat and H. Weber, The dynamic Φ_3^4 model comes down from infinity, *Commun. Math. Phys.*, 356(3):673–753, 2017.