N 体 Schrödinger 作用素に対する交換子法

足立匡義（京都大学大学院人間・環境学研究科）*
板倉恭平（神戸大学大学院理学研究科）†
伊藤健一（東京大学大学院数理科学研究科）‡
Erik Skibsted (Institut for Matematiske Fag, Aarhus Universitet) §

概 要

本稿は N 体 Schrödinger 作用素のスペクトル理論に関する著者らの最近の結果 [1] の予稿である．本文の大部分は国際会議プロシーディングス [2] の日本語訳である．主結果として，Rellich の定理，極限吸収原理，超局所レゾルベント評価および超局所 Sommerfeld の一意性定理を紹介する．粒子間ポテンシャルに対する仮定は最小限のものにとどめられており，1 階微分可能な長距離型項，微分可能とは限らない短距離型項，および相対有界な特異項の和からなるとする．また，中心核の存在も許容する．証明は著者のうち 2 名により最近提案された交換子法 [22] による．

1　導入

本稿は N 体 Schrödinger 作用素のスペクトル理論を論じた著者らの最近の結果 [1] の予稿である．以下は概ね国際会議プロシーディングス [2] の日本語訳からなる．主結果は Rellich の定理，極限吸収原理，超局所レゾルベント評価および超局所的 Sommerfeld の一意性定理である．粒子間ポテンシャルには最小限の仮定のみを課し，Besov 空間を用いた最良の形の定理を与える．本稿ではこれらの結果の証明は省略するが，基本的な方針は著者のうち 2 名によって提案された交換子法 [22] に大きく依存する．

*Tadayoshi Adachi (Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University), Partially supported by JSPS KAKENHI, grant nr. 17K05319
†Kyohei Itakura (Department of Mathematics, Kobe University)
‡Kenichi Ito (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo), Partially supported by JSPS KAKENHI, grant nr. 17K05325
§Partially supported by the Danish Council for Independent Research | Natural Sciences, grant nr. DFF-4181-00042

2 問題設定

2.1 N 体ハミルトニアン

ここでは中心核を持つ一般化 N 体ハミルトニアンを定式化する．同様の設定については [15] も参照せよ．$\mathbf{X}$ を有限次元実内積空間とする．$\{\mathbf{X}_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ は $\mathbf{X}$ の部分空間からなる有限族で，共通部分をとる操作について閉じているものとする．すなわち，任意の $a,b\in\mathcal{A}$ に対しある $a\vee b\in\mathcal{A}$ が存在して

$$\mathbf{X}_a\cap\mathbf{X}_b=\mathbf{X}_{a\vee b}$$

とする．$\mathcal{A}$ の各元を**クラスター分解**と呼び，$\mathbf{X}_a\supset\mathbf{X}_b$ のとき $a\subset b$ と定める．また，あるクラスター分解 $a_{\min},a_{\max}\in\mathcal{A}$ が存在して

$$\mathbf{X}_{a_{\min}}=\mathbf{X},\quad \mathbf{X}_{a_{\max}}=\{0\}$$

となることを仮定する．各 $a\in\mathcal{A}$ に対し

$$\#a=\max\{k\in\mathbb{N}\,|\,a=a_1\subsetneq\cdots\subsetneq a_k=a_{\max}\};\quad \mathbb{N}=\{1,2,\dots\},$$

とおく．$\#a_{\min}=N+1$ のとき，$\{\mathbf{X}_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ は N **体型**の族であると言う．$(N+1)$ 個の粒子からなる系は，重心の分離により，上の意味での N 体型の系を定めることに注意する．

$\mathbf{X}_a\subset\mathbf{X}$ の直交補空間を $\mathbf{X}^a\subset\mathbf{X}$ で表し，それに対応する $x\in\mathbf{X}$ の直交分解を

$$x=x^a\oplus x_a\in\mathbf{X}^a\oplus\mathbf{X}_a$$

で表す．x_a を**クラスター間座標**，x^a を**内部座標**と呼ぶ．任意の $a,b\in\mathcal{A}$ に対して

$$\mathbf{X}^a+\mathbf{X}^b=\mathbf{X}^{a\vee b}$$

が成り立つことに注意する．可測関数 $V\colon\mathbf{X}\to\mathbb{R}$ が N **体型ポテンシャル**であるとは，**粒子間ポテンシャル**と呼ばれるある可測関数 $V_a\colon\mathbf{X}^a\to\mathbb{R}$，$a\in\mathcal{A}$，を用いて

$$V(x)=\sum_{a\in\mathcal{A}}V_a(x^a),\quad x\in\mathbf{X},$$

と書けることである．あとで現れるスペクトルパラメータの平行移動により，初めから $V_{a_{\min}}\equiv 0$ としてよい．また**中心核**を次のように導入する：各 $a\in\mathcal{A}$ に対し

空でない開集合 $\Omega_a \subset \mathbf{X}^a$ で補集合 $\mathbf{X}^a \setminus \Omega_a$ がコンパクトなものが与えられているとし，

$$\Omega = \bigcap_{a \in \mathcal{A}} (\Omega_a + \mathbf{X}_a)$$

とおく．仮定から $\Omega_{a_{\min}} = X^{a_{\min}} = \{0\}$ であることに注意する．補集合 $\mathbf{X} \setminus \Omega$ が粒子の侵入できない領域であり，中心核に相当する．

以降では，$\langle y \rangle = (1 + |y|^2)^{1/2}$ と書く．ノルム空間 X からノルム空間 Y への有界作用素全体の集合を $\mathcal{L}(X, Y)$ で表す．同様に X から Y へのコンパクト作用素全体の集合を $\mathcal{C}(X, Y)$ で表す．また X の双対空間を X^* で表す．

仮定 2.1. $\delta \in (0, 1/2]$ とする．各 $a \in \mathcal{A} \setminus \{a_{\min}\}$ に対しある実可測関数による分解

$$V_a = V_a^{\mathrm{lr}} + V_a^{\mathrm{sr}} + V_a^{\mathrm{si}}; \quad V_a^{\mathrm{lr}}, V_a^{\mathrm{sr}}, V_a^{\mathrm{si}} \in \mathcal{C}(H_0^1(\Omega_a), H_0^1(\Omega_a)^*),$$

が存在して，以下が成り立つことを仮定する：

1. V_a^{lr} は超関数の意味での 1 階偏導関数を $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_a)$ に持ち，

$$\langle x^a \rangle^{1+2\delta} \partial^\alpha V_a^{\mathrm{lr}} \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega_a), H_0^1(\Omega_a)^*); \quad |\alpha| = 1,$$

を満たす；

2. V_a^{sr} は

$$\langle x^a \rangle^{1+2\delta} V_a^{\mathrm{sr}} \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega_a), L^2(\Omega_a)) \tag{2.1}$$

を満たす；

3. V_a^{si} は Ω_a のある有界集合の外で恒等的に 0 である．

本稿では長距離型項には 1 階微分のみを仮定し，短距離型項には微分は仮定しない．また相対形式有界な特異項および中心核の存在を許容している．これらは必要最小限の仮定と考えられる．相対形式有界な特異項の代わりに相対作用素有界な特異項を扱うこともできるが，それについては [1] を参照せよ．

以上の設定の下で，$\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ 上の**一般化** N **体ハミルトニアン**を

$$H = H_0 + V; \quad H_0 = -\tfrac{1}{2}\Delta,$$

で定義する．ただし，Δ は $\mathbf{X}$ の内積から定まる Laplace–Beltrami 作用素であり，境界 $\partial\Omega$ には Dirichlet 条件を課すものとする．すなわち，H は閉 2 次形式

$$\langle \tilde{H} \rangle_\psi = \tfrac{1}{2}\langle p\psi, p\psi \rangle + \langle \psi, V\psi \rangle, \quad \psi \in Q(\tilde{H}) = H_0^1(\Omega); \quad p = -\mathrm{i}\nabla,$$

から定まる自己共役作用素とする．V は H_0 に対し無限小相対形式有界であることに注意する．$\tilde{H}$ を有界作用素 $H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)^*$ と見るなら，H の自己共役実現は

$$H = \tilde{H}_{|\mathcal{D}(H)}; \quad \mathcal{D}(H) = \bigl\{\psi \in H_0^1(\Omega) \bigm| \tilde{H}\psi \in \mathcal{H}\bigr\}, \tag{2.2}$$

で与えられる．これについては Friedrichs 拡張の構成，例えば [35]，を参照せよ．

2.2 部分ハミルトニアン

ここでは $a \in \mathcal{A}$ に対する**部分ハミルトニアン**H^a について述べる．$a = a_{\min}$ のときは $\mathcal{H}^{a_{\min}} = L^2(\Omega^{a_{\min}}) = \mathbb{C}$ 上の作用素として

$$H^{a_{\min}} = 0$$

と定義する．$V^{a_{\min}} = 0$ および $\Omega^{a_{\min}} = \{0\}$ であることに注意する．$a \neq a_{\min}$ のときは，X^a の部分空間の族 $\{\mathbf{X}_b \cap \mathbf{X}^a\}_{b \subset a}$ が $(\#a - 1)$ 体型であることに注意して，全ハミルトニアン H と同様に，

$$V^a(x^a) = \sum_{b \subset a} V_b(x^b), \quad \Omega^a = \bigcap_{b \subset a} \bigl[\Omega_b + (\mathbf{X}_b \cap \mathbf{X}^a)\bigr],$$

とし，$\mathcal{H}^a = L^2(\Omega^a)$ 上の作用素として

$$H^a = -\tfrac{1}{2}\Delta_{x^a} + V^a$$

と定義する．H 同様に，$\partial\Omega^a$ には Dirichlet 条件をおくものとする．

H の**閾値**全体の集合を

$$\mathcal{T}(H) = \bigcup \bigl\{\sigma_{\mathrm{pp}}(H^a) \bigm| a \in \mathcal{A} \setminus \{a_{\max}\}\bigr\},$$

で定義する．仮定 2.1 の下で $\mathcal{T}(H)$ は閉かつ高々可算であることが知られている．閾値でない固有値全体の集合は $\mathbb{R} \setminus \mathcal{T}(H)$ において離散的であり，集積し得るのは $\mathcal{T}(H)$ の点のみで，下からしか集積し得ないことも知られている [11, 20, 29]．さらに HVZ 定理 [30] によれば，

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = [\min \mathcal{T}(H), \infty)$$

が成り立つ．

2.3　一意接続性

ここでは**一意接続性**について述べる．各 $a \in \mathcal{A} \setminus \{a_{\min}\}$ に対し

$$H^1_{0,\mathrm{loc}}(\Omega^a) = \bigl\{\psi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega^a) \bigm| \text{任意の}\chi \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbf{X}^a)\text{ に対し}\chi\psi \in H^1_0(\Omega^a)\bigr\}$$

とおく．すると 1 の分割を用いることで，$H^a\colon H^1_0(\Omega^a) \to H^1_0(\Omega^a)^*$ は

$$H^a\colon H^1_{0,\mathrm{loc}}(\Omega^a) \to \mathcal{D}'(\Omega^a)$$

へと自然に拡張される．関数 $\phi \in H^1_{0,\mathrm{loc}}(\Omega^a)$ が**固有値**$E \in \mathbb{C}$ に対する H^a の**一般化 Dirichlet 固有関数**であるとは，超関数の意味で

$$H^a\phi = E\phi$$

を満たすことである．

仮定 2.2. 各 $a \neq a_{\min}$ に対し以下が成り立つことを仮定する：H^a の一般化 Dirichlet 固有関数 $\phi \in H^1_{0,\mathrm{loc}}(\Omega^a)$ が空でないある開集合上で $\phi = 0$ を満たすなら，Ω^a 上で $\phi = 0$ である．

[36] によれば，この一意接続性が成り立つには，例えば，V^a が局所有界かつ Ω^a が連結であれば十分である．粗く言えば，V^a や Ω^a の特異性が空間 $\mathbf{X}^a$ を分割して有界な連結成分を生じると，その連結成分上に孤立した固有関数を生じ得るため，そのような状況を否定するのが一つの十分条件となる．本稿では，簡単のため，十分条件の一つを仮定して一意接続性を確かめるよりは，一意接続性自体を直接仮定する．なお Coulomb 型の特異性に対しては一意接続性が成立する [20, Corollary 1.8]．中心核を持たない N 体 Schrödinger 作用素の一意接続性については [12] を見よ．

3　主定理

3.1　指数減衰と Rellich の定理

まず $\mathcal{H}$ 上の掛け算作用素 $|x|$ が誘導する **Besov 空間**を導入する．一般に部分集合 $S \subset \Omega$ に対しその定義関数を $F(S)$ で表すとして，

$$F_0 = F\bigl(\bigl\{x \in \Omega \bigm| |x| < 1\bigr\}\bigr), \quad F_n = F\bigl(\bigl\{x \in \Omega \bigm| 2^{n-1} \le |x| < 2^n\bigr\}\bigr), \quad n \in \mathbb{N},$$

とおく．さて，Besov 空間 $\mathcal{B}$，$\mathcal{B}^*$ および $\mathcal{B}^*_0$ を

$$\mathcal{B} = \bigl\{\psi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \bigm| \|\psi\|_{\mathcal{B}} < \infty\bigr\}, \quad \|\psi\|_{\mathcal{B}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2}\|F_n\psi\|_{\mathcal{H}},$$

$$\mathcal{B}^* = \Big\{\psi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \,\Big|\, \|\psi\|_{\mathcal{B}^*} < \infty\Big\}, \quad \|\psi\|_{\mathcal{B}^*} = \sup_{n\ge 0} 2^{-n/2}\|F_n\psi\|_{\mathcal{H}},$$
$$\mathcal{B}^*_0 = \Big\{\psi \in \mathcal{B}^* \,\Big|\, \lim_{n\to\infty} 2^{-n/2}\|F_n\psi\|_{\mathcal{H}} = 0\Big\}$$

で定義する．通常の**重み付き L^2 空間**を

$$L^2_s = \langle x\rangle^{-s} L^2(\Omega), \quad s \in \mathbb{R}$$

で定めると，任意の $s > 1/2$ に対して

$$L^2_s \subsetneq \mathcal{B} \subsetneq L^2_{1/2} \subsetneq \mathcal{H} \subsetneq L^2_{-1/2} \subsetneq \mathcal{B}^*_0 \subsetneq \mathcal{B}^* \subsetneq L^2_{-s}$$

が成り立つことに注意する．

定理 3.1. 仮定 2.1 および 2.2 が成り立つとする．$\phi \in \mathcal{B}^*_0 \cap H^1_{0,\mathrm{loc}}(\Omega)$ を固有値 $E \in \mathbb{R}$ に対する H の一般化 Dirichlet 固有関数とし，

$$\alpha_0 = \sup\big\{\alpha \ge 0 \,\big|\, \mathrm{e}^{\alpha|x|}\phi \in \mathcal{B}^*_0\big\} \in [0,\infty]$$

とおく．このとき，

$$E + \tfrac{1}{2}\alpha_0^2 \in \mathcal{T}(H) \cup \{\infty\}$$

が成り立つ．さらに，もし $\alpha_0 = \infty$ なら，Ω 上で $\phi = 0$ である．

系 3.2. 正の固有値に対する H の一般化 Dirichlet 固有関数は $\mathcal{B}^*_0$ には存在しない．また，H の正の閾値を持たない．

定理 3.1 はこれまで別々に知られていた Rellich の定理 [18, 21] と L^2 固有関数の指数減衰評価 [11, 20] を統合するものである．また定理 3.1 と系 3.2 は [20, 21] の拡張でもある．Rellich の定理のこれまでの歴史については [18, 19] とその参考文献を参照せよ．また，[29] および [17, Theorem 6.11] に対しても同様の拡張が可能であることに注意する．

3.2 極限吸収原理評価

次に**極限吸収原理評価**を与える．区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対し，それぞれ

$$I_\pm := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z \in I,\, 0 < \pm\,\mathrm{Im}\, z \le 1\}$$

とおく．

定理 3.3. 仮定 2.1 が成り立つとする．$I \subset \mathbb{R} \setminus (\sigma_{\mathrm{pp}}(H) \cup \mathcal{T}(H))$ をコンパクト区間とする．このとき，ある $C > 0$ が存在して，$z \in I_\pm$ および $\psi \in \mathcal{B}$ について一様に

$$\|R(z)\psi\|_{\mathcal{B}^*} + \sum_{j=1}^{d} \|p_j R(z)\psi\|_{\mathcal{B}^*} \le C\|\psi\|_{\mathcal{B}} \tag{3.1}$$

が成り立つ.

[4, 32] のように相対作用素有界な粒子間ポテンシャルを扱うこともできるが，その正確な定式化については [1] を参照せよ．定理 3.3 およびその相対作用素有界な粒子間ポテンシャルに対する類似版は，これまでに知られている多くの結果の一般化を与える．例えば，[4, 5, 6, 7, 8, 9, 24, 25, 26, 27, 32] を見よ．また，より詳細な比較については [1] を見よ．上記の定理の証明では，Mourre 評価をある 0 次作用素 B に対して再定式化して，適用する．我々の方法では，レゾルベントを評価するために，微分不等式を用いない，より直接的なスキームを構成する．これは，これまでの，微分不等式を用いたある意味で間接的な手法 [4, 5, 6, 7, 9, 23, 26, 27, 32] とは対照的である．定理 3.3 の証明では Mourre 評価，交換子評価および Rellich の定理が暗に用いられる．第 4 節も参照せよ．このようなアプローチは，1 体の場合はある意味で [3, 16] に似ているとも言える.

3.3 リスケールされた Graf 関数と作用素 B

関数 $r_1 \in C^\infty(\mathbf{X})$ に対し

$$\tilde{\omega}_1 = \tfrac{1}{2}\operatorname{grad} r_1^2, \quad \tilde{h}_1 = \tfrac{1}{2}\operatorname{Hess} r_1^2$$

とおく．以下では，各 $x \in \mathbf{X}$ における $\mathbf{X}$ の接空間を $\mathbf{X}$ 自身と同一視して，$\tilde{\omega}_1(x) \in \mathbf{X}$ とみなす．同様に，$\mathbf{X}$ の内積構造を用いて，各 $x \in \mathbf{X}$ に対し $\tilde{h}_1(x)\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ とみなす．[14] あるいは [10, 31] によれば，ある $r_1 \in C^\infty(\mathbf{X})$ と $\mathbf{X}$ 上のある 1 の分割 $\{\eta_{1,a}\}_{a \in \mathcal{A}}$ で，以下を満たすものが存在する：

1. ある $c, C > 0$ が存在して，任意の $a, b \in \mathcal{A}$，$a \not\subset b$，および任意の $x \in \operatorname{supp} \eta_{1,b}$ に対し

   $$|x^a| \ge c, \quad |x^b| \le C$$

   が成り立つ.

2. ある $C' > 0$ が存在して，任意の $x \in \mathbf{X}$ に対し
$$r_1(x) \ge 1, \quad \bigl|r_1(x) - |x|\bigr| \le C'$$
が成り立つ.

3. ある $c' > 0$ が存在して，任意の $a \in \mathcal{A}$ および任意の $x \in \mathbf{X}$，$|x^a| \le c'$，に対し
$$\tilde{\omega}_1^a(x) = 0$$
が成り立つ.

4. 任意の $x, y \in \mathbf{X}$ に対し
$$\bigl\langle y, \tilde{h}_1(x) y \bigr\rangle \ge \sum_{a \in \mathcal{A}} \eta_{1,a}(x) |y_a|^2$$
が成り立つ.

5. 任意の $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ および任意の $k \in \mathbb{N}_0$ に対しある $C_{\alpha k} > 0$ が存在して，任意の $x \in \mathbf{X}$ に対し
$$\sum_{a \in \mathcal{A}} \bigl|\partial^\alpha \eta_{1,a}(x)\bigr| + \bigl|\partial^\alpha (x \cdot \nabla)^k (\tilde{\omega}_1(x) - x)\bigr| \le C_{\alpha k}$$
が成り立つ．ここで，$\mathbf{X}$ の次元を $d \in \mathbb{N}$ とし，また $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ とした.

さて，十分大きな $R \ge 1$ に対し
$$r_R(x) = R r_1(x/R), \quad \omega_R = \operatorname{grad} r_R, \quad \eta_R(x) = \eta_1(x/R)$$
とおいて，$\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 B_R を
$$B_R = \tfrac{1}{2}(\omega_R \cdot p + p \cdot \omega_R)$$
で定める．以下では，$R \ge 1$ への依存性は明示せず，単に
$$r = r_R, \quad \omega = \omega_R, \quad B = B_R, \quad \eta = \eta_R.$$
と書くことにする．我々の議論では，作用素 B が系統的に用いられることに注意しておく．系統的ではないが，同じく B を用いた [13] も参照せよ.

3.4 超局所レゾルベント評価とその応用

まず**超局所レゾルベント評価**を与える．$d:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$d(\lambda)=\begin{cases}\inf\{\lambda-\tau\,|\,\tau\in\mathcal{T}(H)\cap(-\infty,\lambda]\} & \mathcal{T}(H)\cap(-\infty,\lambda]\neq\emptyset\text{ のとき},\\ 1 & \text{上記以外のとき}\end{cases}$$

で定め，任意の $\lambda\in\mathbb{R}$ および $I\subset\mathbb{R}$ に対して

$$\gamma(\lambda)=\sqrt{2d(\lambda)},\quad \gamma_-(I)=\inf_{\lambda\in I}\gamma(\lambda)=\inf_{\lambda\in I}\sqrt{2d(\lambda)}$$

とおく．仮定 2.1 のパラメータ $\delta\in(0,1/2]$ に対し，

$$\kappa=\delta/(1+2\delta)\in(0,1/4] \tag{3.2}$$

とおく．

定理 3.4. 仮定 2.1 が成り立つとする．$I\subset\mathbb{R}\setminus(\sigma_{\mathrm{pp}}(H)\cup\mathcal{T}(H))$ をコンパクト区間とし，$R\geq 1$ を十分大きく取る．このとき，任意の $\beta\in(0,\kappa)$ と $F\in C^\infty(\mathbb{R})$ で

$$\operatorname{supp}F\subset(-\infty,\gamma_-(I)),\quad F'\in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$$

を満たすものに対しある $C>0$ が存在して，$z\in I_\pm$ および $\psi\in L^2_{1/2+\beta}$ について一様にそれぞれ

$$\|F(\pm B)R(z)\psi\|_{L^2_{-1/2+\beta}}\leq C\|\psi\|_{L^2_{1/2+\beta}}$$

が成り立つ．

定理 3.4 の第一の応用として，$R(z)$ の Hölder 連続性，よって特に**極限吸収原理**が得られる．（本稿では「極限吸収原理評価」と「極限吸収原理」を区別している．前者はレゾルベントの実軸近くでの局所有界性を指し，後者は実軸上での極限の存在を指す．[4] での用語 ‘LAP’ および ‘strong LAP’ も参照せよ．）

系 3.5. 仮定 2.1 が成り立つとする．$I\subset\mathbb{R}\setminus(\sigma_{\mathrm{pp}}(H)\cup\mathcal{T}(H))$ をコンパクト区間とし，$s>1/2$ および $\beta\in(0,\min\{\kappa,s-1/2\})$ とする．このとき，ある $C>0$ が存在して，任意の $j\in\{1,\dots,d\}$，$k\in\{0,1\}$，$z\in I_\pm$ および $z'\in I_\pm$ に対しそれぞれ

$$\|p_j^kR(z)-p_j^kR(z')\|_{\mathcal{L}(L^2_s,L^2_{-s})}\leq C|z-z'|^\beta$$

が成り立つ．特に，任意の $E\in I$ と $s>1/2$ に対し $\mathcal{L}(L^2_s,L^2_{-s})$ における極限

$$p_j^kR(E\pm\mathrm{i}0):=\lim_{\epsilon\to0_+}p_j^kR(E\pm\mathrm{i}\epsilon)$$

がそれぞれ存在する．同じ極限値は，$\mathcal{L}(\mathcal{B},\mathcal{B}^*)$ における極限

$$p_j^k R(E\pm \mathrm{i}0) = \mathop{\text{s-w}^\star\text{-lim}}_{\epsilon\to 0_+} p_j^k R(E\pm \mathrm{i}\epsilon)$$

としても実現される．

定理 3.4 の第二の応用は**超局所 Sommerfeld の一意性定理**である．これは極限レゾルベント $R(E\pm\mathrm{i}0)$ の作用を **Helmholtz 方程式**と**超局所放射条件**で特徴づける定理である．$\psi\in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ が与えられているとする．このとき，関数 $\phi\in H^1_{0,\mathrm{loc}}(\Omega)$ が方程式 $(H-E)\phi=\psi$ の**一般化 Dirichlet 解**であるとは，超関数の意味で

$$(H-E)\phi=\psi$$

を満たすことである．

系 3.6. 仮定 2.1 が成り立つとする．$E\in\mathbb{R}\setminus(\sigma_{\mathrm{pp}}(H)\cup\mathcal{T}(H))$ とし，$R\geq 1$ は十分大きいとする．また $\psi\in r^{-\beta}\mathcal{B}$，$\beta\in[0,\kappa)$，とする．このとき，$\phi=R(E\pm\mathrm{i}0)\psi\in\mathcal{B}^*\cap H^1_{0,\mathrm{loc}}(\Omega)$ はそれぞれ以下を満たす：

1. ϕ は $(H-E)\phi=\psi$ に対する一般化 Dirichlet 解である；
2. 任意の $F\in C^\infty(\mathbb{R})$ で

   $$\operatorname{supp}F\subset(-\infty,\gamma(E)),\quad F'\in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$$

   を満たすものに対して，$F(\pm B)\phi\in r^{-\beta}\mathcal{B}_0^*$ が成り立つ.

また逆に $\phi'\in L^2_s\cap H^1_{0,\mathrm{loc}}(\Omega)$，$s\in\mathbb{R}$，が以下を満たしているとする：

1. ϕ' は $(H-E)\phi'=\psi$ に対する一般化 Dirichlet 解である；
2. ある $\gamma>0$ が存在して，任意の $F\in C^\infty(\mathbb{R})$ で

   $$\operatorname{supp}F\subset(-\infty,\gamma),\quad F'\in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$$

   を満たすものに対し $F(\pm B)\phi'\in\mathcal{B}_0^*$ が成り立つ.

このとき，それぞれ $\phi'=R(E\pm\mathrm{i}0)\psi$ が成り立つ.

系 3.6 は超局所 Sommerfeld の一意性定理 [18, 28] をいくつかの意味で拡張している．[33, 34] とその参考文献も参照せよ.

4　交換子の計算と評価

主定理の証明は交換子法に大きく依存している．大まかな流れとしては，適切な ‘propagation observable’ P を構成し，交換子

$$\mathbf{D}P := \mathrm{i}[H, P] \tag{4.1}$$

を計算して下から非負の量で評価することになる．P の形は目的に応じて変更を受けるが，基本的には H，r および B の関数の積として構成される．例えば，定理 3.1 の証明では，まず

$$P = \Theta(r) f(H) \zeta(B) f(H) \Theta(r) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

と選ぶ．ここで Θ，f および ζ はそれぞれある性質を満たす関数であるが，本稿ではその詳細は与えない．いずれにせよ，交換子 (4.1) の計算は H，r および B の交換子の計算に帰着されることが分かるだろう．

本節ではこれらの交換子の形式計算および評価を証明無しで与えることにする．これらの評価は，その目的別に大きく 2 つに分けることができる．第一には，(4.1) を下から評価するために，$\mathbf{D}B := \mathrm{i}[H, B]$ を下から評価することである．これはいわゆる Mourre 評価によく似ているが，ここでの下界は一様に正ではなく，遠方での減衰が許される．第二には，交換子計算の際に現れる誤差項制御のために，H，r および B の交換子を上から評価することである．特に二重交換子 $\mathrm{i}[\mathrm{i}[H, B], B]$ の制御は，本稿のような最小限の仮定の下では極めて繊細な議論を必要とする．これらの交換子計算では常に定義域の問題が付きまとい，それが証明をより技巧的に，煩雑にするが，ここではこの問題については触れない．厳密な取り扱いはもちろん可能であり，それは完全な証明とともに [1] に委ねることにする．

4.1　下からの評価

本小節では交換子 $\mathbf{D}B = \mathrm{i}[H, B]$ の下からの評価を与える．Mourre 交換子との比較を与える方が，理解の助けとなるだろう．通常の Mourre 理論では作用素

$$A = \tfrac{1}{2}(\tilde{\omega} \cdot p + p \cdot \tilde{\omega}); \quad \tilde{\omega} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{grad}\, r^2.$$

が中心的な役割を果たす．このとき，

$$A = \tfrac{\mathrm{i}}{2}[H, r^2], \quad B = \mathrm{i}[H, r], \quad A = r^{1/2} B r^{1/2},$$

であり，したがって

$$\mathrm{i}[H,A]=p\cdot\tilde{h}p-\tfrac{1}{8}(\Delta^2r^2)-\tilde{\omega}\cdot(\nabla V),$$
$$\mathrm{i}[H,B]=r^{-1/2}\big(\mathrm{i}[H,A]-B^2\big)r^{-1/2}+\tfrac{1}{4}r^{-2}\omega\cdot h\omega,$$

と計算される．ただし，ここで

$$\tilde{h}=\tfrac{1}{2}\operatorname{Hess}r^2,\quad h=\operatorname{Hess}r.$$

と書いた．上の関係式と通常の Mourre 評価 [20] を組み合わせると，以下の評価を導くことができる．

命題 4.1. $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\mathcal{T}(H)$，$\sigma\in(0,\gamma(\lambda))$ とする．十分大きな $R\ge 1$ と，λ の十分小さな近傍 $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}$ をとる．このとき，任意の実数値関数 $f\in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathcal{U})$ に対し，ある $C>0$ が存在して

$$f(H)(\mathbf{D}B)f(H)\ge f(H)r^{-1/2}\big(\sigma^2-B^2\big)r^{-1/2}f(H)-Cr^{-2}$$

が成り立つ．

注意. 通常の Mourre 評価とは異なり，右辺第 1 項は両側に重み $r^{-1/2}$ を持ち，一様に正ではない．さらに $-B^2$ からの負の寄与もある．しかし，それにもかかわらず我々の交換子法は正しく機能する．これは我々の交換子評価が正値性と誤差項制御に関して，通常の Mourre 評価よりも優れた均衡を実現しているからということができる．なお，A とは異なり，B は H に対して相対有界となるということも，B を用いることの利点の一つであることに注意する．これにより交換子の定義域の問題が A に対するそれよりもやや単純になる．

4.2 上からの評価

次に H，r および B の関数の交換子に対する上からの評価を与える．比較として [13] も参照せよ．なお本小節では常に予め十分大きな $R\ge 1$ を固定しておくものとする．

まず次の用語を導入しよう．

定義 4.2. T を $\mathcal{H}$ 上の線形作用素で $\mathcal{D}(T)\supset L^2_\infty:=\bigcap_{s\in\mathbb{R}}L^2_s$ を満たすものとし，$t\in\mathbb{R}$ とする．T が t **次の作用素**であるとは，各 $s\in\mathbb{R}$ に対しある $C_s>0$ が存在して，任意の $f\in L^2_\infty$ に対して

$$\|r^{s-t}Tr^{-s}f\|\le C_s\|f\|$$

が成り立つことである．これを $T=O(r^t)$ で表すことにする．もし $T=O(r^t)$ かつ $S=O(r^s)$ なら，$T^*=O(r^t)$ かつ $TS=O(r^{t+s})$ であることに注意する．

さて，**Helffer–Sjöstrand の公式**を思い出しておこう．任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{F}^t = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,\middle|\, \forall k \in \mathbb{N}_0\ \exists C_k > 0 \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R}\ \ |f^{(k)}(x)| \le C_k \langle x \rangle^{t-k} \right\}$$

とおく．任意の $f \in \mathcal{F}^t$ に対し，ある拡張 $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{C})$，$\tilde{f}_{|\mathbb{R}} = f$，が存在して以下を満たすことが知られている：ある $C > 0$ が存在して任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し

$$|\tilde{f}(z)| \le C \langle z \rangle^t$$

が成り立つ；また任意の $k \in \mathbb{N}_0$ に対しある $C_k > 0$ が存在して，任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し

$$\left|(\bar{\partial}\tilde{f})(z)\right| \le C_k |\operatorname{Im} z|^k \langle z \rangle^{t-k-1}$$

が成り立つ．このような $\tilde{f}$ を f の**概解析拡張**と呼ぶ．

補題 4.3. T を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とし，$f \in \mathcal{F}^t$，$t \in \mathbb{R}$，とする．f の概解析拡張 $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{C})$ を一つとって

$$\mathrm{d}\mu_f(z) = \pi^{-1}(\bar{\partial}\tilde{f})(z)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v; \quad z = u + \mathrm{i}v,$$

とおく．このとき，任意の $k \in \mathbb{N}_0$，$k > t$，に対して，作用素 $f^{(k)}(T) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ は

$$f^{(k)}(T) = (-1)^k k! \int_{\mathbb{C}} (T - z)^{-k-1}\,\mathrm{d}\mu_f(z)$$

と表される．

Helffer–Sjöstrand の公式を用いると，H，r および B の関数の交換子を以下のように表し，評価することができる．

命題 4.4. 1. $f \in \mathcal{F}^0$ なら，$f(H) = O(r^0)$ である．

2. $f \in \mathcal{F}^t$，$t < 1/2$ とし，$s \in \mathbb{R}$ とする．このとき，

$$\mathrm{i}[f(H), r^s] = -s \int_{\mathbb{C}} (H - z)^{-1} \big(\operatorname{Re}(r^{s-1}\omega \cdot p)\big)(H - z)^{-1}\,\mathrm{d}\mu_f(z)$$

と表せ，特に $\mathrm{i}[f(H), r^s] = O(r^{s-1})$ である．

命題 4.5. 1. $F \in \mathcal{F}^0$ なら，$F(B) = O(r^0)$ である．

2. $F \in \mathcal{F}^t$，$t < 1$ とし，$s \in \mathbb{R}$ とする．このとき，

$$\mathrm{i}[F(B), r^s] = -s \int_{\mathbb{C}} (B - z)^{-1} \big(\omega^2 r^{s-1}\big)(B - z)^{-1}\,\mathrm{d}\mu_F(z)$$

と表せ，特に $\mathrm{i}[F(B), r^s] = O(r^{s-1})$ である．

命題 4.6. $f \in \mathcal{F}^t$，$t < -1/2$，かつ $F \in \mathcal{F}^{t'}$，$t' < 1$，とする．このとき，

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}[f(H), B] &= -\int_{\mathbb{C}} (H - z)^{-1} \big(\mathbf{D}B\big) (H - z)^{-1} \, \mathrm{d}\mu_f(z), \\
\mathrm{i}[f(H), F(B)] &= -\int_{\mathbb{C}} (B - z)^{-1} \big(\mathrm{i}[f(H), B]\big) (B - z)^{-1} \, \mathrm{d}\mu_F(z)
\end{aligned}$$

と表せ，特に

$$\mathrm{i}[f(H), B] = O(r^{-1}), \quad \mathrm{i}[f(H), F(B)] = O(r^{-1})$$

である．

最後に，二重交換子 $\mathrm{i}[\mathbf{D}B, B]$ および，より一般に，$\mathrm{i}[\mathrm{i}[f(H), B], B]$ を評価しよう．ポテンシャル V には余計な微分可能性を仮定しないため，交換子 $\mathrm{i}[\mathbf{D}B, B]$ の実現は極めて非自明である．実際，その正当化には作用素 B に対する技巧的な分解が必要であり，本稿では省略せざるを得ない．精密な議論については [1] を参照せよ．通常の Mourre 理論と同様に，現段階では我々の方法でもこの二重交換子を避けることはできない．[5] も参照せよ．

命題 4.7. (3.2) と同様に，$\kappa = \delta/(1 + 2\delta)$ とおく．このとき，

$$(H - \mathrm{i})^{-1} \big(\mathrm{i}[\mathbf{D}B, B]\big) (H + \mathrm{i})^{-1} = O(r^{-1-2\kappa})$$

である．

系 4.8. $f \in \mathcal{F}^t$，$t < -1$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\big[\mathrm{i}[f(H), B], B\big] = &-\int_{\mathbb{C}} (H - z)^{-1} \big(\mathrm{i}[\mathbf{D}B, B]\big) (H - z)^{-1} \mathrm{d}\mu_f(z) \\
&+ 2 \int_{\mathbb{C}} (H - z)^{-1} (\mathbf{D}B) (H - z)^{-1} (\mathbf{D}B) (H - z)^{-1} \mathrm{d}\mu_f(z)
\end{aligned}$$

と表せ，特に，

$$\mathrm{i}\big[\mathrm{i}[f(H), B], B\big] = O(r^{-1-2\kappa})$$

である．

参考文献

[1] T. Adachi, K. Itakura, K. Ito, E. Skibsted, *New methods in spectral theory of N-body Schrodinger operators*, arXiv:1804.07874 [math-ph].

[2] T. Adachi, K. Itakura, K. Ito, E. Skibsted, *Commutator methods for N-body Schrödinger operators*, submitted to the Proceedings of International Conference Spectral Theory and Mathematical Physics (STMP 2018).

[3] S. Agmon, L. Hörmander, *Asymptotic properties of solutions of differential equations with simple characteristics*, J. d'Analyse Math. **30** (1976), 1–38.

[4] W. Amrein, A. Boutet de Monvel-Bertier, V. Georgescu, *On Mourre's approach to spectral theory*, Helv. Phys. Acta **62** no. 1 (1989), 1–20.

[5] W. Amrein, A. Boutet de Monvel-Bertier, V. Georgescu, *C_0-groups, commutator methods and spectral theory of N-body Hamiltonians*, Basel–Boston–Berlin, Birkhäuser, 1996.

[6] A. Boutet de Monvel, V. Georgescu and M. Mantoiu, *Mourre Theory in a Besov Space Setting*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **310** (1990), 233–237.

[7] A. Boutet de Monvel, V. Georgescu and M. Mantoiu, *Locally Smooth Operators and the Limiting Absorption Principle for N-Body Hamiltonians*, Reviews in Math. Physics **5** no. 1 (1993), 105–189.

[8] A. Boutet de Monvel-Bertier, V. Georgescu, A. Soffer, *N-body Hamiltonians with hard-core interactions*, Rev. Math. Phys. **6** no. 4 (1994), 515–596.

[9] A. Boutet de Monvel-Bertier, D. Manda, R. Purice, *The commutator method for form-relatively compact perturbations*, Lett. Math. Phys. **22** (1991), 211–223.

[10] J. Dereziński, *Asymptotic completeness for N-particle long-range quantum systems*, Ann. of Math. **38** (1993), 427–476.

[11] R. Froese and I. Herbst, *Exponential bounds and absence of positive eigenvalues for N-body Schrödinger operators*, Comm. Math. Phys. **87** no. 3 (1982/83), 429–447.

[12] V. Georgescu, *On the unique continuation property for Schrödinger Hamiltonians*, Helvetica Physica Acta **52** (1979), 655–670.

[13] C. Gérard, H. Isozaki and E. Skibsted, *N-body resolvent estimates*, J. Math. Soc. Japan **48** no. 1 (1996), 135–160.

[14] G.M. Graf, *Asymptotic completeness for N-body short-range quantum systems: a new proof*, Commun. Math. Phys. **132** (1990), 73–101.

[15] M. Griesemer, *N-body quantum systems with singular potentials*, Ann. Inst. Henri Poincaré **69** no. 2 (1998), 135–187.

[16] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. IV*, Berlin, Springer 1983–85.

[17] W. Hunziker, I. M. Sigal, *The quantum N-body problem*, J. Math. Phys. **41** (2000) no. 6, 3448–3510.

[18] H. Isozaki, *A generalization of the radiation condition of Sommerfeld for N-body Schrödinger operators*, Duke Math. J. **74** no. 2 (1994), 557–584.

[19] 磯崎洋，多体シュレーディンガー方程式，シュプリンガー・フェアラーク東京，2004年.

[20] K. Ito, E. Skibsted, *Absence of positive eigenvalues for hard-core N-body systems*, Ann. Inst. Henri Poincaré **15** (2014), 2379–2408.

[21] K. Ito, E. Skibsted, *Rellich's theorem and N-body Schrödinger operators*, Reviews Math. Phys. **28** no. 5 (2016), 12 pp.

[22] K. Ito, E. Skibsted, *Stationary scattering theory on manifolds, I*, arXiv:1602.07488 [math-ph].

[23] A. Jensen, P. Perry, *Commutator methods and Besov space estimates for Schrödinger operators*, J. Operator Theory **14** (1985), 181–188.

[24] R. Lavine, *Absolute continuity of Hamiltonian operators with repulsive potential*, Proc. Amer. Math. Sot. **22** (1969), 55–60.

[25] R. Lavine, *Absolute continuity of positive spectrum for Schrödinger operators with long-range potentials*, J. Funct. Anal. **12** (1973), 30–54.

[26] É. Mourre, *Absence of singular continuous spectrum for certain selfadjoint operators*, Commun. Math. Phys. **78** no. 3 (1980/81), 391–408.

[27] É. Mourre, *Operateurs conjugués et propriétés de propagation*, Commun. Math. Phys. **91** (1983), 297–300.

[28] J.S. Møller, *An abstract radiation condition and applications to N-body systems*, Rev. Math. Phys. **12** no. 5 (2000), 767–803.

[29] P. Perry, *Exponential bounds and semifiniteness of point spectrum for N-body Schrödinger operators*, Commun. Math. Phys. **92** (1984), 481–483.

[30] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics I-IV*, New York, Academic Press 1972-78.

[31] E. Skibsted, *Propagation estimates for N-body Schrödinger operators*, Commun. Math. Phys. **142** (1991), 67–98.

[32] H. Tamura, *Principle of limiting absorption for N-body Schrödinger operators - a remark on the commutator method*, Letters Math. Phys. **17** (1989), 31–36.

[33] D. Yafaev, *Eigenfunctions of the continuous spectrum for the N-particle Schrödinger operator*, Spectral and scattering theory (Sanda, 1992), 259–286, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **161**, Dekker, New York, 1994.

[34] D. Yafaev, *Radiation conditions and scattering theory for N-particle Hamiltonians*, Commun. Math. Phys. **154** no. 3 (1993), 523–554.

[35] K. Yosida, *Functional analysis*. Reprint of the sixth (1980) edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. xii+501.

[36] T. Wolff, *Recent work on sharp estimates in second-order elliptic unique continuation problems*, J. Geom. Anal. **3** no. 6 (1993), 621–650.