Screenings and Applications

アルバータ大学　元良 直輝
Naoki Genra
University of Alberta

1　動機

スクリーニング作用素は頂点代数の自由場実現の特徴づけに用いられる重要な作用素の一つである．最も有名な例として Virasoro 代数の自由場実現がある．$\alpha(z)$ をレベル $2(k+2)$ の Heisenberg 頂点代数を生成する場とする．すなわち，

$$\alpha(z)\alpha(w) \sim \frac{2(k+2)}{(z-w)^2}$$

なる OPE を満たす．このとき中心電荷

$$c(k) = 1 - 6\left(\sqrt{k+2} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)^2 \tag{1.1}$$

の Virasoro 頂点代数は（k が generic であれば）Heisenberg 頂点代数に作用するスクリーニング作用素 $\int \mathrm{e}^{\alpha}(z)\, dz$ の核と一致する．ただし $\mathrm{e}^{\alpha}(z)$ は

$$\mathrm{e}^{\alpha}(z) = s^{\alpha} z^{\alpha_{(0)}} \exp\left(-\sum_{n<0} \alpha_{(n)} \frac{z^{-n}}{n}\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \alpha_{(n)} \frac{z^{-n}}{n}\right)$$

（s^{α} は最高ウェイトのシフト作用素）で定義される，Heisenberg 頂点代数の Fock 表現の間の交絡作用素である．一方で，Virasoro 代数は中心電荷 $c(k)$ にしか依存しない．そこで，$\sqrt{k+2} \mapsto -\frac{1}{\sqrt{k+2}}$ なる変換を考えると，$c(k)$ の値は変わらないため Virasoro 代数の構造は変化しない．したがって

$$\mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{\alpha}(z)\, dz \simeq \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+2}}(z)\, dz \tag{1.2}$$

なる同型を得ることができる．次に単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に付随するレベル k の主 $\mathcal{W}$ 代数の自由場実現を考える．k が generic であれば，主 $\mathcal{W}$ 代数はスクリーニング作用素を用いて Heisenberg 頂点代数の部分代数として実現される：

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}) = \bigcap_{i=1}^{\mathrm{rank}\,\mathfrak{g}} \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i}{k+h^\vee}}(z)\, dz.$$

すると Virasoro 代数の自由場実現で得られた双対性を用いれば，$\mathcal{W}$ 代数の Feigin-Frenkel 双対性 [FF3]

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}) \simeq \bigcap_{i=1}^{\mathrm{rank}\,\mathfrak{g}} \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{\alpha_i^\vee}(z)\, dz = \mathcal{W}^{\ell}({}^L\mathfrak{g})$$

を導くことができる．ただし k と ℓ は $r^\vee(k+h^\vee)(\ell + {}^Lh^\vee) = 1$ なる関係式を満たす（$r^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の lacing 数，$h^\vee$，${}^Lh^\vee$ はそれぞれ $\mathfrak{g}$ およびその Langlands 双対 ${}^L\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数）．

スクリーニング作用素が重要であるもう一つの理由として，コセット構成の証明への応用がある．$\mathfrak{g}$ を単純 Lie 代数，$V^k(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ に付随するレベル k のアファイン頂点代数，$L_k(\mathfrak{g})$ を $V^k(\mathfrak{g})$ の単純商とする．脇本と Feigin-Frenkel によって，$V^k(\mathfrak{g})$ の自由場実現が知られている：

$$V^k(\mathfrak{g}) \hookrightarrow (\beta\gamma)^{\otimes \dim \mathfrak{n}_+} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \tag{1.3}$$

ただし $\mathfrak{n}_+$ は上三角べき零部分代数，$\pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee}$ は Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ に付随するレベル $k+h^\vee$ の Heisenberg 頂点代数，$\beta\gamma$ は $\beta\gamma$ システム頂点代数である．これは $V^k(\mathfrak{g})$ の脇本表現と呼ばれており，(k が generic であれば）射の像はスクリーニング作用素の核として特徴づけることができる．今，$\mathfrak{g}$ を ADE 型と仮定するし，k を generic とする．このときループ代数 $L\mathfrak{n}_+ = \mathfrak{n}_+[t,t^{-1}]$ の半無限コホモロジーの間の埋め込み

$$H^{\frac{\infty}{2}+0}(L\mathfrak{n}_+, V^{k-1}(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g})) \hookrightarrow H^{\frac{\infty}{2}+0}(L\mathfrak{n}_+, (\beta\gamma)^{\dim \mathfrak{n}_+} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee-1} \otimes L_1(\mathfrak{g}))$$

が誘導される．両辺の Heisenberg 代数 π の作用に関するコセットをとると

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Com}\left(\pi, H^{\frac{\infty}{2}+0}(L\mathfrak{n}_+, V^{k-1}(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g}))\right) \simeq \mathrm{Com}\left(V^k(\mathfrak{g}), V^{k-1}(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g})\right),\\
&\mathrm{Com}\left(\pi, H^{\frac{\infty}{2}+0}(L\mathfrak{n}_+, (\beta\gamma)^{\dim \mathfrak{n}_+} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee-1} \otimes L_1(\mathfrak{g}))\right) \simeq \pi_{\mathfrak{h}}^{\ell+h^\vee}
\end{aligned}$$

なる同型が得られるので，上の埋め込みは

$$\mathrm{Com}\left(V^k(\mathfrak{g}), V^{k-1}(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g})\right) \hookrightarrow \pi_{\mathfrak{h}}^{\ell+h^\vee}$$

を与えている．$V^k(\mathfrak{g})$ の脇本表現 (1.3) はスクリーニング作用素によって特徴づけられていたから，コセット $\mathrm{Com}\left(V^k(\mathfrak{g}), V^{k-1}(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g})\right)$ の $\pi_{\mathfrak{h}}^{\ell+h^\vee}$ への埋め込みもスクリーニング作用素で特徴付けられる．実際，

$$\mathrm{Com}\left(V^k(\mathfrak{g}), V^{k-1}(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g})\right) \simeq \bigcap_{i=1}^{\mathrm{rank}\,\mathfrak{g}} \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i}{\ell+h^\vee}}(z)\,dz$$

なる同型が得られる．右辺は主 $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{g})$ と同型だったので，結果として主 $\mathcal{W}$ 代数のコセット構成が得られた．ただし k と ℓ は $1/(k+h^\vee) + 1/(\ell+h^\vee) = 1$ で関係づけられている．これは $\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{g})$ の荒川-Creutzig-Linshaw コセット構成 [ACL] と呼ばれ，Feigin によって長年予想されていた問題の解決につながった．また，k が generic の場合に $V^{k-1}(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g})$-加群 $V^{k-1}(\mu) \otimes L_1(\nu)$ の $V^k(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{W}^\ell(\mathfrak{g})$-加群としての分解

$$V^{k-1}(\mu) \otimes L_1(\nu) = \bigoplus_{\substack{\lambda \in P_+\\ \lambda-\mu-\nu \in Q}} V^k(\lambda) \otimes T^\ell_{\mu,\lambda}$$

を考える．ただし μ は支配的整ウェイトの集合 P_+ の元，ν は P_+ の中で最高ルート θ での値が 1 以下のウェイトの集合 P_+^1 の元，$V^{k-1}(\mu)$ は μ に付随する有限次元単純 $\mathfrak{g}$ 加群から誘導される Weyl 加群，$L_1(\nu)$ は $V^1(\nu)$ の単純商加群，$T^\ell_{\mu,\lambda}$ は $V^k(\lambda)$ の係数加群として得られる $\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{g})$-加群である．すると $T^\ell_{\mu,\lambda}$ は

$$T^\ell_{\mu,\lambda} \;=\; \bigcap_{i=1}^{\mathrm{rank}\,\mathfrak{g}} \mathrm{Ker} \int_\Gamma \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i}{\ell+h^\vee}}(z_1)\cdots \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i}{\ell+h^\vee}}(z_{n_i})dz \;=\; H^0_{DS}\left(M^\ell(\mu-(\ell+h^\vee)\lambda)\right)$$

なる表示を持つことがわかる．最後の式は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Verma 加群の Drinfeld-Sokolov コホモロジー還元である．この表示から $T^\ell_{\mu,\lambda}$ がスペクトラルフローと呼ばれる表現のツイストに関して良い性質を持つことがわかり，量子幾何学的 Langlnads 予想から関連して生まれた問題の解決の一助につながっている．

以上のように，スクリーニング作用素は頂点代数の構造を明らかにするだけではなく，双対性や表現の解析において役立つ重要なツールである．本稿では具体例を通じて，スクリーニング作用素の計算方法やその応用について述べる．

2　スクリーニング作用素の例

2.1　$\beta\gamma$ システム

$\beta\gamma$ システムとは

$$\beta(z)\gamma(w) \sim \frac{1}{z-w}, \quad \beta(z)\beta(w) \sim 0 \sim \gamma(z)\gamma(w).$$

を満たす場 $\beta(z)$ と $\gamma(z)$ で生成される頂点代数である．L を $(u|u) = 1 = -(v|v), (u|v) = 0$ を満たす u と v で生成される整数格子 $L = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$，$V_L$ を L に付随する頂点代数，V_{u+v} を $u(z), v(z), \mathrm{e}^{u+v}(z), \mathrm{e}^{-u-v}(z)$ で生成される V_L の部分頂点代数とする．このとき $\beta\gamma$ システムの V_{u+v} への埋め込み

$$\beta\gamma \hookrightarrow V_{u+v}, \quad \beta(z) \mapsto \mathrm{e}^{u+v}(z), \quad \gamma(z) \mapsto -:u(z)\mathrm{e}^{-u-v}(z):$$

が存在し，しかも埋め込みの像はスクリーニング作用素の核として特徴づけされる：

$$\beta\gamma \simeq \mathrm{Ker}\left(\int \mathrm{e}^{u}(z)\, dz \colon V_{u+v} \to V_L\right).$$

ここで $\int \mathrm{e}^{u}(z)\, dz$ は形式的留数であり，$\mathrm{e}^{u}(z)$ の z^{-1} の係数 $\mathrm{e}^{u}_{(0)}$ を表す．

2.2　Virasoro 頂点代数

$$L(z)L(w) \sim \frac{\partial L(w)}{z-w} + \frac{L(w)}{(z-w)^2} + \frac{c/2}{(z-w)^4}, \quad c \in \mathbb{C}$$

を満たす場 $L(z)$ で生成される頂点代数 Vir^c を中心電荷 c の Virasoro 頂点代数という．$k \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$ に対して $c(k)$ を (1.1) で定義する．Heisenberg 頂点代数 π を

$$\alpha(z)\alpha(w) \sim \frac{2(k+2)}{(z-w)^2}$$

を満たす場 $\alpha(z)$ で生成される頂点代数として定める．このとき中心電荷 $c(k)$ の Virasoro 頂点代数の Heisenberg 頂点代数への埋め込み

$$\mathrm{Vir}^{c(k)} \hookrightarrow \pi, \quad L(z) \mapsto \frac{1}{4(k+2)}\left(:\alpha(z)^2: + 2(k+1)\partial\alpha(z)\right)$$

が存在する．k が generic の場合，この埋め込みの像は再びスクリーニング作用素の核として特徴づけされる：

$$\mathrm{Vir}^{c(k)} \simeq \mathrm{Ker}\left(\int \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+2}}(z)\, dz \colon \pi \to \pi_{-\alpha}\right).$$

ただし $\pi_{-\alpha}$ は最高ウェイトが $-\alpha$ の π の Fock 表現である．

2.3　計算の仕方：**OPEdefs.m**

$\beta\gamma$ システムの場合はスクリーニング作用素が V_L の頂点作用素として記述されているため，埋め込みの像が実際にその核に入ってることを確認することは簡単だが，Virasoro 頂点代数のスクリーニング作用素はそれに比べて複雑である．そこでスクリーニング作用素の核を具体的に調べるために，ここでは Mathematica

のパッケージである OPEdefs.m [Thi] を用いた計算方法を紹介する．Virasoro 頂点代数の π への埋め込みを例として考える．まず π の場 $\alpha(z)$ と π へ作用する頂点作用素 $\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+2}}(z)$ の間の関係は

$$\alpha(z)\alpha(w) \sim \frac{2(k+2)}{(z-w)^2}, \quad \alpha(z)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+2}}(w) \sim \frac{-2\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+2}}(w)}{z-w}$$

で与えられる．ただし $\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+2}}(z)$ 同士の OPE はここでは考える必要はないので省略する．また $\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+2}}(z)$ は定義から関係式

$$\partial\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+2}}(z) = -\frac{1}{k+2}:\alpha(z)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+2}}(z):$$

を満たしている．以上のデータを元に

$$\int \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+2}}(z)\,dz\colon \pi \to \pi_{-\alpha}$$

の核を計算する．π の共形ウェイト 1 のところには核となる元はいないので，共形ウェイト 2 のところに核となる元がいないか考える．具体的には

$$\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+2}}(z)\left(s:\alpha(w)^2: + t\partial\alpha(w)\right) \text{の}\frac{1}{z-w}\text{の係数} = 0$$

となる変数 $s, t \in \mathbb{C}$ の解を求めればよい．例えば次のようなプログラムを実行すればよい：

```
1  In[1]:= << OPEdefs.m
2  In[2]:= Bosonic[a, e];
3  OPE[a, a] = MakeOPE[{2 (k + 2) One, 0}];
4  OPE[a, e] = MakeOPE[{-2 e}];
5  In[5]:=
6  e’ = NO[-a/(k+2),e];
7  In[7]:=
8  OPESimplify[OPEPole[1][e,s NO[a, a] + t a’], Factor]
9  Out[7]= (2(2 s + 2 k s - t) NO[a, e])/(2 + k)
10 In[8]:= Solve[{2 s + 2 k s - t == 0}, {t}]
11 Out[8]= {{t -> 2 (s + k s)}}
12 In[9]:= OPESimplify[s NO[a, a] + t a’ /. {t -> 2 (s + k s)}, Factor]
13 Out[9]= s NO[a, a] + 2 (1 + k) s a’
```

プログラムの 2 行目の a, e はそれぞれ $\alpha(z), \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+2}}(z)$ を表す．$\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+2}}(z)$ は場ではないが，$\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+2}}(z)$ 同士の場を考える必要はないので，形式的に場とみなして計算してよい．8 行目で OPE $\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+2}}(z)\left(s:\alpha(w)^2: + t\partial\alpha(w)\right)$ の $(z-w)^{-1}$ の係数を取り出し，10 行目でその係数が 0 となる s, t の解を求めている．結果として $t = 2(k+1)s$ という関係式が得られ，

$$s:\alpha(z)^2: + 2s(k+1)\partial\alpha(z)$$

が核の元であることがわかった．これが Virasoro 頂点代数の場 $L(z)$ と同じ OPE を満たすという条件を加えることで，最終的に $s = 1/4(k+2)$ が得られる．

2.4 アファイン $\mathfrak{sl}_2$ 頂点代数

$\mathfrak{sl}_2$ に付随するレベル k のアファイン頂点代数 $V^k(\mathfrak{sl}_2)$ は

$$h(z)h(w) \sim \frac{2k}{(z-w)^2}, \quad h(z)e(w) \sim \frac{2e(w)}{z-w}, \quad h(z)f(w) \sim \frac{-2f(w)}{z-w},$$
$$e(z)f(w) \sim \frac{h(w)}{z-w} + \frac{k}{(z-w)^2}, \quad e(z)e(w) \sim 0 \sim f(z)f(w).$$

を満たす 3 つの場 $e(z), h(z), f(z)$ で生成された頂点代数である．このとき埋め込み [Wak]

$$\begin{aligned}
V^k(\mathfrak{sl}_2) &\hookrightarrow \beta\gamma\otimes\pi,\\
e(z) &\mapsto \beta(z),\\
h(z) &\mapsto -2:\gamma(z)\beta(z): + \alpha(z),\\
f(z) &\mapsto -:\gamma(z)^2\beta(z): + k\partial\gamma(z) + \gamma(z)\alpha(z)
\end{aligned}$$

が存在し，k が generic のとき埋め込みの像はスクリーニング作用素の核として特徴づけされる：

$$V^k(\mathfrak{sl}_2) \simeq \mathrm{Ker}\left(\int \beta(z)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+2}}(z)\,dz\colon \beta\gamma\otimes\pi \to \beta\gamma\otimes\pi_{-\alpha}\right).$$

3 アファイン頂点代数のスクリーニング作用素

3.1 一般の $\mathfrak{g}$ への一般化

$V^k(\mathfrak{sl}_2)$ のスクリーニング作用素による実現を，一般の単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に付随するレベル k のアファイン頂点代数 $V^k(\mathfrak{g})$ の場合に一般化させたい．これは Feigin-Frenkel による旗多様体を用いた方法がある [FF1, Fre]．一般的なレシピをざっくりと紹介する：

1. $\mathfrak{g}$ の三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ を考え，下三角の Borel 部分代数 $\mathfrak{b}_- = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ をとる．

2. G を $\mathrm{Lie}\,G = \mathfrak{g}$ なる連結単連結 Lie 群，B_- を $\mathrm{Lie}\,B_- = \mathfrak{b}_-$ なる Borel 部分群，N_+ を $\mathrm{Lie}\,N_+ = \mathfrak{n}_+$ なるべき零部分群とする．G による旗多様体 G/B_- への左作用 $G \curvearrowright G/B_-$ を考え，その微分をとると微分表現 $\mathfrak{g} \to \mathcal{D}_{G/B_-}$ が得られる．ただし $\mathcal{D}_{G/B_-}$ は G/B_- 上の微分環である．

3. G の単位元 1 を含む同値類 $[1] \in G/B_-$ の N_+ 軌道 $U = N_+\cdot[1]$ をとると，U は G/B_- の稠密なアファイン開集合である．

4. $\mathfrak{g}$ の微分表現を U 上に制限すると $U \simeq N_+$ なので，Lie 代数の射 $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{D}_{N_+}$ が得られる．ただし $\mathcal{D}_{N_+}$ は N_+ 上の微分環である．

5. 適切なベクトル空間 V による $\mathfrak{g}$ の忠実表現 $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を用いれば，$\mathfrak{g}$ も N_+ も行列とみなせる．$\exp\colon \mathfrak{n}_+ \xrightarrow{\sim} N_+$ によって N_+ に座標を入れて一般の元 $X \in N_+$ をとると ρ による $a \in \mathfrak{g}$ の作用は Frenkel の式

$$a\cdot X = -X(X^{-1}aX)_+ \tag{3.1}$$

によって計算できる．ただし右辺の $(\cdot)_+$ は射影 $\mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{n}_+$ であり，a や X は行列とみなして積を計算している．

6. Δ_+ を正ルートの集合として x_α を $\alpha \in \Delta_+$ に対応するルートベクトル e_α の座標とすれば，$\rho(a)$ は多項式環 $\mathbb{C}[N_+] = \mathbb{C}[x_\alpha|\alpha\in\Delta_+]$ の元と $\mathbb{C}[N_+]$ 上の微分 $\partial_{x_\alpha} = \partial/\partial x_\alpha$ たちの組み合わせとなる．

7. 最後に $\partial_{x_\alpha}, x_\alpha$ を $\beta\gamma$ システム $\beta_\alpha, \gamma_\alpha$ に取り替えて，$\mathfrak{h}$ に付随するレベル $k+h^\vee$ の Heisenberg 頂点代数 $\pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee}$ の場を適当に付け加えることで ρ のアファイン化

$$\widehat{\rho}\colon V^k(\mathfrak{g}) \hookrightarrow (\beta\gamma)^{\otimes \dim\mathfrak{n}_+}\otimes\pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee}$$

を構成することができる．

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ の場合を例に考える．アファイン同型 $\mathfrak{n}_+ \simeq N_+$ を

$$\mathfrak{n}_+ \ni \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto X = \mathrm{e}^{-x_1 e_{12}} \mathrm{e}^{-x_3 e_{13}} \mathrm{e}^{-x_2 e_{23}} = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 & -x_3 + x_1 x_2 \\ 0 & 1 & -x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N_+$$

で与える．このとき Frenkel の式 (3.1) を計算すると

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 2x_1 & x_3 - x_1 x_2 \\ 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -x_1 & x_3 - x_1 x_2 \\ 0 & 0 & 2x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

などといった結果が得られる．これを $a \in \mathfrak{sl}_3$ の X への作用の結果とみると，次のような微分の形で表示できる：

$$\begin{aligned}
&e_1 \mapsto \partial_{x_1}, \\
&e_2 \mapsto \partial_{x_2} + x_1 \partial_{x_3}, \\
&h_1 \mapsto -2x_1 \partial_{x_1} + x_2 \partial_{x_2} - x_3 \partial_{x_3}, \\
&h_2 \mapsto x_1 \partial_{x_1} - 2x_2 \partial_{x_2} - x_3 \partial_{x_3}, \\
&f_1 \mapsto -x_1^2 \partial_{x_1} + (x_1 x_2 - x_3) \partial_{x_2} - x_1 x_3 \partial_{x_3}, \\
&f_2 \mapsto x_3 \partial_{x_1} - x_2^2 \partial_{x_2},
\end{aligned}$$

ただし $\{e_1, e_2, h_1, h_2, f_1, f_2\}$ は Chevalley の生成元である．いま ∂_{x_i}, x_i を β_i, γ_i に置き換えて，次のように適切に元を付け加える（: :の記号は省略，下線部が付け加えた項）：

$$\begin{aligned}
&e_1 \mapsto \beta_1, \\
&e_2 \mapsto \beta_2 + \gamma_1 \beta_3, \\
&h_1 \mapsto -2\gamma_1 \beta_1 + \gamma_2 \beta_2 - \gamma_3 \beta_3 + \underline{\alpha_1}, \\
&h_2 \mapsto \gamma_1 \beta_1 - 2\gamma_2 \beta_2 - \gamma_3 \beta_3 + \underline{\alpha_2}, \\
&f_1 \mapsto -\gamma_1^2 \beta_1 + (\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_3) \beta_2 - \gamma_1 \gamma_3 \beta_3 + \underline{k \partial \gamma_1 + \gamma_1 \alpha_1}, \\
&f_2 \mapsto \gamma_3 \beta_1 - \gamma_2^2 \beta_2 + \underline{(k+1) \partial \gamma_2 + \gamma_2 \alpha_2}.
\end{aligned}$$

するとこれは埋め込み

$$V^k(\mathfrak{sl}_3) \hookrightarrow (\beta\gamma)^{\otimes 3} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+3}$$

を定義する．k が generic の場合，この埋め込みはスクリーニング作用素の核として特徴づけできる．スクリーニング作用素の作り方について $\mathfrak{sl}_3$ の場合を例に説明する．これまで G の U への左作用を考えていたが，$U \simeq N_+$ には N_+ の右作用 $U \curvearrowleft N_+$ もある．これを微分して得られる反 Lie 代数の射 $\mathfrak{n}_+ \to \mathcal{D}_{N_+}$ を考えると，これは

$$X \cdot a = -Xa, \quad a \in \mathfrak{n}_+, \quad X \in N_+$$

によって計算できる．$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ の場合，

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．したがって

$$e_1 \mapsto \partial_{x_1} + x_2 \partial_{x_3}, \quad e_2 \mapsto \partial_{x_2}$$

となることがわかる．同様に ∂_{x_i}, x_i を β_i, γ_i に置き換えて，$\mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i}{k+3}}(z)$ と組み合わせると，実は前述の埋め込み $V^k(\mathfrak{sl}_3) \hookrightarrow (\beta\gamma)^{\otimes 3} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+3}$ を特徴づけるスクリーニング作用素になっている．すなわち，k が genric であれば

$$V^k(\mathfrak{sl}_3) \simeq \operatorname{Ker} \int (\beta_1 + \gamma_2\beta_3)(z)\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_1}{k+3}}(z)\, dz \cap \operatorname{Ker} \int \beta_2(z)\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_2}{k+3}}(z)\, dz$$

が成り立つ．注意であるが，構成からこの埋め込みやスクリーニング作用素は N_+ の座標の取り方に依存している．実際，前述と異なるアファイン同型

$$\mathfrak{n}_+ \ni \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto X = \mathrm{e}^{-x_1 e_{12} - x_2 e_{23} - x_3 e_{13}} = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 & -x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2 \\ 0 & 1 & -x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N_+$$

によって N_+ に座標を入れた場合を考えると，同様に計算すれば埋め込み

$$V^k(\mathfrak{sl}_3) \hookrightarrow (\beta\gamma)^{\otimes 3} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+3}$$

が次のような射として定義される：

$$\begin{aligned}
&e_1 \mapsto \beta_1 - \frac{1}{2}\gamma_2\beta_3, \\
&e_2 \mapsto \beta_2 + \frac{1}{2}\gamma_1\beta_3, \\
&h_1 \mapsto -2\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 - \gamma_3\beta_3 + \alpha_1, \\
&h_2 \mapsto \gamma_1\beta_1 - 2\gamma_2\beta_2 - \gamma_3\beta_3 + \alpha_2, \\
&f_1 \mapsto -\gamma_1^2\beta_1 + \left(\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 - \gamma_3\right)\beta_2 - \left(\frac{1}{4}\gamma_1^2\gamma_2 + \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_3\right)\beta_3 + \left(k + \frac{1}{2}\right)\partial\gamma_1 + \gamma_1\alpha_1, \\
&f_2 \mapsto \left(\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 + \gamma_3\right)\beta_1 - \gamma_2^2\beta_2 + \left(\frac{1}{4}\gamma_1\gamma_2^2 - \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3\right)\beta_3 + \left(k + \frac{1}{2}\right)\partial\gamma_2 + \gamma_2\alpha_2.
\end{aligned}$$

この埋め込みを特徴づけるスクリーニング作用素も同様に計算され，

$$V^k(\mathfrak{sl}_3) \simeq \operatorname{Ker} \int (\beta_1 + \frac{1}{2}\gamma_2\beta_3)(z)\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_1}{k+3}}(z)\, dz \cap \operatorname{Ker} \int (\beta_2 - \frac{1}{2}\gamma_1\beta_3)(z)\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_2}{k+3}}(z)\, dz$$

となることがわかる．一般の $\mathfrak{g}$ でも同様の計算で $V^k(\mathfrak{g})$ の $(\beta\gamma)^{\otimes \dim \mathfrak{n}_+} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee}$ への埋め込みや対応するスクリーニング作用素を具体的に記述することができる．

3.2 スーパーへの一般化（予想）

$\mathfrak{g}$ を basic classical スーパー Lie 代数とする．スーパー代数群 G のスーパー旗多様体 G/B_- への作用を用いることでスーパー Lie 代数の射

$$\mathfrak{g} \to \mathcal{D}_{N_+}$$

を構成できる．ただし $\mathcal{D}_{N_+}$ は N_+ 上のスーパー微分環である．Frenkel の式 (3.1) に対応する計算式は

$$a \cdot X = -X(X^{-1}((-1)^{\bar{a}\overline{X}} aX))_+, \quad a \in \mathfrak{g}, \quad X \in N_+$$

で与えられる．ただし行列の積は $(a_{ij})(b_{ij}) = (\sum_k b_{kj}a_{ik})$ と定義する．even のルートベクトルに対応する座標とその偏微分のペア ∂_{x_i}, x_i は $\beta\gamma$ システム β_i, γ_i に，odd のルートベクトルに対応するペア ∂_{x_i}, x_i は bc システム b_i, c_i に置き換えて，同様にアファイン化

$$\widehat{\rho}\colon V^k(\mathfrak{g}) \hookrightarrow (\beta\gamma)^{\otimes \dim(\mathfrak{n}_+)_{\bar{0}}} \otimes (bc)^{\otimes \dim(\mathfrak{n}_+)_{\bar{1}}} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee}$$

が得られると予想している（中塚成徳氏との共同研究）．実際，$\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}_{1|2}$ の場合，

$$V^k(\mathfrak{osp}_{1|2}) \hookrightarrow \beta\gamma \otimes bc \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+\frac{3}{2}}$$

という埋め込みが

$$\begin{aligned}
&e_\alpha \mapsto b - c\beta, \\
&e_{2\alpha} \mapsto \beta, \\
&h \mapsto -\gamma\beta - \frac{1}{2}cb + \alpha, \\
&f_\alpha \mapsto \frac{1}{2}\gamma b - \frac{1}{2}\gamma c\beta + c\alpha + (k + \frac{1}{2})\partial c, \\
&f_{2\alpha} \mapsto -\gamma^2\beta - \gamma cb + 2\gamma\alpha + (k+1)(\partial c)c + k\partial\gamma,
\end{aligned}$$

によって定義される．k が generic ならば，Lie 代数の場合と同様にこの埋め込みをスクリーニング作用素の核として特徴づけられる：

$$V^k(\mathfrak{osp}_{1|2}) \simeq \mathrm{Ker} \int (b + c\beta)(z)\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+3/2}}(z)\, dz.$$

4 $\mathcal{W}$ 代数のスクリーニング作用素

4.1 $\mathcal{W}$ 代数への誘導

$\mathfrak{g}$ を単純 Lie 代数，f を $\mathfrak{g}$ のベキ零元，x を $\mathfrak{g}$ の半単純元であって $\mathrm{ad}(x)$ によって $\mathfrak{g}$ に $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-次数づけ $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ を与え，さらに次のような条件を満たしているものとする：

- $f \in \mathfrak{g}_{-1}$.
- $\mathrm{ad}(f)\colon \mathfrak{g}_j \to \mathfrak{g}_{j-1}$ は $j \geq \frac{1}{2}$ のとき単射かつ $j \leq \frac{1}{2}$ のとき全射.

すると $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ を x を含むように選べば，$\mathfrak{g}$ の三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ であって $\mathfrak{n}_+ \subset \mathfrak{g}_{\geq 0}$ となるようにできる．このとき Δ を $\mathfrak{g}$ のルート系とすると，$\Delta = \sqcup_{j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}}\Delta_j$，$\Delta_j = \{\alpha \in \Delta \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_j\}$ が成り立つ．$\Phi_{\frac{1}{2}}$ を OPE

$$\Phi_\alpha(z)\Phi_\beta(w) \sim \frac{(f|[e_\alpha, e_\beta])}{z-w}, \quad \alpha, \beta \in \Delta_{\frac{1}{2}}$$

を満たす場 $\Phi_\alpha(z)$（$\alpha \in \Delta_{\frac{1}{2}}$）たちで生成される頂点代数とする．ただし $(\cdot|\cdot)$ は $\mathfrak{g}$ 上の非退化内積である．また $\mathcal{F}$ を OPE

$$\varphi_\alpha(z)\varphi_\beta^*(w) \sim \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{z-w}, \quad \varphi_\alpha(z)\varphi_\beta(w) \sim 0 \sim \varphi_\alpha^*(z)\varphi_\beta^*(w), \quad \alpha,\beta \in \Delta_{>0}$$

を満たす odd な場 $\varphi_\alpha(z), \varphi_\alpha^*(z)$（$\alpha \in \Delta_{>0}$）たちで生成されるスーパー頂点代数とする．このとき $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ がアファイン頂点代数 $V^k(\mathfrak{g})$ の Drinfeld-Sokolov 還元コホモロジーとして定義される [FF2, KRW]：

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) = H^0_{DS,f}(V^k(\mathfrak{g})) = H^0(V^k(\mathfrak{g}) \otimes \Phi_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{F}, d_{(0)})$$

ただし $d_{(0)}$ は

$$d(z) = \sum_{\alpha\in\Delta_{>0}} e_\alpha(z)\varphi_\alpha^*(z) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma\in\Delta_{>0}} {:}\varphi_\gamma(z)\varphi_\alpha^*(z)\varphi_\beta^*(z){:} + \sum_{\alpha\in\Delta_{\frac{1}{2}}} \Phi_\alpha(z)\varphi_\alpha^*(z) + \sum_{\alpha\in\Delta_{>0}} (f|e_\alpha)\varphi_\alpha^*(z)$$

によって定義される $V^k(\mathfrak{g}) \otimes \Phi_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{F}$ 上の場 $d(z)$ の頂点作用素である．いま構成から $\mathfrak{n}_+ = \mathfrak{g}_{>0} \oplus \mathfrak{g}_0^+$，$\mathfrak{g}_0^+ = \mathfrak{n}_+ \cap \mathfrak{g}_0$ が成り立つ．この分解にしたがって，$N_+ = G_{>0} \times G_0^+$ が得られる．ただし $G_{>0}, G_o^+$ はそれぞれ $\mathrm{Lie}\, G_{>0} = \mathfrak{g}_{>0}$，$\mathrm{Lie}\, G_0^+ = \mathfrak{g}_0^+$ を満たす N_+ の部分群である．$G_{>0}, G_0^+$ のアファイン座標をそれぞれ固定し，

$$X_{>0} \colon \mathfrak{g}_{>0} \xrightarrow{\sim} G_{>0}, \quad X_0^+ \colon \mathfrak{g}_0^+ \xrightarrow{\sim} G_0^+$$

とおいて N_+ 上のアファイン座標を $X = X_{>0} \cdot X_0^+$ と定める．この X を用いてアファイン頂点代数 $V^K(\mathfrak{g})$ の埋め込み

$$V^k(\mathfrak{g}) \hookrightarrow (\beta\gamma)^{\otimes \dim \mathfrak{n}_+} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee}$$

およびスクリーニング作用素を構成する．すると，Drinfeld-Sokolov 還元コホモロジー関手 $H^0_{DS,f}(?)$ を適用して $\mathcal{W}$ 代数の埋め込み

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \hookrightarrow (\beta\gamma)^{\otimes \dim \mathfrak{g}_0^+} \otimes \Phi_{\frac{1}{2}} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee}$$

が得られることがわかる．Π を $\mathfrak{g}$ の単純ルートの集合とし，$\Pi = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\mathrm{rank}\,\mathfrak{g}}$ とする．k が genaric であれば

$$V^k(\mathfrak{g}) \simeq \bigcap_{i=1}^{\mathrm{rank}\,\mathfrak{g}} \mathrm{Ker} \int P_i(z)\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i}{k+h^\vee}}(z)\, dz$$

（ここで $P_i(z)$ は N_+ の右作用 $U \curvearrowleft N_+$ から決定される $(\beta\gamma)^{\otimes \dim \mathfrak{n}_+}$ 上の適当な場）であることから，$\mathcal{W}$ 代数も k が genaric ならば

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \simeq \bigcap_{i=1}^{\mathrm{rank}\,\mathfrak{g}} \mathrm{Ker} \int \widetilde{P}_i(z)\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i}{k+h^\vee}}(z)\, dz$$

という表示をもつことが誘導される．このとき $\widetilde{P}_i(z)$ がどのようなルールで決定されるかは計算できる．

Theorem 4.1 ([Gen2]) $(\beta\gamma)^{\otimes \dim \mathfrak{g}_0^+} \otimes \Phi_{\frac{1}{2}}$ 上の場 $\widetilde{P}_i(z)$ は次のルールで決定される：

- もし $\alpha_i \in \Delta_0$ ならば，$P_i(z) = \widetilde{P}_i(z)$.
- もし $\alpha_i \in \Delta_{\frac{1}{2}}$ ならば，任意の $\alpha \in \Delta_{>0}$ に対して，e_α に対応する N_+ の座標を x_α として，∂_{x_α} の置き換えである $\beta_\alpha(z)$ を $\beta_\alpha(z) \mapsto \Phi_\alpha(z)$ と置き換えることで，$P_i(z) \mapsto \widetilde{P}_i(z)$.
- もし $\alpha_i \in \Delta_1$ ならば，任意の $\alpha \in \Delta_{>0}$ に対して，e_α に対応する N_+ の座標を x_α として，∂_{x_α} の置き換えである $\beta_\alpha(z)$ を $\beta_\alpha(z) \mapsto (f|e_\alpha)$ と置き換えることで，$P_i(z) \mapsto \widetilde{P}_i(z)$.

例えば，

$$V^k(\mathfrak{sl}_2) \simeq \mathrm{Ker} \int \beta(z)\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+2}}(z)\, dz$$

に対して，Drinfeld-Sokolov 還元コホモロジーをとることで

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_2) \simeq \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+2}}(z)\, dz$$

という表示が $\beta(z) \mapsto 1$ という置き換えによって得られる．同様に

$$V^k(\mathfrak{sl}_3) \simeq \ \mathrm{Ker} \int (\beta_1 + \gamma_2\beta_3)(z)\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_1}{k+3}}(z)\, dz \cap \ \mathrm{Ker} \int \beta_2(z)\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_2}{k+3}}(z)\, dz$$

に対して，$\mathfrak{sl}_3$ の副正則べき零元 $f_{\mathrm{sub}} = f_1$ に付随する Drinfeld-Sokolov 還元コホモロジーをとることで

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_3, f_{\mathrm{sub}}) \simeq \ \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_1}{k+3}}(z)\, dz \cap \ \mathrm{Ker} \int \beta_2(z)\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_2}{k+3}}(z)\, dz$$

という表示が $\beta_1(z) \mapsto 1$，$\beta_3(z) \mapsto 0$ なる置き換えによって得られることがわかる．

4.2 スーパー $\mathcal{W}$ 代数への一般化（予想）

スーパーの場合でも同じルールが適用できると期待している．例えば

$$V^k(\mathfrak{osp}_{1|2}) \simeq \mathrm{Ker} \int (b + c\beta)(z)\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+3/2}}(z)\, dz$$

に対して，Drinfeld-Sokolov 還元コホモロジーをとることで

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{1|2}) \simeq \mathrm{Ker} \int \Phi(z)\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+3/2}}(z)\, dz$$

という表示が $b(z) \mapsto \Phi(z)$，$\beta(z) \mapsto 0$ という置き換えで得られるが，これは正しい [Gen1].

5 応用

5.1 双対性への応用

簡単な観察から始める．$\beta\gamma$ システムのスクリーニング作用素を使った実現

$$\beta\gamma \simeq \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{u}(z)\, dz, \quad \beta \mapsto \mathrm{e}^{u+v}, \quad \gamma \mapsto -:u\mathrm{e}^{-u-v}:$$

を $V^k(\mathfrak{sl}_2)$ のスクリーニング作用素を使った実現と組み合わせると，

$$\begin{aligned} V^k(\mathfrak{sl}_2) &\simeq \mathrm{Ker} \int \beta(z)\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{k+2}}(z)\, dz \\ &\simeq \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{u}(z)\, dz \cap \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{u+v-\frac{\alpha}{k+2}}(z)\, dz \end{aligned}$$

という表示が得られる．これは $V^k(\mathfrak{sl}_2) \hookrightarrow \beta\gamma \otimes \pi \hookrightarrow V_{u+v} \otimes \pi$ という埋め込みである．また Boson-Fermion 対応

$$bc \simeq V_{\mathbb{Z}}, \quad b \mapsto \mathrm{e}^{\phi}, \quad c \mapsto \mathrm{e}^{-\phi}$$

を思い出しておく．ここで $\mathfrak{sl}_n$ の副正則べき零元 f_{sub} に付随する $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$ のスクリーニング作用素による表示を考えると，先ほどと同様に $\beta\gamma$ システムを V_L の元に置き換えて，

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}}) \\
&= \bigcap_{i=1}^{n-2} \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i}{k+n}}(z)\, dz \cap \mathrm{Ker} \int \beta(z)\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_{n-1}}{k+n}}(z)\, dz \\
&= \bigcap_{i=1}^{n-2} \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i}{k+n}}(z)\, dz \cap \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{u+v-\frac{\alpha_{n-1}}{k+n}}(z)\, dz \cap \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{u}(z)\, dz \\
&= \bigcap_{i=1}^{n-2} \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{\alpha_i}(z)\, dz \cap \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-(k+n)(u+v)+\alpha_{n-1}}(z)\, dz \cap \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{u}(z)\, dz
\end{aligned}
$$

という表示が得られる．最後のところでは Virasoro 頂点代数のスクリーニング作用素の双対性 (1.2) を用いた．次に $\mathfrak{sl}_{n|1}$ の正則べき零元に付随する $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{n|1})$ のスクリーニング作用素による表示を考えると，Boson-Fermion 対応と組み合わせて

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{n|1}) &= \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i}{\ell+n}}(z)\, dz \cap \mathrm{Ker} \int b(z)\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_n}{\ell+n}}(z)\, dz \\
&= \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i}{\ell+n}}(z)\, dz \cap \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{\phi-\frac{\alpha_n}{\ell+n}}(z)\, dz
\end{aligned}
$$

となる．すると $(k+n)(\ell+n-1) = 1$ という関係式の元で，

$$
\alpha_i \mapsto -\frac{\alpha_i}{\ell+n}, \quad -(k+n)(u+v)+\alpha_{n-1} \mapsto -\frac{\alpha_{n-1}}{\ell+n}, \quad u \mapsto \phi - \frac{\alpha_n}{\ell+n}
$$

という対応が Heisenberg 頂点代数の間の同型になる．したがって $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$ と $\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{n|1})$ のスクリーニング作用素の組が一致する．あとはスクリーニング作用素が作用している定義域が一致するように，Heisenberg 頂点代数のコセットをとってあげたり，適当な格子頂点代数をテンソルしたりすれば，次のような結果が得られた：

Theorem 5.1 ([CGN])

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Com}\left(\pi, \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})\right) = \mathrm{Com}\left(\pi, \mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{n|1})\right), \\
&\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{n|1}) = \mathrm{Com}\left(\pi, \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}}) \otimes V_{\mathbb{Z}}\right), \\
&\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}}) = \mathrm{Com}\left(\pi, \mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{n|1}) \otimes V_{\sqrt{-1}\mathbb{Z}}\right).
\end{aligned}
$$

また，$V^{\ell'}(\mathfrak{sl}_{n|1})$ のスクリーニング作用素による表示を用いることができれば，再び Boson-Fermion 対応 $b_i \mapsto \mathrm{e}^{\phi_i}, c_i \mapsto \mathrm{e}^{-\phi_i}$ と組み合わせて，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Com}(V^{\ell'}(\mathfrak{gl}_n), V^{\ell'}(\mathfrak{sl}_{n|1})) \\
&= \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{\phi_i-\phi_{i+1}-\frac{\alpha_i}{\ell'+n-1}}(z)\, dz \cap \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{\phi_n-\frac{\alpha_n}{\ell'+n-1}}(z)\, dz
\end{aligned}
$$

という表示が得られる．すると

$$
\phi_i - \phi_{i+1} - \frac{\alpha_i}{\ell'+n-1} \mapsto \alpha_i \mapsto -\frac{\alpha_i}{\ell+n}, \quad \phi_n - \frac{\alpha_n}{\ell'+n-1} \mapsto \phi - \frac{\alpha_n}{\ell+n}
$$

も Heisenberg 頂点代数の間の同型を誘導する．これによって Creuztig-Linshaw の三対性 [CL]

$$
\mathrm{Com}(\pi, \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})) = \mathrm{Com}(\pi, \mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{n|1})) = \mathrm{Com}(V^{\ell'}(\mathfrak{gl}_n), V^{\ell'}(\mathfrak{sl}_{n|1})),
$$

が得られる．ただし

$$(k+n)(\ell+n-1) = \frac{1}{\ell+n-1} - \frac{1}{\ell'+n-1} = 1$$

とする．さらに $\mu \in P_+^{\mathfrak{sl}_{n|1}}$ に対して，$V^{\ell'}(\mathfrak{sl}_{n|1})$ の Weyl 加群 $V^{\ell'}(\mu)$ を $V^{\ell'}(\mathfrak{gl}_n) \otimes \mathrm{Com}(\pi, \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}}))$-加群として分解すると

$$V^{\ell'}(\mu) = \bigoplus_{\lambda \in P_+^{\mathfrak{gl}_n}} V^{\ell'}(\lambda) \otimes T^k_{\mu,\lambda}$$

となり，$V^{\ell'}(\lambda)$ の係数加群として現れる $T^k_{\mu,\lambda}$ は

$$T^k_{\mu,\lambda} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\left(\int S_i(z_1)\cdots S_i(z_{n_i})\, dz \colon \pi^{k+n}_{\lambda-(k+n)\mu} \to \pi^{k+n}_{\lambda-(k+n)\mu+n_i\widetilde{\alpha_i}} \right)$$

と一致すると予想している．ここで $S_i(z) = \mathrm{e}^{\widetilde{\alpha}_i}(z)$ は $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$ のスクリーニング作用素である．同様の方法を $V^{\ell'}(\mathfrak{osp}_{1|2n})$ にも適用すると，

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{2n+1}) = \mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sp}_{2n}) = \mathrm{Com}(V^{\ell'}(\mathfrak{sp}_{2n}), V^{\ell'}(\mathfrak{osp}_{1|2n}))$$

という同型が得られる．ただし

$$2(k+2n-1)(\ell+n+1) = \frac{1}{2(\ell+n+1)} + \frac{1}{2(\ell'+n+1)} = 1$$

とする．$\mu \in P_+^{\mathfrak{osp}_{1|2n}}$ に対して，$V^{\ell'}(\mathfrak{osp}_{1|2n})$ の Weyl 加群 $V^{\ell'}(\mu)$ の $V^{\ell'}(\mathfrak{sp}_{2n}) \otimes \mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sp}_{2n})$-加群としての分解を考えて，

$$V^{\ell'}(\mu) = \bigoplus_{\lambda \in P_+^{\mathfrak{sp}_{2n}}} V^{\ell'}(\lambda) \otimes T^\ell_{\mu,\lambda}, \quad T^\ell_{\mu,\lambda} = H^0_{DS}\left(M^\ell(\lambda - 2(\ell+n+1)\mu)\right)$$

となることが予想されている．ただし $M^\ell(\lambda-2(\ell+n+1)\mu)$ は $\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n}$ の Verma 加群である．

5.2 さらなる応用について

スクリーニング作用素によって頂点代数を構成することで得られる応用はさまざまに存在する．知っている範囲でここにリストとして提示する．

- B 型の $\mathcal{W}$ 代数のコセット構成：
  $\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{1|2n}) = \mathcal{W}^\ell(\mathfrak{osp}_{1|2n}) = \mathrm{Com}(V^{\ell'}(\mathfrak{so}_{2n+1}), V^{\ell'-1}(\mathfrak{so}_{2n+1}) \otimes \mathcal{F}^{\otimes 2n+1})$.
- A 型の $\mathcal{W}$ 代数の余積 [Gen2]：$\mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}_{N_1+N_2}, p_1 \oplus p_2) \hookrightarrow \mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{gl}_{N_1}, p_1) \otimes \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{gl}_{N_2}, p_2)$.
- パラボリック誘導 [Gen2]：$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, \mathrm{Ind}_{\mathfrak{l}}^{\mathfrak{g}}\,\mathcal{O}) \hookrightarrow \mathcal{W}^\ell(\mathfrak{l}, \mathcal{O})$.
- Adamović パス [A, ACG]
  $V^k(\mathfrak{sl}_2) \hookrightarrow \mathrm{Vir}^{c(k)} \otimes V_{u+v}, \quad V^k(\mathfrak{sl}_3) \hookrightarrow \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_3, f_{\mathrm{sub}}) \otimes V_{u+v}^{\otimes 2}, \cdots$.
- 段階的還元：$H^0_{DS,(\ell,1^{n+m-\ell})}\left(\mathcal{W}^k\left(\mathfrak{sl}_{n+m}, (n, 1^m)\right)\right) \simeq \mathcal{W}^k\left(\mathfrak{sl}_N, (n+\ell, 1^{m-\ell})\right)$.

References

[A] D. Adamović. Realizations of simple affine vertex algebras and their modules: the cases $\widehat{sl(2)}$ and $\widehat{osp(1,2)}$. *Comm. Math. Phys.*, 366:1025–1067, 2019.

[ACG] D. Adamović, T. Creutzig, N. Genra. On the free-field realization of $L_k(\mathfrak{sl}_3)$ and their relaxed modules, in preparation.

[ACL] T. Arakawa, T. Creutzig, A. Linshaw. W-algebras as coset vertex algebras. *Invent. Math.*, 218(1):145–195, 2019.

[CGN] T. Creutzig, N. Genra, S. Nakatsuka, Shigenori. Duality of subregular $\mathcal{W}$-algebras and principal $\mathcal{W}$-superalgebras. *Adv. Math.*, 383 (2021), 107685, 52 pp.

[CL] T. Creutzig and A. Linshaw, Trialities of $\mathcal{W}$-algebras, arXiv:2005.10234 [math.RT].

[FF1] B. L. Feigin, E. Frenkel. A family of representations of affine Lie algebras. *Russ. Math. Surv.*, 43(5):221-222, 1988.

[FF2] B. L. Feigin, E. Frenkel. Quantization of Drinfel'd-Sokolov reduction. *Phys. Lett.,* B 246(1–2):75–81, 1990.

[FF3] B. L. Feigin, E. Frenkel. Duality in W-algebras. *Internat. Math. Res. Notices*, 1991, no.6, 75–82.

[Fre] E. Frenkel. Wakimoto modules, opers and the center at the critical level. *Advances in Math.*, 195:297–404, 2005.

[Gen1] N. Genra. Screening operators for $\mathcal{W}$-algebras. *Selecta Math. (N.S.)*, 23(3):2157–2202, 2017.

[Gen2] N. Genra, Screening operators and Parabolic inductions for Affine $\mathcal{W}$-algebras, *Adv. Math.*, 369 (2020), 107179.

[KRW] V. G. Kac, S.-S. Roan, M. Wakimoto. Quantum reduction for affine superalgebras. *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3):307–342, 2003.

[Thi] K. Thielemans. A Mathematica package for computing operator product expansions. *Internat. J. Modern Phys.*, C2 (1991), no.3, 787–798.

[Wak] M. Wakimoto. Fock representations of affine Lie algebra $A_1^{(1)}$. *Comm. Math. Phys.*, 104:605–609, 1986.