Strong convergence theorems for linear contractive mappings in Banach spaces based on nonlinear analytic methods

岩手大学　本田　卓
Takashi Honda
Faculty of Education, Iwate University, Japan
E-mail address: thonda7@iwate-u.ac.jp

概　要　Alber[1, 2]、高橋-筆者 [3, 4] らにより、Banach 空間に対し Hilbert 空間のような直交補空間分解を導入した。これは Hilbert 空間での直交補空間分解の純粋な拡張で、Banach 空間における距離射影と茨木-高橋 [5] により導入された一般化非拡大射影との概念を繋ぐものである。この、Banach 空間の直交補空間分解の応用例として、線型縮小写像における強収束定理や吉田のエルゴード定理を紹介し、故高橋渉名誉教授との最近の共同研究に触れる。

1　はじめに

線形写像の平均エルゴード定理は、1932 年に、von Neumann [8] より始まる。

Theorem 1.1 ([8])**.** T を *Hilbert* 空間 H 上のユニタリー作用素とし、P を閉部分空間 $F(T)=\{x\in H : Tx=x\}$ の上への直交射影とする。このとき、任意の $x\in H$ において、*Cesàro* 平均

$$S_n x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T^k x$$

は、$n\to\infty$ のとき $Px\in H$ に強収束する。

この定理は、1938 年に吉田耕作 [10] により Banach 空間での power bounded な作用素の平均エルゴード定理に拡張された。

Theorem 1.2 ([10])**.** E を実または複素 *Banach* 空間とし、$T:E\to E$ を線形作用素で、定数 C が存在し、任意の自然数 n において $\|T^n\|\le C$ をみたし、閉単位球を弱コンパクトな集合の中にうつす写像とする。このとき、任意の $x\in E$ において、*Cesàro* 平均

$$S_n x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T^k x$$

は、$n\to\infty$ のとき T のある不動点に強収束する。

今回、実 Banach 空間 E における、$\|T\|\le 1$ をみたす有界線形写像 $T:E\to E$ （線形縮小写像）での吉田の平均エルゴード定理を、Banach 空間の直交補空間分解を用いて示すことにする。以下では、E を実 Banach 空間とする。E を滑らかな Banach 空間、J を正規化双対写像 (normalized duality mapping) とすると、以下のような汎関数 $\phi : E\times E\to\mathbb{R}$ を定義できる。

$$\phi(x,y)=\|x\|^2-2\langle x,Jy\rangle+\|y\|^2.$$

正規化双対写像 J は

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

で定義される共役空間 E^* に値を持つ集合値写像で、どんな Bnach 空間 E でも一般にすべての要素 $x \in E$ で定義できる。さらに、E が滑らかな Banach 空間の場合は一価写像である。その他詳細は [7] を参照。C を E の閉凸部分集合とし、写像 $T : C \to C$ が不動点を持ち、不等式

$$\phi(Tx, y) \leq \phi(x, y)$$

をすべての C の要素 x と T の不動点 $y \in F(T)$ とにおいて満たすとき、この写像を一般化非拡大 (generalized nonexpansive) 写像と呼ぶ。茨木-高橋 [5] を参照。もし E の、空でないある部分集合の上への冪等写像 R がこの性質を持つとき、R を一般化非拡大射影 (generalized nonexpansive retraction) と呼ぶ。さらに、すべての $x \in E$、$t \geq 0$ において等式 $R(Rx + t(x - Rx)) = Rx$ が成り立つとき、R を sunny generalized nonexpansive retraction と呼ぶ。E の非空閉部分集合 C の上への冪等写像 R_C が sunny generalized nonexpansive retraction であることと、任意の $x \in E$, $y \in C$ において、不等式 $\langle x - R_C x, Jy - JR_C x \rangle \leq 0$ が成り立つこととが同値である。逆に、E のある部分集合が E からその集合上への sunny generalized nonexpansive retraction を持つとき、その集合を E の sunny generalized nonexpansive retract と呼ぶ。E が滑らかで、厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間のとき、E の非空部分集合 C が E の sunny generalized nonexpansive retract になるための必要十分条件は、高阪-高橋 [6] により、C の正規双対写像 J による像 JC が E の共役空間 E^* での閉凸集合であることが知られている。またこれは E の一般化非拡大レトラクト (generalized nonexpansive retract) である必要十分条件でもあり、このとき、E の C の上への sunny generalized nonexpansive retraction R_C は、$R_C = J^{-1}\Pi_{JC}J$ と表現できる。ここで、Π_{JC} は E^* の JC の上への一般化射影である。

そこで、滑らかで、厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間 E の非空部分集合 C において、$JC = Y^*$ が E^* での閉部分空間である場合を考える。このとき、任意の $x \in E$ は、

$$x = P_{Y^*_\perp} x + R_{J^{-1}Y^*} x$$

と表現できる。ここで、$Y^*_\perp = \{x \in E : \text{任意の } y^* \in Y^* \text{ において } \langle x, y^* \rangle = 0\}$、$P_{Y^*_\perp}$ は E の $Y^*_\perp$ の上への距離射影を表す。また逆に、Y を E の閉部分空間とすると、任意の $x \in E$ は、

$$x = P_Y x + R_{J^{-1}Y^\perp} x$$

と表現できる。ここで、$Y^\perp = \{x^* \in E^* : \text{任意の } y \in Y \text{ において } \langle y, x^* \rangle = 0\}$ とし、$Y^\perp$ は E^* の閉部分空間なので、E の $J^{-1}Y^\perp$ の上への sunny generalized nonexpansive retraction $R_{J^{-1}Y^\perp}$ が存在する。これを、Banach 空間における直交補空間分解と呼び、Hilbert 空間では通常の直交補空間分解になっている。詳細は [1, 2, 3, 4] を参照。これを用いて、線形縮小写像の平均エルゴード定理を導いてみる。

2　本論

本論では、特に但し書きがなければ、空間として滑らかで、厳密に凸なノルムを持つ反射的実 Banach 空間 E を用いるものとする。この条件下では、正規化双対写像は E から共役空間 E^* への全単射写像になることが知られている [7]。また、本論では収束はノルムによる収束（強収束）を表すとする。まず、線形縮小写像の不動点の集合は以下の基本的性質をみたす [9]。

Corollary 2.1. $T: E \to E$ を線形縮小写像としたとき、任意の $x \in E$、$v \in F(T)$ において、

$$\|Tx\| \leq \|x\| \quad \text{かつ} \quad \langle x - Tx, Jv \rangle = 0$$

が成り立つ。

Lemma 2.1. $T: E \to E$ を線形縮小写像、$F(T)$ を T の不動点すべての集合とする。このとき、$JF(T)$ は E^* の閉部分空間で $JF(T) = F(T^*) = \{z - Tz : z \in E\}^{\perp}$ が成り立つ。

よって、以下のような集合を定義する。

Definition 2.1. $x \in E$ と E の非空部分集合 F において、E の部分集合 $R(x;F)$ を以下のように定義する。

$$R(x;F) = \{z \in E : \|z\| \leq \|x\| \text{ で, かつ, すべての } u \in F \text{ において } \langle x - z, Ju \rangle = 0\}$$

このとき、この集合は以下の性質を持つ [9]。

Lemma 2.2. 任意の $x \in E$ と E の非空部分集合 F において、集合 $R(x;F)$ は空でなく、有界な閉凸集合である。また、$F \cap R(x;F)$ は空でなければたかだか一元集合である。

これらを用い、以下の定理を証明する。

Theorem 2.1. 線形縮小写像 $T: E \to E$ と、線形縮小写像の列 $\{S_n\}$, $S_n: E \to E$ で、すべての自然数 n において $F(T) \subset F(S_n)$ となるものを考える。このとき、すべての自然数 n において、$T \circ S_n = S_n \circ T$ が成り立つなら、以下は同値である。

(1) 任意の $x \in E$ において、$S_n x$ が $n \to \infty$ のとき $F(T)$ のある要素に収束する。
(2) 任意の $x \in (JF(T))_{\perp}$ において、$S_n x$ が $n \to \infty$ のとき 0 に収束する。
(3) 任意の $x \in E$ において、$S_n x - T \circ S_n x$ が $n \to \infty$ のとき 0 に収束する。

さらに、もし、*(1)* が成り立つなら、$S_n x$ は $R_{F(T)} x \in F(T)$ に収束する。

Proof. (1) が成り立つと仮定する。条件より、任意の $x \in E$ において、$S_n x \in R(x; F(S_n)) \subset R(x; F(T))$ で、Lemma 2.2 より、$F(T) \cap R(x; F(T))$ は空でなければたかだか一元集合である。$R(x; F(S_n))$ は閉集合で、$S_n x$ は $n \to \infty$ のとき $F(T)$ のある要素 z に収束するので、$F(T) \cap R(x; F(T)) = \{z\}$ となる。各 $x \in E$ において、この z を Rx と書くことにする．このとき、

$R: E \to F(T)$ を x から Rx に対応させる写像とすると、R は E の $F(T)$ の上への冪等写像になっている。さらに、S_n が線形縮小写像であることより、Corollary 2.1 で、任意の $x \in E$、$u \in F(S_n)$、$n \in \mathbb{N}$ において、$\langle x - S_n x, Ju \rangle = 0$ が成り立つので、任意の $v \in F(T)$ において、

$$\langle x - Rx, Jv \rangle = 0 \tag{2.1}$$

が成り立つ。$Rx \in F(T)$ なので、$\langle x - Rx, JRx \rangle = 0$ となり、結果として、等式

$$\langle x - Rx, JRx - Jv \rangle = 0 \tag{2.2}$$

が得られる。これは、冪等写像 $R: E \to F(T)$ が、E の $F(T)$ の上への sunny generalized nonexpansive retraction であることを意味している。よって、

$$R = R_{F(T)} = J^{-1} \Pi_{JF(T)} J$$

であることが分かる。ここで、$x \in (JF(T))_\perp$ とすると、任意の $v \in F(T)$ において、等式 $\langle x, Jv \rangle = 0$ が成り立つが、(2.1) より、一般に $\langle x - Rx, Jv \rangle = 0$ も成り立つので、任意の $v \in F(T)$ において、$\langle Rx, Jv \rangle = 0$ が得られる。これは、$Rx \in (JF(T))_\perp$ を意味する。よって、$Rx \in F(T) \cap (JF(T))_\perp$ となるが、$F(T) \cap (JF(T))_\perp = \{0\}$ より、$Rx = 0$ が得られる。つまり、$x \in (JF(T))_\perp$ とすると、$S_n x$ は $n \to \infty$ のとき $Rx = 0$ に収束する。よって、(2) が得られる。

(2) が成り立つと仮定する。Lemma 2.1 より、$JF(T)$ は E^* の閉部分空間なので、Banach 空間の直交補空間分解より、任意の $x \in E$ において、等式

$$x = R_{F(T)} x + P_{(JF(T))_\perp} x$$

が得られる。ここで、$P_{(JF(T))_\perp}$ は E の $(JF(T))_\perp$ の上への距離射影である。よって、

$$\begin{aligned} S_n x &= S_n \left(R_{F(T)} x + P_{(JF(T))_\perp} x \right) \\ &= S_n R_{F(T)} x + S_n P_{(JF(T))_\perp} x \\ &= R_{F(T)} x + S_n P_{(JF(T))_\perp} x \end{aligned}$$

が成り立つが、(2) より、$n \to \infty$ のとき $S_n P_{(JF(T))_\perp} x$ は 0 に収束する。つまり、任意の $x \in E$ において、$n \to \infty$ のとき $S_n x$ は $R_{F(T)} x \in JF(T)$ に収束する。これは、(1) が成り立つことを意味する。

さらに、Corollary 2.1 より、任意の $x \in E$ において、$x - Tx \in (JF(T))_\perp$ が言える。よって、(2) より、$n \to \infty$ のとき $S_n(x - Tx)$ は 0 に収束する。条件 $T \circ S_n = S_n \circ T$ より、

$$\begin{aligned} S_n x - T \circ S_n x &= S_n x - S_n \circ T x \\ &= S_n (x - Tx) \end{aligned}$$

が言えるので、任意の $x \in E$ において、$n \to \infty$ のとき $S_n x - T \circ S_n x$ は 0 に収束する。これは、(3) が成り立つことを意味する。

(3) が成り立つと仮定する。条件 $T \circ S_n = S_n \circ T$ より、任意の $x \in E$ において、$S_n(x - Tx) = S_n x - T \circ S_n x$ なので、(3) より、$n \to \infty$ のとき $S_n(x - Tx)$ は 0 に収束する。よって、任意の $y \in \{x - Tx : x \in E\}$ において、$S_n y$ は 0 に収束する。Lemma 2.1 より、

$$(JF(T))_\perp = \left(\{z - Tz : z \in E\}^\perp \right)_\perp = \overline{\mathrm{spn}} \{z - Tz : z \in E\}$$

（ここで、$\overline{\mathrm{span}}$ は閉線形包を表す）なので、$x \in (JF(T))_\perp$ を考えると、任意の $\varepsilon > 0$ において、ある要素 $y \in \{z - Tz : z \in E\}$ が存在し、$\|x - y\| < \varepsilon$ が成り立つようにできる。このことより、

$$\begin{aligned}\|S_n x\| &= \|S_n y + (S_n x - S_n y)\| \\ &\le \|S_n y\| + \|S_n x - S_n y\| \\ &\le \|S_n y\| + \|x - y\| \\ &< \|S_n y\| + \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立ち、$n \to \infty$ のとき $S_n y$ は 0 に収束するので、

$$\limsup_{n\to\infty} \|S_n x\| \le \limsup_{n\to\infty} (\|S_n y\| + \varepsilon) = \varepsilon$$

が得られる。$\varepsilon > 0$ は任意なので、$\lim_{n\to\infty} \|S_n x\| = 0$ が得られる。つまり、任意の $x \in (JF(T))_\perp$ において、$n \to \infty$ のとき $S_n x$ は 0 に収束するので、(2) が成り立つ。

さらに、もし、(1) が成り立つなら、$S_n x$ は $R_{F(T)} x \in F(T)$ に収束することは、すでに示した。 □

この定理を用いることで、平均エルゴード定理が得られる。

Theorem 2.2. $T : E \to E$ を線形縮小写像としたとき、任意の $x \in E$ において、*Cesàro* 平均

$$S_n x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T^k x$$

は、$n \to \infty$ のとき $R_{F(T)} x \in F(T)$ に収束する。

Proof. 任意の自然数 n において、写像 $S_n : E \to E$ は線形縮小写像である。また、$F(T) \subset F(S_n)$、$T \circ S_n = S_n \circ T$ が成り立つ。実際、任意の $x \in E$、$n \in \mathbb{N}$ において、

$$T \circ S_n x = T\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T^k x\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T^{k+1} x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T^k T x = S_n \circ T x$$

が言える。よって、Theorem 2.1 より、任意の $x \in E$、$n \in \mathbb{N}$ において、$n \to \infty$ のとき $S_n x - T \circ S_n x$ が 0 に収束することを示せばよい。

$$\begin{aligned}S_n x - T \circ S_n x &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T^k x - T\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T^k x\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T^k x - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T^{k+1} x \\ &= \frac{1}{n}(Tx - T^{n+1} x)\end{aligned}$$

より、任意の $x \in E$、$n \in \mathbb{N}$ において、

$$\|S_n x - T \circ S_n x\| = \frac{1}{n} \|Tx - T^{n+1} x\| \le \frac{1}{n}\left(\|Tx\| + \|T^{n+1} x\|\right) \le \frac{2}{n} \|x\|$$

が成り立つので、$n \to \infty$ のとき $S_n x - T \circ S_n x$ が 0 に収束する。よって、Theorem 2.1 より、任意の $x \in E$ において、$S_n x$ は $R_{F(T)} x \in F(T)$ に収束する。 □

3　結論

Banach 空間の直交補空間定理を用いることで、線形縮小写像の平均エルゴード定理を得ることができるが、筆者は故高橋渉名誉教授との共同研究で、複数の線形写像における平均エルゴード定理への拡張を進めているところであった。それだけに、先生の急逝が本当に悔やまれる。この場を借りて、恩師高橋先生のご冥福をお祈り申し上げたい。

参考文献

[1] Ya. I. Alber, *Generalized Projections, Decompositions, and the Pythagorean-Type Theorem in Banach Spaces*, Appl. Math. Lett. **11** (1998), 115–121.

[2] Ya. I. Alber, *James orthogonality and orthogonal decompositions of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **312** (2005), 330–342.

[3] T. Honda and W. Takahashi, *Norm One Projections and Generalized Conditional Expectations*, Sci. Math. Jpn. **69** (2009), no.3, 303–313.

[4] T. Honda and W. Takahashi, *Nonlinear projections and generalized conditional expectations in Banach spaces*, Taiwanese J. Math., **15** (2011), 2169–2193.

[5] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory **149** (2007), no.1, 1–14.

[6] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), no.2, 197–209.

[7] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points* (in Japanese), Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[8] J. von Neumann *Proof of the quasi-ergodic hypothesis*, Proc. Nat. Acad. U.S.A., **18** (1932), 70–82.

[9] J.-C. Yao, W. Takahashi and T. Honda, *Strong convergence theorems and nonlinear analytic methods for linear contractive mappings in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), no.3, 574–566.

[10] K. Yosida, *Mean ergodic theorem in Banach spaces*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **14** (1938), 292–294.