Caristi の不動点定理と Bourbaki-Kneser の不動点定理

Caristi fixed point theorem and Bourbaki-Kneser fixed point theorem

豊田 昌史

Masashi Toyoda

東邦大学理学部, 274-8510 千葉県船橋市三山 2-2-1
Faculty of Science, Toho University Miyama 2-2-1, Funabashi, Chiba 274-8510, Japan

1 Bourbaki-Kneser の不動点定理

次は順序集合における不動点定理である．[11] の定理 4.21（Bourbaki-Kneser 定理）である．

定理 1. 順序集合 X の任意の空でない鎖は上限をもつとする．f を X から X への写像で, 任意の $x \in X$ に対して, $x \leq f(x)$ とする．このとき f は不動点をもつ．

定理 1 は, さまざまな文献で紹介されている．例えば, [4] では Zermelo に関係する結果として, [10] では「Bourbaki theorem」として紹介されている．また [7] では「Zermelo theorem」として, [12] では特に名前はついていないが, この定理より Zorn の補題を導いている．

Amann([1]) は, 定理 1 よりさまざまな不動点定理を導出をした．例えば, Tarski の不動点定理, 凝縮写像に対する不動点定理, 非拡大写像に対する不動点定理である．[11], [13] も参照されたい．本論文では, [1] で紹介されてはいない定理を定理 1 より導く．

次は Caristi の不動点定理である．[3] の「Theorem (2.1)′」である．

定理 2. X を完備距離空間とする．φ を X から $[0, \infty)$ への下半連続な関数とする．

T を X から X への写像で, 任意の $x \in X$ に対して

$$d(x, Tx) \le \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

をみたすとする. このとき T の不動点が存在する.

ここで φ が下半連続であるとは, 任意の実数 a に対して $\{x \in X \mid \varphi(x) \le a\}$ がつねに閉集合となるときをいう. φ が下半連続であるための必要十分条件は, 任意の x に対して $x_\alpha \to x$ ならば $\varphi(x) \le \underline{\lim}_\alpha \varphi(x_\alpha)$ をみたすときをいう ([15] の定理 1.3.2).

本論文では, 定理 2 を定理 1 より導く (4 および 5 節). また, 定理 2 と関係の深い定理として, Ekeland の変分不等式定理と高橋の最小値定理が知られている. 6 節では, Ekeland の変分不等式定理を定理 1 より導く. 7 節では, 高橋の最小値定理を定理 1 より導く. これら 3 つの定理は, お互いに導けるという意味で同値であると知られているが ([6]), 本論文では定理 1 を用いた証明を紹介する. なお, 2 および 3 節では, 定理 1 より導かれる定理の例として, Bernstein-Cantor-Schröder の定理と Zorn の補題の証明を紹介する.

2 Bernstein-Cantor-Schröder の定理

本節では, 定理 1 より次の Bernstein-Cantor-Schröder の定理を導く ([14]).

定理 3. A, B を集合とする. A から B への単射写像および B から A への単射写像が存在するとする. このとき, A から B への全単射写像が存在する.

証明. 2^A から 2^A への写像 h を

$$h(C) = g(B \setminus f(A \setminus C)) \quad (C \in 2^A)$$

で定義する. ここで f は A から B への単射写像, g は B から A への単射写像である. このとき h は単調増加である. すなわち $C_1 \subset C_2$ ならば $h(C_1) \subset h(C_2)$ が成り立つ. 2^A の部分集合族 $\mathfrak{X}$ を

$$\mathfrak{X} = \{C \in 2^A \mid C \subset h(C)\}$$

とおく. $\emptyset \in \mathfrak{X}$ より $\mathfrak{X} \neq \emptyset$ である. また $h(\mathfrak{X}) \subset \mathfrak{X}$ である. 実際 $C \in \mathfrak{X}$ とする. このとき $C \subset h(C)$ である. h は単調増加であるから

$$h(C) \subset h(h(C))$$

である．したがって $h(C) \in \mathfrak{X}$ である．以上より h は $\mathfrak{X}$ から $\mathfrak{X}$ への写像である．また $\mathfrak{X}$ は, 包含関係による順序

$$C_1 \leq C_2 \Longleftrightarrow C_1 \subset C_2$$

により順序集合である．順序集合 $\mathfrak{X}$ において $\{\emptyset\}$ は鎖なので, $\mathfrak{X}$ は鎖をもつ．次に $\mathfrak{X}$ の任意の空でない鎖 $\mathcal{C}$ は上限をもつことを示す．実際 $\mathcal{C} = \{C_\alpha \mid \alpha \in D\}$ とする．D は全順序で $\alpha \leq \beta$ のとき $C_\alpha \subset C_\beta$ である．このとき, 任意の $\alpha \in D$ に対して

$$C_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in D} C_\alpha = \bigcup \mathcal{C}$$

である．また $\bigcup \mathcal{C} \in \mathfrak{X}$ である．実際 h は単調増加であるから

$$C_\alpha \subset h(C_\alpha) \subset h\left(\bigcup \mathcal{C}\right)$$

である．したがって

$$\bigcup \mathcal{C} \subset h\left(\bigcup \mathcal{C}\right)$$

である．これより $\bigcup \mathcal{C} \in \mathfrak{X}$ である．以上より $\bigcup \mathcal{C}$ は $\mathcal{C}$ の上界である．また $\bigcup \mathcal{C}$ は $\mathcal{C}$ の最小上界である．実際 U が $\mathcal{C}$ の上界とすると, 任意の $\alpha \in D$ に対して $C_\alpha \subset U$ である．これより

$$\bigcup \mathcal{C} \subset U$$

を得る．

定理 1 より, ある $C_0 \in \mathfrak{X}$ が存在して $h(C_0) = C_0$ である．すなわち $C_0 = g(B \setminus f(A \setminus C_0))$ である．ここで A から B への写像 ϕ を

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in A \setminus C_0) \\ g^{-1}(x) & (x \in C_0) \end{cases}$$

で定める．この ϕ は A から B への全単射写像である．実際 $y \in B$ とする．$y \in f(A \setminus C_0)$ のとき, ある $x \in A \setminus C_0$ が存在して $y = f(x) = \phi(x)$ である．$y \notin f(A \setminus C_0)$ のとき, $y \in B \setminus f(A \setminus C_0))$ より

$$g(y) \in g(B \setminus f(A \setminus C_0)) = h(C_0) = C_0$$

である．したがって $x = g(y)$ とおくと $y = g^{-1}(x) = \phi(x)$ である．すなわち ϕ は全射である．また, ϕ が単射であることを示す．$x_1, x_2 \in A - C_0$ または $x_1, x_2 \in C_0$ のときはよい．$x_1 \in A - C_0$, $x_2 \in C_0$ で $x_1 \neq x_2$ とする．$\phi(x_1) = \phi(x_2)$, すなわ

ち $f(x_1) = g^{-1}(x_2)$ を仮定する．$x_2 \in C_0 = h(C_0) = g(B - f(A - C_0))$ より, ある $y \notin f(A - C_0)$ が存在して $x_2 = g(y)$ である．これより

$$y = g^{-1}(x_2) = f(x_1) \in f(A - C_0)$$

となる．これは矛盾である．よって $\phi(x_1) \neq \phi(x_2)$ である．

$\square$

3 Zorn の補題

本節では, 定理 1 より Zorn の補題を導く．次の補助定理を準備する．

補助定理 4. X を順序集合とする．$\mathcal{C}$ を X の空でない鎖全体とする．このとき, $\mathcal{C}$ は空ではなく, しかも集合の包含関係によって順序集合になる．さらにまた $\mathcal{C}$ の鎖 $\{C_\alpha \mid \alpha \in D\}$ は上界をもつ．特に, 上限をもつ．

証明. $x \in X$ とすると $\{x\} \in \mathcal{C}$ より $\mathcal{C}$ は空ではない．また $\mathcal{C}$ は包含関係による順序

$$C_1 \leq C_2 \Longleftrightarrow C_1 \subset C_2$$

により順序集合となる．また $\bigcup_{\alpha \in D} C_\alpha$ が鎖 $\mathcal{C}$ の上限である．これを確認する．$x_1, x_2 \in \bigcup_{\alpha \in D} C$ とすると, ある $\alpha_1, \alpha_2 \in D$ が存在して $x_1 \in C_{\alpha_1}$, $x_2 \in C_{\alpha_2}$ である．$\{C_\alpha \mid \alpha \in D\}$ は鎖なので C_{α_1} と C_{α_2} は, どちらかがどちらかの部分集合である．例えば $x_1, x_2 \in C_{\alpha_2}$ とすると C_{α_2} は全順序であるから $x_1 \leq x_2$ または $x_2 \leq x_1$ が成り立つ．したがって $\bigcup_{\alpha \in D} C_\alpha$ は鎖である．すなわち $\bigcup_{\alpha \in D} C_\alpha \in \mathcal{C}$ である．$\bigcup_{\alpha \in D} C_\alpha$ が鎖の上界となることはよい．また U を $\{C_\alpha\}$ の上界とする．任意の α に対して $C_\alpha \subset U$ であるから $\bigcup_{\alpha \in D} C_\alpha \subset U$ である．したがって $\bigcup_{\alpha \in D} C_\alpha$ は $\{C_\alpha \mid \alpha \in D\}$ の最小上界である． $\square$

定理 1 と選択公理より, 次の Zorn の補題を得る ([12]).

定理 5. X の任意の空でない鎖は上界をもつとする．このとき X は極大元をもつ．

証明. $\mathcal{C} = \{C \subset X \mid C$ は鎖 $\}$ とする．補助命題 4 より $\mathcal{C}$ は空ではなく, $\mathcal{C}$ は包含関係による順序で順序集合となる．また $\mathcal{C}$ の任意の鎖は上限をもつ．

さらに $\mathcal{C}$ は極大元をもつ．これを確認する．$\mathcal{C}$ が極大元をもたないとする．任意の $C \in \mathcal{C}$ に対して, 集合 $\{C' \in \mathcal{C} \mid C < C'\}$ は空ではない．ここで $C < C'$ とは $C \leq C'$ かつ $C \neq C'$ である．各 $\{C' \in \mathcal{C} \mid C < C'\}$ から要素をひとつ選びたい．選

択公理より, $\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}$ への写像 f が存在して, 任意の $\{C' \in \mathcal{C} \mid C < C'\}$ に対して $f(C) \in \{C' \in \mathcal{C} \mid C < C'\}$ とできる. このとき

$$C < f(C)$$

が任意の $C \in \mathcal{C}$ に対して成り立つ. 定理 1 より, ある $C_0 \in \mathcal{C}$ が存在して $f(C_0) = C_0$ である. これは矛盾である.

$\mathcal{C}$ の極大元を C_1 とする. C_1 も鎖であるから, 仮定より上界 a をもつ. a は X で極大元である. 実際, 極大元でないとすると, ある a' が存在して $a \leq a'$ かつ $a \neq a'$ をみたす $a' \in X$ が存在する. C_1 の任意の要素 x に対して $x \leq a < a'$ であるから $C_1 \cup \{a'\}$ は鎖である. したがって $C_1 \cup \{a'\}$ が C_1 より真に大きい鎖となり C_1 が極大元であることに矛盾する. □

4 Caristi の不動点定理

本節では, 定理 1 より定理 2 を導く. 次を用いる. [7] の「Proposition 3.2」である.

補助定理 6. X を完備距離空間とする. φ を X から $\mathbb{R}$ への下に有界な関数とする. X の要素 x, y に対して, 順序を

$$x \leq y \Longleftrightarrow d(x,y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$$

で定める. このとき, 次が成り立つ.

(1) $C = \{x_\alpha \mid \alpha \in D\}$ を X の鎖とするとき, ネット $\{x_\alpha\}$ は極限 x をもつ.
(2) φ が下半連続であるとき, (1) のネット $\{x_\alpha\}$ の極限 x は C の上界である.

証明. (1) D は全順序で $\alpha \leq \beta$ のとき $x_\alpha \leq x_\beta$ である. このとき $\{\varphi(x_\alpha) \mid \alpha \in D\}$ は単調減少である. 実際 $x_\alpha \leq x_\beta$ とする. このとき

$$d(x_\alpha, x_\beta) \leq \varphi(x_\alpha) - \varphi(x_\beta)$$

である. これより $\varphi(x_\beta) \leq \varphi(x_\alpha)$ を得る. また $\{\varphi(x_\alpha) \mid \alpha \in D\}$ は下に有界である. したがって, $\varphi(x_\alpha)$ は下限に収束する. この極限値を r とおく. $\{x_\alpha\}$ はコーシーネットである. 実際 $\epsilon > 0$ とする. $r = \lim_\alpha \varphi(x_\alpha)$ より, ある $\alpha_0 \in D$ が存在して

$$\begin{aligned}\alpha \geq \alpha_0 &\Longrightarrow |\varphi(x_\alpha) - r| < \epsilon \\ &\Longrightarrow r \leq \varphi(x_\alpha) < r + \epsilon\end{aligned}$$

である. したがって $\beta \geq \alpha \geq \alpha_0$ のとき

$$d(x_\alpha, x_\beta) \leq \varphi(x_\alpha) - \varphi(x_\beta) \leq (r + \epsilon) - r = \epsilon$$

である. (もし φ が下に有界でなければ $r = -\infty$ となってしまい, $r + \epsilon - r = -\infty + \epsilon + \infty$ の計算をできないが, いまは φ が下に有界であるので r は実数である.)
X は完備であるから, ある $x \in X$ が存在して $x_\alpha \to x$ である.
(2) φ は下半連続であるから

$$\varphi(x) \leq \varliminf_{\alpha} \varphi(x_\alpha) = r$$

である. このとき, 任意の $\alpha \in D$ に対して, $x_\alpha \leq x$ が成り立つ. すなわち x は C の上界である. 実際, $\alpha \in D$ として $\beta \geq \alpha$ とすると $x_\alpha \leq x_\beta$ より

$$d(x_\alpha, x_\beta) \leq \varphi(x_\alpha) - \varphi(x_\beta)$$

である. $x_\beta \to x$ より, φ は下半連続であるから

$$\begin{aligned} d(x_\alpha, x) &\leq \varphi(x_\alpha) - r \\ &\leq \varphi(x_\alpha) - \varphi(x) \end{aligned}$$

を得る. したがって $x_\alpha \leq x$ である. □

次に, 定理 2 の証明を示す ([8]).

証明. X の要素 x, y に対して, 順序を

$$x \leq y \Longleftrightarrow d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$$

で定める. 補助定理 6 より, X の任意の鎖 C に対して C が上界をもつ. 定理 5 より極大元 a が存在する. T の仮定より $a \leq Ta$ であるが $Ta = a$ である. 実際 $Ta \neq a$ とすると $a < Ta$ より a の極大性に反する. したがって a は T の不動点である. □

5 Caristi の不動点定理の選択公理を用いない証明

4 節では, 定理 5 より定理 2 を導いた. 定理 5 の証明では, 定理 1 と選択公理を用いた. 本節では, 選択公理を用いずに定理 1 より定理 2 を導く. 次の不動点定理を準備する. [7] の「Theorem 12」である.

定理 7. 順序集合 X の空でない任意の鎖 C は上界 $p(C)$ をもつとする. f を X から X への写像で, 任意の $x \in X$ に対して $x \leq f(x)$ をみたすとする. このとき f は不動点をもつ.

証明. $\mathcal{C}$ を X の空でない鎖全体とする. $\mathcal{C}$ に集合の包含関係で順序をいれる. $\mathcal{C}$ の各元 C に対して

$$T(C) = C \cup \{f(p(C))\}$$

とおく. T は $\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}$ への写像で, 任意の $C \in \mathcal{C}$ に対して $C \leq T(C)$ である. 実際 $C \in \mathcal{C}$ とする. $p(C)$ は C の上界であるから, 任意 $x \in C$ に対して $x \leq p(C)$ である. f の仮定から

$$p(C) \leq f(p(C))$$

である. よって $f(p(C))$ も C の上界である. したがって $T(C)$ も鎖となる. また $\mathcal{C}$ の任意の鎖は上限をもつ (補助定理 4). 定理 1 より, ある C_0 が存在して $C_0 = T(C_0)$ である. T の定義より $f(p(C_0)) \in C_0$ である. $p(C_0)$ は C_0 の上界なので

$$f(p(C_0)) \leq p(C_0)$$

である. また, f の仮定から逆の不等号が成り立つので $f(p(C_0)) = p(C_0)$ を得る. すなわち $p(C_0)$ が f の不動点である. □

定理 7 より, 定理 2 を次のように証明できる.

証明. X の要素 x, y に対して, 順序を

$$x \leq y \Longleftrightarrow d(x,y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$$

で定める. このとき X は順序集合である. C を X の空でない鎖とする. 補助定理 6 より, C のある上界 x が存在する. $p(C) = x$ とおけば $\mathcal{C}$ から X への写像 p を選択公理を用いずに定義できる. 任意の $x \in X$ に対して $x \leq Tx$ であるから, 定理 7 より T の不動点が存在する. □

注. 縮小写像の不動点定理が定理 2 の系であることはよく知られている ([15] の問題 1.4.2). 実際, ある $0 \leq r < 1$ が存在して, 任意の x, y に対して $d(Tx, Ty) \leq rd(x,y)$ が成り立つとする. 関数 φ を

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-r} d(x, Tx)$$

とすると $(1-r)d(x,Tx) = d(x,Tx) - rd(x,Tx) \leq d(x,Tx) - d(Tx,T^2x)$ である．したがって $d(x,Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$ が任意の x に対して成り立つ．また

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\varphi(y)| &\leq |d(x,Tx)-d(Tx,y)|+|d(Tx,y)-d(y,Ty)| \\ &\leq d(x,y)+d(Tx,Ty) \leq 2d(x,y)\end{aligned}$$

が任意の x, y に対して成り立つので φ は連続である．

6 Ekeland の変分不等式定理

本節では, Ekeland の変分不等式定理を定理 1 より導く．次が, Ekeland の変分不等式定理である．[5] の「Theorem 1.1」である．ただし, [5] で φ は $\not\equiv +\infty$ をみたす関数であるが, ここでは簡単のため $\mathbb{R}$ への関数とした．

定理 8. X を完備距離空間とし, φ を X から $\mathbb{R}$ への下半連続で, 下に有界な関数とする．$\epsilon > 0$ と $u \in X$ を

$$\varphi(u) \leq \inf_{x\in X} \varphi(x) + \epsilon$$

となるものとする．$\lambda > 0$ とする．このとき, ある $v \in X$ が存在して, 次をみたす．

(1) $\varphi(v) \leq \varphi(u)$;

(2) $d(u,v) \leq \lambda$;

(3) v と異なる任意の w に対して

$$\varphi(w) > \varphi(v) - \frac{\epsilon}{\lambda}d(v,w)$$

である．

証明. X の部分集合 X_0 を

$$X_0 = \left\{x \in X \mid \varphi(x) \leq \varphi(u) - \frac{\epsilon}{\lambda}d(u,x)\right\}$$

で定める．$u \in X_0$ より $X_0 \neq \emptyset$ である．また X_0 は閉集合であるから X_0 は完備である．$x \in X_0$ とすると

$$\frac{\epsilon}{\lambda}d(u,x) \leq \varphi(u) - \varphi(x) \leq \varphi(u) - \inf_{w\in X}\varphi(w) \leq \epsilon$$

より $d(u,x) \leq \lambda$ が成り立つ．また

$$\varphi(x) \leq \varphi(u) - \frac{\epsilon}{\lambda}d(x,u) \leq \varphi(u)$$

である．いま, 任意の $x \in X_0$ に対して, ある $y \in X_0$ が存在して $y \neq x$ であり $\varphi(y) \leq \varphi(x) - \frac{\epsilon}{\lambda}d(x,y)$ とする．選択公理を用いて, X_0 から X_0 への写像 T を $Tx = y$ とおく．X の要素 x, y に対して, 順序を

$$x \leq y \Longleftrightarrow \frac{\epsilon}{\lambda}d(x,y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$$

で定める．このとき X は順序集合である．鎖を C とおく．補助定理 6 より, C の上界が存在する．このとき, 任意の $x \in X_0$ に対して $x \neq Tx$ かつ $x \leq Tx$ である．定理 7 より不動点が存在する．これは矛盾である． □

7 高橋の最小値定理

本節では, 高橋の最小値定理を定理 1 より導く．次が, 高橋の最小値定理である．[16] の「Theorem 1」である．ただし, [16] で φ は $(-\infty, \infty]$ への「proper」関数であるが, ここでは簡単のため $\mathbb{R}$ への関数とした．[16] では, 高橋の最小値定理より, Caristi の不動点定理や Ekeland の変分不等式定理を導いている．また, 集合値縮小写像の不動点定理を導いている．

定理 9. X を完備距離空間とし, φ を X から $\mathbb{R}$ への下半連続で, 下に有界な関数とする．このとき

$$\inf_{x \in X} \varphi(x) < \varphi(u)$$

となる $u \in X$ に対して, ある $v \in X$ が存在して $u \neq v$ かつ $\varphi(v) + d(u,v) \leq \varphi(u)$ をみたすとする．このとき, ある $x_0 \in X$ が存在して

$$\varphi(x_0) = \inf_{x \in X} \varphi(x)$$

が成り立つ．

証明．X の要素 x, y に対して, 順序を

$$x \leq y \Longleftrightarrow d(x,y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$$

で定める．このとき X は順序集合である．鎖 を C とおく．補助定理 6 より, C の上界が存在する．任意の $x \in X$ に対して $\varphi(x) \neq \inf_{y \in X} \varphi(y)$ とする．このとき, 各 $x \in X$ に対して, ある $y \in X$ が存在して, $x \neq y$ かつ $d(x,y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$ が成り立つ．選択公理を用いて, X から X への写像 T を $Tx = y$ とおく．このとき, 任意の $x \in X$ に対して, $x \neq Tx$ かつ $x \leq Tx$ である．定理 7 より不動点が存在する．これは矛盾である． □

注. 定理 1 は, 選択公理を用いずに証明できる ([11]). また, 5 節でみたように, 定理 2 は選択公理を用いずに証明できる. 一方, 定理 8 や定理 9 の証明では, 選択公理を用いた. このように, これら 3 つの定理は, お互いに導けるという意味で同値であるが ([6]), 選択公理を使う使わないという意味の差がある. この論理的には同値でない件の指摘については [9] を参照されたい.

謝辞

本研究集会の発表準備中, 研究提案者である高橋渉先生の御逝去の報に接しました. 謹んでお悔やみ申し上げます. 御生前の御厚情に深く感謝いたします.

参考文献

[1] H. Amann, Order Structures and Fixed Points, Seminario di Analisi Funzionali e Applicazioni, Universit'a della Calabria, 1977.

[2] D. Azé and J.-N. Corvellec, A variational method in fixed point results with inwardness conditions. Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), 3577–3583.

[3] J. Caristi, Fixed point theorems for nappings satisfying inwardness conditions, Transactions of the American Mathematical Society, 215 (1976), 241–251.

[4] N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear Operators. I. General Theory. With the assistance of W. G. Bade and R. G. Bartle. Pure and Applied Mathematics, Vol. 7 Interscience Publishers, Inc., New York; Interscience Publishers, Ltd., London 1958.

[5] I. Ekeland, On the variational principle, J. Math. Anal. Appl., 47 (1974), 324-354.

[6] A. Hamel, Remarks to an equivalent formulation of Ekeland's variational principle, Optimization 31 (1994), 233-238.

[7] J. Jachymski, Order-Theoretic Aspects of Metric Fixed Point Theory. In: W. A. Kirk, B. Sims (eds) Handbook of Metric Fixed Point Theory. Springer, Dordrecht, 2001.

[8] W. A. Kirk, Caristi's fixed point theorem and metric convexity, Colloquium Mathematicae, 36 (1976), 81–.86.

[9] W. A. Kirk, Metric fixed point theory: a brief retrospective, Fixed Point

Theory Appl. 2015, 2015:215, 17 pp.

[10] S. Lang, Real analysis, 2nd ed., Addison-Wesley, 1983.

[11] 増田久弥, 応用解析ハンドブック, 丸善出版, 2012.

[12] 松坂和夫, 集合と位相入門, 岩波書店, 1968.

[13] 小澤徹, 順序集合に基づく不動点定理, 2016. http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/(2021 年 6 月 3 日確認)

[14] B. S. W. Schröder, The fixed point property for ordered sets, Arab. J. Math., 1 (2012), 529-547.

[15] 高橋渉, 非線形関数解析学, 近代科学社, 1988.

[16] W. Takahashi, Existence theorems generalizing fixed point theorems for multivalued mappings. Fixed point theory and applications (Marseille, 1989), 397406, Pitman Res. Notes Math. Ser., 252, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991.