SOME TYPES OF FIXED POINT FOR SET–VALUED MAPPINGS

集合値写像のいくつかのタイプの不動点

高橋非線形解析研究所　竹内 幸雄 (Yukio Takeuchi)
Takahashi Institute for Nonlinear Analysisl

1. 概要

非負の整数の集合, 正の整数の集合, 実数の集合を, それぞれ N_0, N, R と表記します. $k \in N$ ごとに, $N_k = \{j \in N : j \leq k\}$, $N_{k\leq} = \{j \in N : k \leq j\}$ とします. $N = N_{1\leq}$ です. 集合 X の部分集合すべての族を 2^X と表記します. C は常に非空集合とし "非空" を省略します. C と X を $C \subset X$ を満たす集合とし, C から 2^X への写像 T を C から X への集合値写像と呼びます. $z \in Tz$ を満たす点 $z \in C$ を集合値写像 T の不動点と呼びます. T の不動点すべての集合 $\{z \in C : z \in Tz\}$ を $F(T)$ と表記します. 一点 $x \in X$ だけを要素とする集合を $\{x\}^s$ と表記します. 距離空間と Banach 空間の基本的な知識を読者に期待します.

Nadler [10] は Banach の縮小写像原理を 1969 年に集合値写像の主張に移しました. Reich [12] の提起した Problem 9 への解答として, Mizoguchi–Takahashi [9] は, 1989 年に Nadler の結果を拡張しました. この様な結果に刺激されて多くの関連する研究が現れました. しかし, 上述した不動点の概念は非常に粗く, 多岐にわたる集合値写像を考察するには, この概念だけでは不十分だと著者には思われます.

集合値写像 T をどの様に定義するかによっては, すべての $x \in C$ が T の不動点になることもあります. 例えば, 最小化問題を考察すればこの様な集合値写像にしばしば出会います. この状況を考慮すると, 集合値写像の不動点の, より細やかな区分けが必要だと思われます. そして, 振り返れば, Nadler 以前から Browder, Fan など多くの数学者が, この様に区分けされた不動点を本質的には研究していたことに気付きます.

この様な視点から, 本稿では, 集合値写像 T の次の様な不動点を考察します:

(I) $Tz = \{z\}^s$ を満たす $z \in C$ を T の intrinsic fixed point と呼びます.
(B) $z \in \cap_{y\in C} Ty$ を満たす $z \in X$ を T の bundle point と呼びます.
　更に, $z \in \cap_{y\in C} Ty$ を満たす $z \in C$ を T の bundle fixed point と呼びます.

従来の概念をより細かく区分けした, この様な不動点の集合を $F_I(T)$, $F_B(T)$ と表記します. 本稿では, 必要に応じて C の点列 $\{x_n\}$ を生成します. このとき, しばしば, $F_{\{x_n\}}(T) = \{z \in F(T) : z \in \cap_n Tx_n\}$ が重要になります. ただし, $F_{\{x_n\}}(T)$ を一々明示しません. 当然, $F_{\{x_n\}}(T)$ の性質は $\{x_n\}$ の性質に依存します.

Bundle fixed point は, この概念がないとしても, この分野のいくつかの主題と密接に関連し, 私たちに身近なものです. 例えば, KKM–lemma は典型的な bundle fixed point theorem です. 一方, intrinsic fixed point という概念は馴染みがないと思いますが, 例えば, 次の定理 (Theorem 3.1 の要約) を証明できます.

Theorem 1.1. *Let (X, d) be a complete metric space and $b \in (0, \infty)$. Let K be a non–empty closed subset of X. Let f be a proper lower semi–continuous mapping from X into $(-\infty, \infty]$ satisfying $\inf_{y\in K} f(y) \in R$. Let T be the mapping from K into 2^X defined by*

$$Tx = \{y \in K : f(y) + bd(x, y) \leq f(x)\} \quad \text{for each} \quad x \in K.$$

Then, there is $v \in K$ satisfying $v \in F_I(T)$, that is, $Tv = \{v\}^s$.

Theorem 3.1 (Theorem 1.1) から, Ekeland の変分原理 [6] や Takahashi の最小値定理 [16, 18] が容易に導かれます. つまり, 良く知られた結果のいくつかは, この定理の有用な翻訳と考えることができます.

本稿では, 集合値写像のより細かく区分けされた不動点を使って, 既存の結果 (多岐にわたるのでいくつかの主題について) がどの様に整理されるかをみます. いくつかの主題の差異は取り扱う集合値写像 T の差異であることが観察できると思います. そして, 特に学生には, 既存の結果を見通し良く整理することは大切なことと思われ, 新しい結果にも繋がると考えています. ただし, 残念ですが紙数に制限があるため, 典型的な例の紹介にとどまり, 付随する bundle point などの重要と思われる概念や, 派生する種々の興味深い問題を議論することはできません. また, 取り上げるすべての主張に証明をつけることもできません.

2. Fixed points of set valued mappings

Banach の縮小写像原理の拡張のいくつかは, 集合値写像の主張に翻訳されています; 例えば Du and co–authors [5] とその文献を参照. 本節では, Mizoguchi–Takahashi の定理の version を解説します.

(X,d) を距離空間とし, $u \in X$, $C \in 2^X$ とします. このとき, u から C への距離 $d(u,C)$ は次の様に定義されます: $d(u,C) = \inf_{x \in C} d(u,x)$. 次の補題が成立します.

Lemma 2.1. *Let (X,d) be a metric space and let T be a mapping from X into 2^X. Suppose $z \in X$ satisfies $Tz \neq \emptyset$. Then, the following holds: $|d(u,Tz) - d(v,Tz)| \le d(u,v)$ for any $u,v \in X$.*

X の非空有界閉部分集合すべての族を $\mathrm{CB}(X)$ と表記し, H を次の様に定義します:

$$H(A,B) = \max\left\{ \sup_{x\in A} d(x,B),\ \sup_{y \in B} d(y,A) \right\} \quad \text{for any} \quad A,B \in \mathrm{CB}(X).$$

次の補題が成立するため, H は $\mathrm{CB}(X)$ 上の d による Hausdorff 距離と呼ばれます.

Lemma 2.2. *Let (X,d) be a metric space. Then, so is $(\mathrm{CB}(X),H)$.*

(X,d) を完備距離空間とし, T を X から $\mathrm{CB}(X)$ への写像とします. 少なくない研究者が, 彼らの設定した条件の下で, T の不動点に強収束する X の点列を考察しました. $u \in X$ とするとき, $C \in \mathrm{CB}(X)$ であっても, $d(u,v) = d(u,C)$ を満たす $v \in C$ が存在するとは限りません. 既存の研究から, この様な $v \in C$ が常に存在するならば, T の不動点への近似点列を理論的に得ることは比較的容易だと思われます. しかし, この様な $v \in C$ の存在は保証されませんから, この主題は, 誤差に類似する問題を本質的に内包することになります. 更に, 近似点列を数値計算で得る手続きを考えれば, 新たな困難が生じるかもしれません. 本稿では, この様な状況を合理的に捉えるために, Takeuchi [21] の意味での許容範囲を持つ iteration を考えます.

この文脈で, step n での許容範囲 A_n とは, 手続きに準備される X の部分集合です. そして, $x_n \in A_n$ として生成される点列 $\{x_n\}$ は, ある $x_* \in F(T)$ に理論的には強収束することが要請されます. ただし, A_{n+1} は通常 x_n に依存して決まり, 事前に $\{A_n\}$ を決定することはできません. 現実の制約によって, $x_{n_0+1} \in A_{n_0+1}$ が得られなければ手続きは停止します. 例えば, A_{n_0+1} のサイズが, 私たちの手続きや機器に起因する誤差の上限より小さくなれば, 手続きは停止することになります. それでも, $\{d(x_n, x_*)\}$ が理論的には 0 に収束するので, 私たちは step n_0 まで正しい道筋を辿っていると考えることができます. この手続きと機器について, $d(x_{n_0}, x_*)$ が未知であっても, x_{n_0} を $x_* \in F(T)$ の最良の近似点と考えることができます.

a を次の条件を満たす $[0,\infty)$ から $[0,1)$ への関数とします: $\limsup_{s \to t+0} a(s) < 1$ for all $t \in [0,\infty)$. やや分かりずらい $\limsup_{s\to t+0} a(s) < 1$ は, $\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{s \in (t,t+\varepsilon]} a(s) < 1$ と考えてかまいません. もちろん, $\varepsilon > 0$ です. $c \in (0,1)$ ごとに, 次の様な関数 b_c を考えます: $b_c(t) = c \times 1 + (1-c)a(t)$ for each $t \in [0,\infty)$. このとき, b_c は $[0,\infty)$ から $(0,1)$ への関数であり, $a(t) < b_c(t)$ for all $t \in [0,\infty)$ と次を満たします:

- ◦ $\limsup_{s\to t+0} a(s) \le \limsup_{s \to t+0} b_c(s) < 1$ for all $t \in [0,\infty)$.

Mizoguchi–Takahashi の定理の version を提示します. 証明は, 本質的には Suzuki [15] のものです.

Theorem 2.3. *Let (X,d) be a complete metric space and T be a mapping from X into $\mathrm{CB}(X)$. Let a be a function from $[0,\infty)$ into $[0,1)$ satisfying $\limsup_{s\to t+0} a(s) < 1$ for all $t \in [0,\infty)$. Assume*

$$\text{(MT)} \qquad H(Tx,Ty) \le a(d(x,y))d(x,y) \qquad \text{for all} \quad x,y \in X.$$

Define a function b from $[0,\infty)$ into $(0,1)$ by $b(t)=\frac{1}{2}(1+a(t))$ for each $t\in[0,\infty)$. Let $x_1\in X=A_1$ and $A_2=Tx_1$. For each $n\in N$, generate x_{n+1} and A_{n+2} by the following procedure:

(i) $x_{n+1}\in A_{n+1}$.

(ii) *This procedure will be stopped if* $x_{n+1}=x_n$.

(iii) $A_{n+2}=\{y\in Tx_{n+1}: d(x_{n+1},Tx_{n+1})\le d(x_{n+1},y)\le b(d(x_n,x_{n+1}))d(x_n,x_{n+1})\}$.

Then the following hold:

(a) *There is $l\in N$ satisfying $x_l\in F(T)$, if the procedure stops.*

(b) *The sequence $\{x_n\}$ converging strongly to $u\in F(T)$ is generated, if the procedure does not stop.*

Proof. $Tx_1\in \mathrm{CB}(X)$ より, $A_2=Tx_1\ne\emptyset$ は自明です. $x_2\in A_2\subset Tx_1$ を選べます. $x_2\ne x_1$ を仮定します; $d(x_1,x_2)\ne 0$. このとき, b の性質を考慮すれば, $x_2\in Tx_1$, (MT) と H の定義より,

$$\begin{aligned} d(x_2,Tx_2) &\le \sup_{z\in Tx_1} d(z,Tx_2)\le H(Tx_1,Tx_2)\\ &\le a(d(x_1,x_2))d(x_1,x_2)<b(d(x_1,x_2))d(x_1,x_2)<d(x_1,x_2). \end{aligned}$$

従って, $d(x_2,Tx_2)=\inf_{y\in Tx_2} d(x_2,y)$ なので, $A_3\ne\emptyset$ です. $x_3\in A_3\subset Tx_2$ を選べます. この様にして, $x_{l+1}=x_l$ となる $l\in N$ が現れるまで, x_{n+1}, Tx_{n+1}, A_{n+2} が生成されます.

(b) を示します. 次のことを仮定します: $x_{n+1}\ne x_n$ for all $n\in N$. このとき, ここまでの議論から, 点列 $\{x_n\}$ と集合列 $\{Tx_n\}$, $\{A_n\}$ を得ます. 次のことを知っています:

$$\begin{aligned} &x_{n+1}\in A_{n+1}\subset Tx_n,\quad x_{n+1}\ne x_n,\\ &d(x_{n+1},Tx_{n+1})\le d(x_{n+1},x_{n+2})\le b(d(x_n,x_{n+1}))d(x_n,x_{n+1})<d(x_n,x_{n+1})\quad \text{for all } n\in N. \end{aligned}$$

従って, $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ は $[0,\infty)$ の単調減少列です. $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ はある $\tau\in[0,\infty)$ に収束します. $b(\tau)\in(0,1)$ と $\limsup_{s\to\tau+0} b(s)<1$ より, 次の様な $r\in(0,1)$ と $\varepsilon\in(0,\infty)$ が存在します: $b(t)<r$ for all $t\in[\tau,\tau+\varepsilon]$. 更に, 次の様な $n_0\in N$ が存在します: $d(x_n,x_{n+1})\in[\tau,\tau+\varepsilon]$ for all $n\in N_{n_0\le}$. 従って, 次を得ます: $b(d(x_n,x_{n+1}))<r$ for all $n\in N_{n_0\le}$. これらのことから, すべての $n\in N_{n_0\le}$ について,

$$d(x_{n+1},x_{n+2})\le b(d(x_n,x_{n+1}))d(x_n,x_{n+1})<rd(x_n,x_{n+1}).$$

$r\in[0,1)$ より, $\lim_m \frac{r^m}{1-r}=0$ です. また, すべての $m,k\in N$ について,

$$d(x_{n_0+m},x_{n_0+m+k})\le \sum_{j=m}^{m+k-1} d(x_{n_0+j},x_{n_0+j+1})<\sum_{j=m}^{m+k-1} r^j d(x_{n_0},x_{n_0+1})<\frac{r^m}{1-r}d(x_{n_0},x_{n_0+1}).$$

従って, $\{x_n\}$ は Cauchy 列です. X は完備ですから, $\{x_n\}$ はある $u\in X$ に強収束します.

$u\in Tu$ を示します. Lemma 2.1 より, $|d(u,Tu)-d(x_n,Tu)|\le d(x_n,u)$ です. $\lim_n d(x_n,u)=0$ より, $d(u,Tu)=\lim_n d(x_n,Tu)$ を得ます. 従って, $x_{n+1}\in Tx_n$, (MT), と H の定義より,

$$d(u,Tu)=\lim_n d(x_{n+1},Tu)\le \lim_n H(Tx_n,Tu)\le \lim_n b(d(x_n,u))d(x_n,u)\le \lim_n d(x_n,u)=0.$$

$Tu\in\mathrm{CB}(X)$ は閉集合ですから, $u\in Tu$ を得ます. 次に, (a) を示します. A_{l+1} が生成されて, $x_{l+1}=x_l$ だとします. このとき, 直ちに $x_l=x_{l+1}\in A_{l+1}\subset Tx_l$ が従います. □

この定理で, $r\in[0,1)$ とし, 次の様な関数 a を選べば Nadler [10] の結果を得ます: $a(t)=r$ for all $t\in[0,\infty)$. また, $x_n\in Tx_n$ の判断が容易ならば, $x_l\in Tx_l$ となる $l\in N$ の出現を手続きの停止条件にできます. $x_{l+1}=x_l$ ならば $x_l\in Tx_l$ です. x_n が Tx_n の境界付近にあれば, この判断は容易とは限りません.

Mizoguchi–Takahashi の original の定理では, a の定義域は $(0,\infty)$ であり, $x\ne y$ である $x,y\in X$ について (MT) の成立を要請しています. しかし, $a(0)=a_0\in[0,1)$ とし, a の定義域を $[0,\infty)$ とみなしてかまいません. このとき, $d(x,y)=0$ ならば $H(Tx,Ty)=0$ より, すべての $x,y\in X$ が (MT) を満たします. また, 彼らは, Reich [12] Problem 9 の $(0,\infty)$ を $[0,\infty)$ に変更し, $\limsup_{s\to t+0} a(s)<1$ for all $t\in[0,\infty)$ を仮定しています. このため, この定理は Problem 9 の部分的解答とされますが, ほぼ完全な解答です.

Mizoguchi–Takahashi の original の証明は複雑でした. Daffer–Kaneko [4] が提示した証明もさほど簡単ではありません. この様な中で, Suzuki は a の代わりに b を用いて (MT) を次の様に捉え直しました:

(S) $$H(Tx,Ty) < b(d(x,y))d(x,y) \quad \text{for all } x,y \in X \text{ with } x \neq y.$$

Suzuki の証明の要は, b を使用することによって, この gap を作り出す simple なアイデアです.

3. Intrinsic fixed points of set valued mappings

集合値写像 T について, intrinsic fixed point theorem (Theorem 3.1) を提示します. 証明の本質的な部分の大枠を述べておきます. 定理の条件の下で, 許容範囲を持つ iteration によって点列 $\{x_n\}$ を生成します. $\{x_n\}$ の生成規則から, $\hat{v} \in F_{\{x_n\}}(T) = \cap_n Tx_n$ の存在を示し, 更に, $\hat{v} \in F_I(T)$, 即ち $T\hat{v} = \{\hat{v}\}^s$ を導きます. この節の主題は, 高橋渉先生と著者の最後の論文 [20] で議論した内容の一部と密接に関連しています.

(X,d) を距離空間とし, f を X から $(-\infty,\infty]$ への関数とします. $D(f) = \{x \in X : f(x) < \infty\}$ を f の定義域と呼びます. $D(f) \neq \emptyset$ であるとき, f は proper と呼ばれます. $a \in R$ ごとに, $L_{\leq a}(f)$ を次の様な f の level 集合とします: $L_{\leq a}(f) = \{x \in D(f) : f(x) \leq a\}$. f が下半連続 (lower semi–continuous) とは, すべての $a \in R$ について $L_{\leq a}(f)$ が閉集合になることです. ちなみに, f が上半連続 (upper semi–continuous) とは, $-f$ が下半連続になることです. X から $(-\infty,\infty]$ への proper な下半連続関数すべての集合を $\gamma^l(X)$ と表記します. K は常に X の非空閉集合とし, "非空" は省略します.

$f \in \gamma^l(X)$, $b \in (0,\infty)$ とします. $x \in X$ ごとに, 次の様な g_x を考えます: $g_x(y) = f(y) + bd(x,y)$ for each $y \in X$. $f, d(x,\cdot) \in \gamma^l(X)$, $b \in (0,\infty)$, $D(d(x,\cdot)) = X$ より, $g_x \in \gamma^l(X)$ です. また, $g_x(x) = f(x)$ for all $x \in X$ です. $D(f) \cap K$ を $D_K(f)$ と表記します. K から 2^X への写像 T を次の様に定義します:

(ET) $$Tx = \{y \in K : f(y) + bd(x,y) \leq f(x)\} = \{y \in K : g_x(y) \leq f(x)\} \quad \text{for each } \ x \in K.$$

従って, K が閉集合, T の定義, 下限の性質より, 次の基本事項はほぼ明らかです (無断で使用します):

- ○ Suppose $\inf_{y\in K} f(y) \in R$. Then, $\inf_{y\in K} f(y) = \inf_{y\in D_K(f)} f(y)$ and $D_K(f) \neq \emptyset$.
  Suppose further that $\emptyset \neq K' \subset D_K(f)$. Then, $\inf_{y\in K} f(y) \leq \inf_{y\in K'} f(y)$ and $\inf_{y\in K'} f(y) \in R$.
- ○ $x \in Tx \subset D_K(f)$ for all $x \in D_K(f)$, $\quad x \in Tx = K$ for all $x \in K \backslash D(f)$.
- ○ Tx is non–empty and closed for all $x \in K$.
- ○ Suppose $z \in D_K(f)$ and $w \in Tz$. Then, $w \in Tw \subset Tz$.
  Suppose further $w \neq z$. Then, $f(w) < f(z)$.

最後の主張だけ確認します. $z \in D_K(f)$, $w \in Tz$ より, $w \in D_K(f)$, $w \in Tw$ です. $y \in Tw$ とすれば,

$$f(y) + bd(w,y) \leq f(w), \quad bd(z,w) \leq f(z) - f(w),$$
$$f(y) + bd(z,y) \leq f(y) + bd(w,y) + bd(z,w) \leq f(w) + (f(z) - f(w)) = f(z).$$

$Tw \subset Tz$ を得ます. $w \neq z$ ならば, $bd(z,w) > 0$ と $f(w) + bd(z,w) \leq f(z)$ より, $f(w) < f(z)$ です.

Theorem 3.1. *Let (X,d) be a complete metric space. Let K be a closed subset of X. Let $f \in \gamma^l(X)$ satisfy $\inf_{y\in K} f(y) \in R$ and $b \in (0,\infty)$. Let T be the mapping from K into 2^X defined by* (ET)*, that is, $Tx = \{y \in K : f(y) + bd(x,y) \leq f(x)\}$ for each $x \in K$. Let $x_1 \in D_K(f) = A_1$. For each $n \in N$, generate A_{n+1} and x_{n+1} by the following procedure*:

(i) *This procedure will be stopped, if $Tx_n = \{x_n\}^s$ $(Tx_n \backslash \{x_n\}^s = \emptyset)$.*

(ii) $A_{n+1} = \{y \in Tx_n : f(y) \leq \frac{1}{2} f(x_n) + \frac{1}{2} \inf_{z\in Tx_n} f(z)\}$.

(iii) $x_{n+1} \in A_{n+1}$.

Then the following hold:

(a) *There is $l \in N$ satisfying $x_l \in F_I(T)$, if the procedure stops.*

(b) *The sequence $\{x_n\}$ converging strongly to $\hat{v} \in F_I(T)$ is generated, if the procedure does not stop.*

Remark. *For* (a)*, $x_l \in F_{\{x_n\}_{n=1}^l}(T)$ holds; $x_l \in \cap_{n=1}^l Tx_n$. For* (b)*, $\hat{v} \in F_{\{x_n\}}(T)$ holds; $\hat{v} \in \cap_{n\in N} Tx_n$.*

Proof. $\inf_{y\in K} f(y) \in R$ より $D_K(f) \neq \emptyset$. $x_1 \in A_1 = D_K(f)$ を選べます. $x_1 \in Tx_1 \subset D_K(f)$ であり, Tx_1 は非空閉集合です. X が完備より Tx_1 も完備です (Tx_1 が微小でもサイズを持てば $Tx_1 \neq \{x_1\}^s$ です). $\inf_{y\in K} f(y) \in R$ と $Tx_1 \subset D_K(f)$ より, $\inf_{y\in K} f(y) \leq \inf_{y\in Tx_1} f(y)$, $\inf_{y\in Tx_1} f(y) \in R$ です.

$Tx_1 \neq \{x_1\}^s$ を仮定します. $w \neq x_1$ となる $w \in Tx_1$ が存在します. 従って, $\inf_{y\in Tx_1} f(y) \leq f(w) < f(x_1)$ です. $\inf_{y\in Tx_1} f(y) \in R$ より, 次の関係が成立します:

$$\inf_{y\in Tx_1} f(y) < \tfrac{1}{2}\inf_{y\in Tx_1} f(y) + \tfrac{1}{2}f(x_1) < f(x_1). \tag{3.1}$$

従って, $A_2 \neq \emptyset$ ですから, $x_2 \in A_2 \subset Tx_1$ を選べます. このとき, $x_2 \neq x_1$, $x_2 \in Tx_2 \subset Tx_1 \subset D_K(f)$, Tx_2 は完備, $\inf_{y\in Tx_1} f(y) \leq \inf_{y\in Tx_2} f(y)$, $\inf_{y\in Tx_2} f(y) \in R$ です. $Tx_2 \neq \{x_2\}^s$ ならば, この手続きを継続できます. この様に, $Tx_l = \{x_l\}^s$ となる $l \in N$ が現れるまで, A_{n+1}, x_{n+1}, Tx_{n+1} が生成されます.

(b) を示します. すべての $n \in N$ について, $Tx_n \neq \{x_n\}^s$ とします. このとき, ここまでの議論から, 点列 $\{x_n\}$ と集合列 $\{Tx_n\}$, $\{A_n\}$ が生成され, 次の条件を満たします: すべての $n \in N$ について,

(A) $x_{n+1} \in Tx_{n+1} \subset Tx_n \subset D_K(f)$, and Tx_n is complete.

(B) $\inf_{y\in Tx_n} f(y) \leq f(x_{n+1}) \leq \frac{1}{2}f(x_n) + \frac{1}{2}\inf_{y\in Tx_n} f(y) < f(x_n)$.

$x_1 \in Tx_1$ に注意すれば, (A) より, $\{x_n\}$ は Tx_1 の点列です. (B) より, $\{f(x_n)\}$ は単調減少です. もちろん, $\inf_{y\in K} f(y) \in R$ は $\{f(x_n)\}$ の下界です. 従って, $\{f(x_n)\}$ はある $c \in R$ に収束します.

(A) と (ET) より, すべての $n, m \in N$ について, 次の関係を得ます:

$$bd(x_{n+m}, x_n) \leq \sum_{j=0}^{m-1} bd(x_{n+j+1}, x_{n+j}) \leq \sum_{j=0}^{m-1}(f(x_{n+j}) - f(x_{n+j+1})) = f(x_n) - f(x_{n+m}).$$

$\{f(x_n)\}$ が収束し $b > 0$ なので, この不等式より, $\{x_n\}$ は Tx_1 の Cauchy 列です.

Tx_1 は完備なので, $\{x_n\}$ はある $\hat{v} \in Tx_1 \subset D_K(f)$ に強収束します. また, (A) より, 任意の $j \in N$ について, $\{x_n\}_{n\geq j}$ は完備な集合 Tx_j の点列です. $\hat{v} \in \cap_{n\in N} Tx_n \subset D_K(f)$; $\hat{v} \in F_{\{x_n\}}(T) \subset D_K(f)$ を得ます, 即ち, $\hat{v} \in T\hat{v} \subset \cap_{n\in N} Tx_n \subset D_K(f)$ です. 更に, $f \in \gamma^l(X)$ より, $f(\hat{v}) \leq \liminf_n f(x_n) = \lim_n f(x_n)$ です.

$\hat{v} \in F_I(T)$; $T\hat{v} = \{\hat{v}\}^s$ を背理法で示すために, $T\hat{v} \neq \{\hat{v}\}^s$ とします. 即ち, $\hat{w} \neq \hat{v}$ である $\hat{w} \in T\hat{v}$ が存在するとします. このとき, $\hat{w} \in T\hat{v} \subset \cap_{n\in N} Tx_n$ かつ $f(\hat{w}) < f(\hat{v})$ です. 従って, $\hat{w} \in \cap_{n\in N} Tx_n$ と (B) より,

$$2f(x_{n+1}) - f(x_n) \leq \inf_{y\in Tx_n} f(y) \leq f(\hat{w}) \quad \text{for all} \quad n \in N.$$

$\lim_n f(x_n) \leq f(\hat{w})$ を得ます. この関係と, $f(\hat{v}) \leq \lim_n f(x_n)$, $f(\hat{w}) < f(\hat{v})$ より, 矛盾を得ます:

$$f(\hat{v}) \leq \lim_n f(x_n) \leq f(\hat{w}) < f(\hat{v}).$$

x_l が生成され $Tx_l = \{x_l\}^s$ とします. 上の議論から, Remark を含めて (a) が明らかに成立します. □

Theorem 3.1 から, Takahashi の最小値定理 [16, 18] と Ekeland の変分原理 [6] を導きます.

Theorem 3.2. *Let (X, d) be a complete metric space and K be a closed subset of X. Let $f \in \gamma^l(X)$ satisfy $\inf_{y\in K} f(y) \in R$ and $b \in (0, \infty)$. For each $x \in K$, let $A_x = \{y \in K : f(y) + bd(x, y) \leq f(x)\}$ and suppose either $f(x) = \inf_{y\in K} f(y)$ or $A_x \neq \{x\}^s$ holds. Then, there is $\hat{v} \in K$ satisfying $f(\hat{v}) = \inf_{y\in K} f(y)$.*

Proof. Theorem 3.1 の T をとれば, $A_{\hat{v}} = T\hat{v} = \{\hat{v}\}^s$ となる $\hat{v} \in K$ が存在し, $f(\hat{v}) = \inf_{y\in K} f(y)$ です. □

Theorem 3.3. *Let (X, d) be a complete metric space. Let $f \in \gamma^l(X)$ satisfy $\inf_{y\in X} f(y) \in R$. Let $b \in (0, \infty)$, $u \in X$ and $A_u = \{y \in X : f(y) + bd(u, y) \leq f(u)\}$. Then, there is $\hat{v} \in A_u$ satisfying* (E):

(E)
$$f(\hat{v}) < f(y) + bd(\hat{v}, y) \qquad \text{for all} \quad y \in X \quad \text{with} \quad y \neq \hat{v}.$$
$$f(\hat{v}) = \inf_{y\in E}\{f(y) + bd(\hat{v}, y)\}.$$
$$f(\hat{v}) \leq f(u) - bd(\hat{v}, u) \qquad (\, f(\hat{v}) \leq f(u),\ f(\hat{v}) < f(u) \text{ if } u \neq \hat{v}\,).$$

Proof. $\inf_{y\in X} f(y) \in R$ より, $D(f) \neq \emptyset$ です. Theorem 3.1 で $K = X$ とすれば, T は次の様になります:

$$Tx = \{y \in X : f(y) + bd(x, y) \leq f(x)\} \quad \text{for each} \quad x \in X.$$

$u \in D(f)$ の case を考えます. Theorem 3.1 とその Remark より, $x_1 = u$ とおけば, $T\hat{v} = \{\hat{v}\}^s$ となる $\hat{v} \in Tu = A_u \subset D(f)$ が存在します. A_u は非空閉, $f(\hat{v}) \le f(u) - bd(\hat{v}, u)$, $f(\hat{v}) = f(\hat{v}) + bd(\hat{v}, \hat{v})$ です.

$y \notin A_u$ とします. このとき, $f(u) < f(y) + bd(u, y)$ です. 次を得ます:

$$f(y) + bd(\hat{v}, y) \ge f(y) + bd(u, y) - bd(\hat{v}, u) > f(u) - bd(\hat{v}, u) \ge f(\hat{v}).$$

$y \in A_u$ かつ $y \ne \hat{v}$ とします. $T\hat{v} = \{v\}^s$ より, $y \notin T\hat{v}$ は自明です, 即ち, $f(\hat{v}) < f(y) + bd(\hat{v}, y)$ を得ます. この様にして, $\hat{v} \in A_u$ が (E) を満たすことを確認しました.

$u \notin D(f)$ の case を考えます. 任意に $u' \in D(f)$ をとります. u を u' に置き換えた (E) を満たす $\hat{v} \in A_{u'}$ が存在します. $A_u = X$, $f(u) = \infty$ を考慮すると, $\hat{v} \in A_{u'} \subset A_u$ が (E) を満たすことは明らかです. □

Ekeland の変分原理にはいくつかの表現が存在します ; 例えば, Phelps [11] を参照. Theorem 3.3 の証明に, Theorem 3.1 の代わりに Theorem 1.1 を使用すると, ほんの少しですが余分な手間がかかります.

Theorem 3.3 で, $f \in \gamma^l(X)$ は $\inf_{y \in X} f(y) \in R$ を満たし, $b \in (0, \infty)$, $u \in X$ です. このとき, 私たちは f が最小点を持つかどうかを知りません. しかし, Theorem 3.3 より, (E) を満たす $\hat{v} \in A_u$ が存在します. $\hat{v}$ による perturbation を考慮した $g_{\hat{v}} \in \gamma^l(X)$ を考えます: $g_{\hat{v}}(y) = f(y) + bd(\hat{v}, y)$ for each $y \in X$. このとき, (E) は次のことも主張します: たとへ f が最小点を持たないとしても, $g_{\hat{v}}$ は唯一の最小点 $\hat{v}$ を持つ.

4. Bundle fixed points of set–valued mappings

Bundle fixed point の例は多様なので, 話題を equilibrium problem (均衡問題) に限定します. それでも広範なので, Fan, Takahashi や Blum–Otteli が研究した方向で本質的と思われる部分に焦点を絞ります.

本節の主題は, Browder に (おそらく) 始まり, Fan と Takahashi が発展させた 2 変数関数の理論と密接に関連しています. 簡潔な解説のために, Banach 空間 E とその共役空間 E^* に議論の舞台を限定します. そして, C を E の部分集合とし, $C \times C$ 上の実数値 2 変数関数を扱います; $\pm\infty$ を値としません.

基本事項と補題. 最初に, KKM–lemma を提示します. Brouwer の不動点定理を使った KKM–lemma の証明は簡明ですが, それでも 1 ページ程度は必要なので証明を割愛します; Dugundji–Granas [3], Shioji [14] とその文献を参照. Brouwer の定理の初等的で簡潔な証明は, Takeuchi–Suzuki [22], Kulpa [8] を参照してください. KKM–lemma は, 証明してしまえば, Brouwer の定理より使いやすいことが少なくありません.

本節では, $\{y_j\}^C_{j \in N_k}$ は C の有限部分集合, $\mathrm{co}(\{y_j\}^C_{j \in N_k})$ は $\{y_j\}^C_{j \in N_k}$ の閉凸包の表記とします. KKM–lemma の証明に何故 Brouwer の定理を使用できるのかに触れます. C を Banach 空間 E の部分集合とし, $\mathcal{K} = \mathrm{co}(\{y_j\}^C_{j \in N_k})$ と $\mathcal{K}$ 上の連続な自己写像 g を考えます. そして, $\{y_j\}^C_{j \in N_k}$ から生成される E の有限次元部分線形空間 L を考えます. 線形空間 E は, 無限次元ならば, 複数の異なる線形位相を持ち得ます. しかし, 有限次元線形空間 L を線形位相空間にするハウスドルフ位相は 1 つしか存在しません. 従って, 私たちはこの位相を Euclid 位相と考えてかまいません. 即ち, E の線形位相から導かれる L の相対位相と L の Euclid 位相は一致し, 凸集合 $\mathcal{K} = \mathrm{co}(\{y_j\}^C_{j \in N_k}) \subset L$ は L の Euclid 位相で compact, g は L の Euclid 位相で連続と考えて構いません. この事実は, Banach 空間 E の線形位相がどの様であるかに影響されません.

Lemma 4.1. *Let C be a subset of a Banach space E and T be a mapping from C into 2^E which satisfies the following*:

- (K1) $\mathrm{co}(\{y_j\}^C_{j \in N_k}) \subset \cup_{j \in N_k} Ty_j$ *holds for each $k \in N$ and $\{y_j\}^C_{j \in N_k}$,*
- (K2) *Ty is weakly closed for all $y \in C$,*
- (K3) *there is $v \in C$ such that Tv is weakly compact.*

Then, $F_B(T) \ne \emptyset$, that is, $\cap_{y \in C} Ty \ne \emptyset$.

C を Banach 空間 E の部分集合とし $y_1, y_2 \in C$ とします. このとき, $[y_1; y_2] = \mathrm{co}(\{y_1, y_2\})$ と $[y_1; y_2]^\circ = \{z \in [y_1; y_2] : z \notin \{y_1, y_2\}\}$ は, y_1 と y_2 を結ぶ通常の意味での閉線分と開線分です.

C を凸集合とし, l, l', l'' を C から R への関数とします. l が convex とは, 次が成立することです:

$$l((1-a)x+ay) \le (1-a)l(x)+al(y) \quad \text{for all} \quad x, y \in C,\ a \in (0,1).$$

$x \ne y$ ならば, この $\le$ を $<$ で置き換えられるとき, l を strictly convex と呼びます. $-l$ が (strictly) convex であるとき, l を (strictly) concave と呼び, l が convex かつ concave であるとき l を affine と呼びます.

l が quasi–convex とは, 次の (q) が成立することです. l が semi strictly quasi–convex とは, (ssq) が成立することであり, l が strictly quasi–convex とは, (sq) が成立することです:

(q) For any $y_1, y_2 \in C$, $l(z) \le \max\{l(y_1), l(y_2)\}$ for all $z \in [y_1; y_2]$.

(ssq) For any $y_1, y_2 \in C$, $l(z) < \max\{l(y_1), l(y_2)\}$ if $z \in [y_1; y_2]^\circ$ and $l(y_1) \ne l(y_2)$.

(sq) For any $y_1, y_2 \in C$, $l(z) < \max\{l(y_1), l(y_2)\}$ for all $z \in [y_1; y_2]^\circ$.

l が (q) と (ssq) を満たすとき, half strictly quasi–convex と呼ぶことにします. これらを, q–convex, ssq–convex, sq–convex, hsq–convex と表記します. $-l$ が q–convex, ssq–convex, hsq–convex, sq–convex のとき, l を q–concave, ssq–concave, hsq–concave, sq–concave と呼びます. 紙数がないので差異を詳述できませんが, l が convex ならば hsq–convex, l が sq–convex ならば hsq–convex, l が strictly convex ならば sq–convex です. ssq–convex な関数の族と q–convex な関数の族に包含関係はありません. (q) と (q)$'$, (q)$''$ は同値です:

(q)$'$ $l(z) \le \max_{j \in N_k} l(y_j)$ for any $k \in N$, $\{y_i\}_{i \in N_k}^C$, $z \in \mathrm{co}(\{y_i\}_{i \in N_k}^C)$.

(q)$''$ $L_{l \le a}(f)$ is convex for all $a \in R$.

C 上の convex な関数の族は加法について半群です; l' と l'' が convex ならば $l = l' + l''$ も convex です. l' が strictly convex, l'' が convex ならば, l は strictly convex です. C 上の q–convex な関数の族は convex な関数の族を包含していますが, 加法について半群ではありません. Convex な関数についてのある主張が, 条件を弱め q–convex な関数の主張に直せることがあるとしても, 本稿で触れる様な理論を構成するには, 扱う関数の族が加法について半群でないと, しばしば不都合なことに出会います.

C を E の部分集合とします. F を $C \times C$ から R への関数とし, T^F と S^F を次の様に定義します:

$$T^F y = \{x \in C : F(x,y) \ge 0\} \quad \text{for each} \quad y \in C, \qquad S^F x = \{y \in C : F(x,y) \le 0\} \quad \text{for each} \quad x \in C.$$

T^F, S^F は C から C への集合値写像であり, 次は自明です:

$$F_B(T^F) = \cap_{y \in C} T^F y = \{x \in C : F(x,y) \ge 0 \text{ for all } y \in C\},$$
$$F_B(S^F) = \cap_{x \in C} S^F x = \{y \in C : F(x,y) \le 0 \text{ for all } x \in C\}.$$

$F_B(T^F)$ と $F_B(S^F)$ を, それぞれ $EP(C,F)$, $ep(C,F)$ と表記します. $ep(C,F)$ を $EP^*(C,F)$ とも表記します. $x \in EP(C,F)$ を求めることを equilibrium problem と呼びます. この問題は最小化問題と関係があります: $x_0 \in F_B(T^F)$ ならば $\inf_{y \in C} F(x_0, y) \ge 0$. また, $y \in ep(C,F)$ を求めることは最大化問題と関係があります: $y_0 \in F_B(S^F)$ ならば $\sup_{x \in C} F(x, y_0) \le 0$. 従って, 私たちは, $F_B(T^F) \ne \emptyset$, $[F_B(S^F) \ne \emptyset]$ や $F_B(T^F) \cap F_B(S^F) \ne \emptyset$ を保証する条件に興味があります. 確かに, ある 2 変数関数 f の均衡問題は f から生成した 2 変数関数 F の最小化問題に関連付けられますが, $w \in EP(C,F) \cap ep(C,F)$ を求めることを equilibrium problem と呼ぶ方が素直に思えます: $w \in EP(C,F) \cap ep(C,F) = F_B(T^F) \cap F_B(S^F)$ ならば,

$$\sup_{x \in C} F(x,w) = \inf_{y \in C} F(w,y) = F(w,w) = 0.$$

A を C から E^* への写像とします. $C \times C$ から R への関数 F を, 双対式を用いて次の様に定義します: $F(y,x) = \langle y-x, Ax \rangle$ for each $y, x \in C$. このとき, C から C へ集合値写像 T^F と S^F は次の様になります:

$$T^F y = \{x \in C : \langle y-x, Ax \rangle \ge 0\} \quad \text{for each} \quad y \in C, \quad S^F x = \{y \in C : \langle y-x, Ax \rangle \le 0\} \quad \text{for each} \quad x \in C.$$

$F_B(T^F)$ と $F_B(S^F)$ を, それぞれ $VI(C,A)$, $vi(C,A)$ と表記します. 即ち,

$$VI(C,A) = \{x \in C : \langle y-x, Ax \rangle \ge 0 \text{ for all } y \in C\} = Ep(C,F) = F_B(T^F) = \cap_{y \in C} T^F y,$$
$$vi(C,A) = \{y \in C : \langle x-y, Ax \rangle \ge 0 \ \text{ for all } x \in C\} = ep(C,F) = F_B(S^F) = \cap_{x \in C} S^F x.$$

$x_0 \in VI(C,A) = F_B(T^F)$ を求めることを variational inequality problem (変分不等式問題) と呼びます; Hartman–Stampacchia [7] を参照. $y_0 \in vi(C,A) = F_B(S^F)$ を求める問題を, Minty の意味での variational inequality problem と呼ぶことがあります. $\{y \in E : \langle x-y, Ax\rangle \geq 0\}$ は, $x \in C$ と $Ax \in E^*$ によって決定される閉半空間です. この閉半空間と C の共通部分 $S^F x$ の考察は $T^F y$ の考察より通常は容易なので, $vi(C,A) \neq \emptyset$ を保証する条件の考察は, $VI(C,A) \neq \emptyset$ を保証する条件の考察より容易です. また, $\emptyset \neq vi(C,A) \subset VI(C,A)$ という条件の下で $v \in vi(C,A)$ を得れば, $v \in VI(C,A)$ であり, $v \in vi(C,A) \cap VI(C,A) = F_B(T^F) \cap F_B(S^F)$ です. 即ち, $v \in vi(C,A)$ を求める問題は equilibrium problem とみなせます. この観点からは, $\emptyset \neq vi(C,A) \subset VI(C,A)$ を保証する条件が重要です; 後述します. ただし, 副産物として, 同じ条件が私たちに都合の良い関係 $vi(C,A) = VI(C,A)$ も保証します.

$v \in vi(C,A)$ を求める問題が, 閉半空間の族の共通部分の考察と関連していることは明らかでしょう. Banach 空間 E の超曲面 l が E を 2 つの閉領域に分割し, 2 つの閉領域の共通の境界が l である case を考えます. この分野では, 多くの主題が, この様な閉領域の族の共通部分の考察と関連しています.

C を Banach 空間 E の部分集合, F, G を $C \times C$ から R への関数とし, 次のことを再確認します:

$$T^G y = \{x \in C : G(x,y) \geq 0\} \quad \text{for each} \quad y \in C, \qquad S^F x = \{y \in C : F(x,y) \leq 0\} \quad \text{for each} \quad x \in C.$$

任意の $x, y \in C$ について $G(x,y) = -F(y,x)$ を仮定するならば, $T^G = S^F$ です;

$$T^G y = \{x \in C : G(x,y) \geq 0\} = \{x \in C : F(y,x) \leq 0\} = S^F y \quad \text{for each} \quad y \in C.$$

この後は, C を閉凸集合として議論します; 主として, C が弱 compact で凸の case を扱います. C を閉凸集合とし, h を C から R への関数とします. C が閉凸なので, 次のことが導かれます. h が q-concave ならば, h が上半連続と h が弱上半連続 (weakly upper semi–continuous) は同じことです. また, 証明は省略しますが, 次の主張が成立します: h が下半連続で ssq–convex ならば hsq–convex です. $y, z \in C$ とします. このとき, $\lim_n((1-\frac{1}{n})z + \frac{1}{n}y) = z$ です. h が上半連続ならば $\limsup_n h((1-\frac{1}{n})z + \frac{1}{n}y) \leq h(z)$ であり, h が連続ならば $\lim_n h((1-\frac{1}{n})z + \frac{1}{n}y) = h(z)$ です. 上半連続より弱い次の条件を扱います: For any $z, y \in C$, $\liminf_n h((1-\frac{1}{n})z + \frac{1}{n}y) \leq h(z)$. 準備が整ったので, 本節で重要な 2 つの条件群を考えます:

(F1) $0 \leq G(x,y) - F(x,y)$ for all $x, y \in C$.
(F2) $F(x,x) \geq 0$ for all $x \in C$.
(F3) $F(x, \cdot\,)$ is q–convex for each $x \in C$.
(F4) $G(\cdot\,, y)$ is weakly upper semi–continuous for each $y \in C$.
(F5) $G(x,x) = 0$ for all $x \in C$.
(F6) $G(\cdot\,, y)$ is sq–concave for each $y \in C$.

(B1) $0 \leq G(x,y) + F(y,x)$ for all $x, y \in C$.
(B2) $0 \leq G(x,y) - F(x,y)$ for all $x, y \in C$. (F1)
(B3) $G(\cdot\,, y)$ is weakly upper semi–continuous for each $y \in C$. (F4)
(B4) $G(x,x) = 0$ for all $x \in C$. (F5)
(B5) $G(\cdot\,, y)$ is hsq–concave for each $y \in C$. weaker than (F6)
(B6) For any $z, y \in C$, $\liminf_n F\left((1-\frac{1}{n})z + \frac{1}{n}y, y\right) \leq F(z,y)$.

Lemma 4.2. *Let C be a weakly compact convex subset of a Banach space E. Let F and G be functions from $C \times C$ into R. Suppose* (F1)–(F4) *hold. Then, $F_B(T^G) \neq \emptyset$, that is, $\cap_{y\in C} T^G y \neq \emptyset$. Suppose further that* (F5)–(F6) *hold. Then, $F_B(T^G)$ is singleton.*
Rewriting results. *There is $w \in C$ satisfying $\inf_{y\in C} G(w,y) \geq 0$ if* (F1)–(F4) *hold. There is a unique $w \in C$ satisfying $\inf_{y\in C} G(w,y) = G(w,w) = 0$ if* (F1)–(F6) *hold.*

Proof. (F1) と (F2) から, 次は自明です: $y \in T^F y \subset T^G y$ for all $y \in C$. T^G が KKM–lemma の (K2)–(K3) を満たすことを確認します. (F4) より, すべての $y \in C$ について, $T^G y$ は弱閉集合です. C は弱 compact で

すから, $T^G y$ も弱 compact です. T^G が KKM–lemma の (K1) を満たすことを確認します. 任意に $k \in N$ と $\{y_i\}_{i\in N_k}^C$ を固定し, $\mathrm{co}(\{y_i\}_{i\in N_k}^C) \subset \cup_{i\in N_k} T^G y_i$ を示します. $k=1$ のとき, $y_1 \in T^G y_1$ を既に知っています. $k \in N_{2\le}$ とします. 背理法で示すために, 次の様な $k \in N_{2\le}$ と $z \in E$ の存在を仮定します: $z \in \mathrm{co}(\{y_i\}_{i\in N_k}^C) \subset C$, $z \notin \cup_{i\in N_k} T^G y_i$. このとき, すべての $i \in N_k$ について $z \notin T^G y_i$, 即ち, すべての $i \in N_k$ について $G(z, y_i) < 0$ です. 従って, (F1)–(F3) より, 矛盾を得ます:

$$0 \le F(z,z) \le \max_{i\in N_k} F(z,y_i) \le \max_{i\in N_k} G(z,y_i) < 0.$$

KKM–lemma より, $F_B(T^G) = \cap_{y\in C} T^G y \neq \emptyset$ を得ます. $w \in F_B(T^G) = \cap_{y\in C} T^G y$ が存在します.

更に, (F5)–(F6) を仮定し, $F_B(T^G) = \{w\}^s$ を示します. $w \neq w'$ である $w' \in \cap_{y\in C} T^G y$ が存在するとします. $v = \frac{1}{2}(w + w') \in [w; w']^\circ$ とすれば, $w, w' \in \cap_{y\in C} T^G y$ より, $G(w,v) \ge 0$ かつ $G(w',v) \ge 0$ です. 従って, $G(v,v) = 0$ と $G(\,\cdot, v)$ が sq–concave より矛盾を得ます: $0 \le \min\{G(w,v), G(w',v)\} < G(v,v) = 0$.

また, $w \in F_B(T^G)$ は $\inf_{y\in C} G(w,y) \ge 0$ を意味し, (F5) より, $\inf_{y\in C} G(w,y) = G(w,w) = 0$ です. □

Lemma 4.3. *Let C be a weakly compact convex subset of a Banach space E. Let F and G be functions from $C \times C$ into R. Then, the following hold*:

(1) *Suppose* (B2) *hold. Then, $F_B(T^F) \subset F_B(T^G)$, that is, $\cap_{y\in C} T^F y \subset \cap_{y\in C} T^G y$.*

(2) *Suppose* (B1)–(B2) *and* (B4) *hold. Then, $y \in T^F y \subset T^G y$ and $F(y,y) = 0$ for all $y \in C$.*

(3) *Suppose* (B1) *and* (B4)–(B6) *hold. Then, $F_B(T^G) \subset F_B(T^F)$, that is, $\cap_{y\in C} T^G y \subset \cap_{y\in C} T^F y$.*

Proof. (1) を示します. (B2) より, 明らかに, $T^F y \subset T^G y$ for all $y \in C$. このことから, 次が従います; $F_B(T^F) = \cap_{y\in C} T^F y \subset \cap_{y\in C} T^G y = F_B(T^G)$. (2) を示します. (B1), (B2) と (B4) を仮定したので,

$$0 = -G(x,x) \le F(x,x) \le G(x,x) = 0 \quad \text{for all} \ \ x \in C.$$

従って, (1) も考慮すると, 次が成立します: $y \in T^F y \subset T^G y$, $F(y,y) = 0$ for all $y \in C$.

(3) を示します. $z \in F_B(T^G) = \cap_{x\in C} T^G x$ とします. 任意に $y \in C$ を固定し, $z \in T^F y$ を示します. $n \in N$ ごとに, $x_n = (1 - \frac{1}{n})z + \frac{1}{n} y$ とします. すべての $n \in N$ について, $G(y, x_n) \le 0$ を示します. $y = z$ ならば, (B4) より, $G(y,x_n) = G(y,y) = 0$ for all $n \in N$. $y \neq z$ とします. (B4) より, $G(y,x_1) = G(y,y) = 0$ であり, $x_n \in [z;y]^\circ$ for all $n \in N_{2\le}$. $G(y, x_{n_0}) > 0$ となる $n_0 \in N_{2\le}$ の存在を仮定し矛盾を導きます. $z \in \cap_{x\in C} T^G x$ より, $G(z, x_{n_0}) \ge 0$ です. 更に, (B4) より, $G(x_{n_0}, x_{n_0}) = 0$ です. そして, $G(z, x_{n_0}) = G(y, x_{n_0})$ とすれば, (B5) より $G(\,\cdot, x_{n_0})$ は q–concave なので, $0 = G(x_{n_0}, x_{n_0}) \ge \min\{G(z,x_{n_0}), G(y,x_{n_0})\} = G(y,x_{n_0}) > 0$. $G(z,x_{n_0}) \neq G(y,x_{n_0})$ とすれば, (B5) より $G(\,\cdot, x_{n_0})$ は ssq–concave なので, $0 = G(x_{n_0}, x_{n_0}) > \min\{G(z,x_{n_0}), G(y,x_{n_0})\} \ge 0$. ともに矛盾を得たので, $G(y,x_n) \le 0$ for all $n \in N_{2\le}$. ここまでの議論から, (B1) も考慮すると, $0 \le -G(y,x_n) \le F(x_n,y)$ for all $n \in N$.

この様にして, (B6) より, $0 \le \liminf_n F(x_n, y) \le F(z,y)$, 即ち $z \in T^F y$ を得ます. y は任意ですから, $z \in \cap_{y\in C} T^F y = F_B(T^F)$ です. この様にして, $F_B(T^G) \subset F_B(T^F)$ を得ます. □

Fan, Takahashi, Blum–Otteli の研究方向. ここまでの概念・記号を踏襲します.

粗い言い方をすれば, Fan, Takahashi [17] は $G = F$ として (F1)–(F6) を考察し, Blum–Otteli [2] は次の様な条件の下で (B1)–(B6) を考察しました: $G(x,y) = -F(y,x)$ for all $x, y \in C$.

Theorem 4.4. *Let C be a weakly compact convex subset of a Banach space E. Let F be a function from $C \times C$ into R satisfying the following conditions*:

(1) *$F(x,x) \ge 0$ for all $x \in C$.*

(2) *$F(x,\cdot)$ is q–convex for each $x \in C$.*

(3) *$F(\cdot, y)$ is weakly upper semi–continuous for each $y \in C$.*

Then, $F_B(T^F) \neq \emptyset$, that is, $\cap_{y\in C} T^F y \neq \emptyset$. Suppose further that $F(x,x) = 0$ for all $x \in C$ and $F(\cdot, y)$ is sq–concave for each $y \in C$. Then, $F_B(T^F)$ is singleton.

Rewriting results. *There is $w \in EP(C,F)$, that is, there is $w \in C$ satisfying* $\inf_{y\in C} F(w,y) \ge 0$.

Suppose further that $F(x,x)=0$ for all $x \in C$ and $F(\cdot,y)$ is sq–concave for each $y \in C$. Then, there is a unique $w \in C$ satisfying $\inf_{y\in C} F(w,y) = F(w,w) = 0$.

Proof. $G=F$ として, (F5)–(F6) を検証します. (F1) は自動的に成立します. (1)–(3) と $G=F$ より, (F2)–(F4) の成立は自明です. 更に, すべての $x \in C$ について $F(x,x)=0$, $y \in C$ ごとに $F(\cdot,y)$ は sq–concave, を仮定すれば, $G=F$ なので, (F5)–(F6) が成立します. Lemma 4.2 より, 結論を得ます. □

Theorem 4.4 を含む Fan, Takahashi の結果のいくつかと Blum–Otteli [2] の主定理と Corollary 1 (17) は, この分野にいくつかの主題を産みました. Theorem 4.5 は, 後者の本質的な一部分を整理したものです.

Theorem 4.5. *Let C be a weakly compact convex subset of a Banach space E. Let F be a function from $C \times C$ into R satisfying the following*:

(1) $F(x,x)=0$ *for all $x \in C$.*

(2) $F(x,y)+F(y,x) \le 0$ *for all $x,y \in C$.*

(3) $F(x,\cdot)$ *is weakly lower semi–continuous and ssq–convex for each $x \in C$.*

(4) *For any $z,y \in C$, $\liminf_n F\left((1-\frac{1}{n})z+\frac{1}{n}y, y\right) \le F(z,y)$.*

Then, there is $w \in C$ satisfying $w \in F_B(T^F)=F_B(S^F)$. Furthermore, replace ssq–convex by sq–convex in (3)*. Then, $F_B(T^F)=F_B(S^F)$ is singleton.*

Rewriting results. *There is $w \in C$ satisfying $\sup_{x\in C} F(x,w) = \inf_{y\in C} F(w,y) = F(w,w) = 0$. Furthermore, replace ssq–convex by sq–convex in* (3)*. Then, such w is unique.*

Proof. 次の様に G を定義します: $G(x,y)=-F(y,x)$ for each $x,y \in C$. (F1)–(F6) と (B1)–(B6) を検証します. (B1) は自動的に成立します; $0=G(x,y)+F(y,x)$. (1) は (F2) より強い条件です. G の定義と (1) より, $0=-F(x,x)=G(x,x)$ for all $x \in C$; (F5; B4) が成立します. (2) より, すべての $x,y \in C$ について $F(x,y) \le -F(y,x) = G(x,y)$, 従って $G(x,y)-F(x,y) \ge 0$; (F1; B2) が成立します. (3) より, (F3) が従います. (3) と G の定義より, $y \in C$ ごとに, $G(\cdot,y)$ は弱上半連続, hsq–concave です; (F4; B3) と (B5) が成立します. また, (4) と (B6) は同じ条件なので, F と G は (F1)–(F5) 及び (B1)–(B6) を満たします.

前者と Lemma 4.2 より, $w \in F_B(T^G)$ が存在します. 更に, 後者と Lemma 4.3 より, $F_B(T^G)=F_B(T^F)$ です. G の定義より $T^G=S^F$ ですから, $w \in F_B(S^F)=F_B(T^G)=F_B(T^F)$ を得ます.

(3) の ssq–convex を, より強い sq–convex とします. G の定義より, $G(\cdot,y)$ は sq–concave ですから, (F6) が成立します. 即ち, (F1)–(F6) すべてが成立します. Lemma 4.2 より, $F_B(T^G)$ は 1 点集合です. □

また, Blum–Otteli は, どの様な設定の下で, C が弱 compact という仮定を C が閉集合という仮定に弱められるかを同時に考察しました. このことが彼らの議論を複雑に見せています. E を滑らかで回帰的な狭義凸 Banach 空間とすれば, E^* も滑らかで回帰的な狭義凸 Banach 空間です. この性質の良い空間では, あまり細部に捉われず議論ができます. Theorem 4.5 を考慮すると, 次の Theorem 4.6 が得られます.

C から R への関数 f が coercive とは, C の点列 $\{x_n\}$ が $\lim_n \|x_n\| = \infty$ を満たすならば $\lim_n f(x_n) = \infty$ が成立することです. Theorem 4.5 の C が弱 compact という仮定が C が閉集合という仮定に置き換えられています. また, この後の議論の便宜のため, Theorem 4.6 の (3),(4) は, Theorem 4.5 の (3),(4) より強い仮定にしています. Theorem 4.6 の証明は難しくありませんが紙数の関係で割愛します.

Theorem 4.6. *Let C be a closed convex subset of a smooth strictly convex reflexive Banach space E. Let F be a function from $C \times C$ into R satisfying the following*:

(1) $F(x,x)=0$ *for all $x \in C$.*

(2) $F(x,y)+F(y,x) \le 0$ *for all $x,y \in C$.*

(3) $F(x,\cdot)$ *is weakly lower semi–continuous and convex for each $x \in C$.*

(4) *For any $z,y \in C$, $\limsup_n F\left((1-\frac{1}{n})z+\frac{1}{n}y, y\right) \le F(z,y)$.*

Suppose that $-F(\cdot,a)$ is coercive for some $a \in C$. Then, there is $w \in F_B(T^F)=F_B(S^F)$.

Theorem 4.6 の設定で, $z^* \in E^*$, $r > 0$, $a \in C$ とします. $C \times C$ から R への関数 f は Theorem 4.6 (1)–(4) を満たすとし, 次の様な $C \times C$ から R への関数 g_{r,z^*} と F を考えます:

$$g_{r,z^*}(x,y) = \tfrac{r}{2}\|y\|^2 - \tfrac{r}{2}\|x\|^2 + r\langle y-x, z^*\rangle, \quad F(x,y) = f(x,y) + g_{r,z^*}(x,y) \quad \text{for each} \quad x,y \in C.$$

g_{r,z^*} は Theorem 4.6 (1)–(3) を満たし, $g_{r,z^*}(\,\cdot\,,y)$ は連続, $-g_{r,z^*}(\,\cdot\,,a)$ は coercive です. f と g_{r,z^*} の性質より, F は再び Theorem 4.6 (1)–(4) を満たし, $-F(\,\cdot\,,a)$ は coercive です. この検証は容易であり, g_{r,z^*} と F の考察から, 多くの有用な結果が得られます; 例えば, [1], [19], [13] と関連する結果も得られます.

C を Banach 空間 E の閉凸部分集合, f,g を $C \times C$ から R への関数とし, 次の F,G を作ります.

$$F(x,y) = f(x,y) + g(x,y), \quad G(x,y) = -f(y,x) + g(x,y) \qquad \text{for each} \quad x,y \in C.$$

Blum–Otteli の議論は, この f,g の条件を調節して, $G(x,y) = -F(y,x)$ が成立し, $F(x,y)$ が Theorem 4.6 (1)–(4) を満たす様にすることを意識している, と著者には思われます. f,g が Theorem 4.6 (4) を満たせば $f+g$ も満たします. ただし, 彼らの与えた条件群と Theorem 4.6 (1)–(4) とは表現が異なります.

C を Banach 空間 E の部分集合とし, A を C から E^* への写像とします. A が monotone (単調) とは次の条件が満たされることです: $\langle x-y, Ax-Ay\rangle \ge 0 \quad \text{for all} \quad x,y \in C$.

Theorem 4.7. *Let C be a weakly compact convex subset of a Banach space E. Let A be a mapping from C into E^*. Define functions F and G from $C \times C$ into R respectively by*

$$F(x,y) = \langle y-x, Ax\rangle, \quad G(x,y) = -F(y,x) = \langle y-x, Ay\rangle \qquad \text{for each} \quad x,y \in C.$$

Then $F_B(S^F)$ is weakly compact and convex. Furthermore, the following hold:

(a) *Suppose A is monotone. Then, $F_B(T^F) \subset F_B(S^F)$ and $F_B(S^F) \neq \emptyset$.*

(b) *Suppose A is norm to weak continuous. Then, $F_B(S^F) \subset F_B(T^F)$.*

Rewriting results. *$vi(C,A)$ is weakly compact and convex. Furthermore, the following hold*:

(a)$'$ *Suppose A is monotone. Then, $VI(C,A) \subset vi(C,A)$ and $vi(C,A) \neq \emptyset$.*

(b)$'$ *Suppose A is norm to weak continuous. Then, $vi(C,A) \subset VI(C,A)$.*

Proof. F,G の定義より, 次は自明です: $G(x,y) + F(y,x) = 0$ for each $x,y \in C$. 従って, $T^G = S^F$ です. C が閉凸, F,G の定義, と双対式の性質より, F と G について, 次の主張はほぼ明らかです:

- ◦ $F(x,x) = G(x,x) = 0 \quad \text{for all } x \in C$.
- ◦ $G(\,\cdot\,,y)$ is affine for each $y \in C$. $F(x,\cdot\,)$ is affine for each $x \in C$.
- ◦ $G(\,\cdot\,,y)$ is weakly continuous for each $y \in C$. $F(x,\cdot\,)$ is weakly continuous for each $x \in C$.

C が弱 compact で凸と $F(x,\cdot\,)$ が affine で弱連続より, $S^F x$ は弱 compact で凸, 従って $F_B(S^F)$ も弱 compact で凸です. 細かく確認しておきます. $G(\,\cdot\,,y)$ が affine より $G(\,\cdot\,,y)$ は hsq–concave, $F(x,\cdot\,)$ が affine より $F(x,\cdot\,)$ も hsq–convex です. C は閉凸集合, $G(\,\cdot\,,y)$ と $F(x,\cdot\,)$ は C 上で弱連続ですから, 弱下半連続かつ弱上半連続です. F, G は (F2)–(F5) 及び (B1), (B3)–(B5) を満たしています.

(a) を示します. F, G の定義と A が monotone より, $G(x,y) - F(x,y) = \langle y-x, Ay-Ax\rangle \ge 0$ for all $x,y \in C$. 従って, F, G は (F1;B2) を満たします. 従って, Lemma 4.3 より $F_B(T^F) \subset F_B(T^G) = F_B(S^F)$ が成立します. また, F, G は (F1)–(F5) を満たしているので, Lemma 4.2 より, $F_B(S^F) \neq \emptyset$ を得ます.

(b) を示します. 仮定より, A は E にノルム位相, E^* に弱位相を考えるとき連続です. 任意に $z,y \in C$ を固定し, $n \in N$ ごとに $x_n = (1-\frac{1}{n})z + \frac{1}{n}y$ とします. このとき, $\lim_n \|x_n - z\| = \lim_n \frac{1}{n}\|y-z\| = 0$ です. A は上述した意味で連続ですから, 次の関係が成立します:

$$\lim_n \langle y-z, Ax_n\rangle = \langle y-z, Az\rangle, \quad \lim_n \langle z-y, Ax_n\rangle = \langle z-y, Az\rangle. \tag{4.1}$$

一方, $z - x_n = \frac{1}{n}(z-y)$ より, 任意の $n \in N$ について, 次の等式が成立します:

$$F(x_n,y) = \langle y-x_n, Ax_n\rangle = \langle y-z, Ax_n\rangle + \langle z-x_n, Ax_n\rangle = \langle y-z, Ax_n\rangle + \tfrac{1}{n}\langle z-y, Ax_n\rangle.$$

この関係と (4.1) より, $\lim_n F(x_n, y) = \langle y - z, Az \rangle = F(z, y)$ を得ます. 即ち, (B6) が成立します. 従って, F, G は (B1) と (B3)–(B6) を満たします. Lemma 4.3 より, $F_B(S^F) = F_B(T^G) \subset F_B(T^F)$ を得ます.

この (b) の証明は, A が norm to weak continuous という条件をより弱い次の条件に代えても, 明らかに有効です: 任意の $y, z \in C$ について, 線分 $[y; z]$ 上の点列 $\{x_n\} = \{(1 - \frac{1}{n})z + \frac{1}{n}y\}$ が (4.1) を満たす. $\square$

*****

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

高橋 涉 先生の長きにわたるご厚情と学恩に心より感謝いたします. この論稿を発表する機会を準備していただいた, 東海大学 高阪史明先生, 千葉大学 青山 耕治 先生をはじめとする諸先生にお礼申し上げます.

References

[1] K. Aoyama, Y. Kimura and W. Takahashi, *Maximal monotone operators and maximal monotone functions for equilibrium problems*, J. Convex Anal. 15 (2008), 395-409.
[2] E. Blum and W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student 63 (1994), 123–145.
[3] J. Dugundji and A. Granas, *"KKM maps and variational inequalities"*, Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa Cl. Sei. 5 (1978), 679–682.
[4] P. Z. Daffer and H. Kaneko, *Fixed points of generalized contractive multi-valued mappings*, J. Math. Anal. Appl. 192 (1995) 655-666.
[5] W-S. Du, E. Karapnar, and N. Shahzad, *The study of fixed point theory for various multivalued non-self-maps*, Abst. Appl. Anal., Vol. 2013. Hindawi.
[6] I. Ekeland. *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl., 47 (1974), 324–353.
[7] P. Hartman and G. Stampacchia, *On some nonlinear elliptic differential functional equations*, Acta Math. 115 (1966) 271–310.
[8] W. Kulpa, *The Poincare-Miranda theorem*, Amer. Math. Monthly 104 (1997), 545–550.
[9] N. Mizoguchi and W. Takahashi, *Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., 141 (1989), 177–188.
[10] S. B. Nadler Jr, *Multi-valued contraction mappings*, Pacific J. Math. 30 (1969), 475–488.
[11] R. R. Phelps. *Convex functions, monotone operators and differentiability*, 1364, Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1993.
[12] S. Reich, *Some fixed point problems*, Atri. Acad. Nuz. Lincei 57 (1974), 194–198.
[13] S. Saejung, *Ray's Theorem for Firmly Nonexpansive-Like Mappings and Equilibrium Problems in Banach Spaces*, Fixed Point Theory and Applications 1 (2010): 806–837.
[14] N. Shioji, *A further generalization of the Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 111 (1991), 187–195.
[15] T. Suzuki, *Mizoguchi-Takahashi's fixed point theorem is a real generalization of Nadler's*, J. Math. Anal. Appl., 340 (2008), 752–755.
[16] W. Takahashi, *Existence theorems generalizing fixed point theorems for multivalued mappings*, Fixed Point Theory and its Applications, J. B. Baillon and M. Thera Eds., Pitman Res. Notes in Math. Ser. 252, Longman, Harlow (1991), 397–406.
[17] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.
[18] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points'*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.
[19] W. Takahashi, J-C. Yao, and F. Kohsaka, *The fixed point property and unbounded sets in Banach spaces*, Taiwan. J. Math. 14 (2010), 733–742.
[20] W. Takahashi and Y. Takeuchi, *The Fenchel duality formula, The Ekeland variational principle, and Rockafellar's Theorem for maximal monotonicity of subdifferentials*, Optimization (2021) 1–19.
[21] Y. Takeuchi, *Shrinking projection method with allowable ranges*, J. Nonlinear Anal. Optim., 10(2) (2019), 83–94.
[22] Y. Takeuchi and T. Suzuki, *"An easily verifiable proof of the Brouwer fixed point theorem"*, Bull. Kyushu Inst. Technol. 59 (2012), 1-5.

E-mail address: aho314159@yahoo.co.jp