離散共通不動点定理
A discrete common fixed point theorem

川崎英文 *

Hidefumi Kawasaki

九州大学大学院数理学研究院

Faculty of Mathematics, Kyushu University

Abstract

不動点定理は数学の広い分野で有用な定理である．凸集合の分離定理は最適化理論において中心的役割をはたしてきた．両者の間に密接な関係があることを Hahn-Banach の拡張定理と Markov-角谷の共通不動点定理 [4, 1936], [1, 1938] は示している．実際，角谷 [2, 1986] は Markov-角谷の共通不動点定理を用いて Hahn-Banach の定理を証明し，Werner [7, 1993] はその逆を示している．他方，室田 [5, 1998][6] は組合せ最適化を念頭に離散凸解析を提唱し，凸解析の理論的な枠組みを与えることに成功した．本研究は離散共通不動点定理の試みであり，離散凸解析で導入された $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合上の写像を対象とする．

1 序

不動点定理は微分方程式論，ゲーム理論，最適化理論，数値解析など様々な分野で有用な定理である．一方，凸集合の分離定理は最適化理論において，双対定理やミニマックス定理や主双対アルゴリズム等，中心的役割をはたしてきた．両者の間に密接な関係があることを Hahn-Banach の拡張定理と Markov-角谷の共通不動点定理 [4, 1936], [1, 1938] は示した．実際，角谷 [2, 1986] は Markov-角谷の共通不動点定理を用いて Hahn-Banach の定理を証明し，Werner [7, 1993] は Hahn-Banach の定理の幾何学版である凸集合の分離定理から Markov-角谷の共通不動点定を導いた．

他方，室田 [5, 1998][6] 離散凸解析を提唱し，組合せ最適化の凸解析理論の枠組みを与えることに成功した．離散凸解析は L 凸と M 凸と言う 2 つの凸性からなるが，本論文では L 凸が重要な役割を演じる．その理由は以下のとおりである．そもそも，写像 $f : K \to K$ が不動点をもつと言うことは，そのグラフ $G := \{(x, f(x)) \mid x \in K\}$ と対角集合 $\Delta := \{(x, x) \mid x \in K\}$ の共通集合が空でないと言うことである．ここで，集合 K が $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合のとき，対角集合 Δ も $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合になるが，K が $\mathrm{M}^\natural$ 凸集合であっても，Δ は $\mathrm{M}^\natural$ 凸集合にはならないからである．

本論文では，$\mathrm{L}^\natural$ 凸集合上の離散的な共通不動点定理を与える．第 2 節で [6] から離散凸解析のいくつかの基本的な結果を引用する．第 3 節で，有界な $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合上の離散不動点定理を 2 つ与える．ひとつは単一の写像の不動点定理で，もうひとつは複数個（有限個）の写像の共通不動点定理である．

---

*kawasaki.hidefumi.245@m.kyushu-u.ac.jp

2　離散凸解析からの準備

$\mathbb{Z}^n$ の部分集合 D が

$$p \vee q,\ p \wedge q,\ p \pm \mathbf{1} \in D \quad (p, q \in D), \tag{1}$$

を満たすとき，D を **L 凸集合**とよぶ．ただし，$\mathbf{1}= (1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}^n$,

$$\begin{aligned} p \vee q &= (\max\{p_1, q_1\}, \ldots, \max\{p_n, q_n\}), \\ p \wedge q &= (\min\{p_1, q_1\}, \ldots, \min\{p_n, q_n\}) \end{aligned}$$

とする．なお，L 凸集合が空か非空かを強調するために，本論文では空集合も L 凸集合とする．以前は，L 凸集合は非空としていたが，最近はそれを課さないことが多いようである．

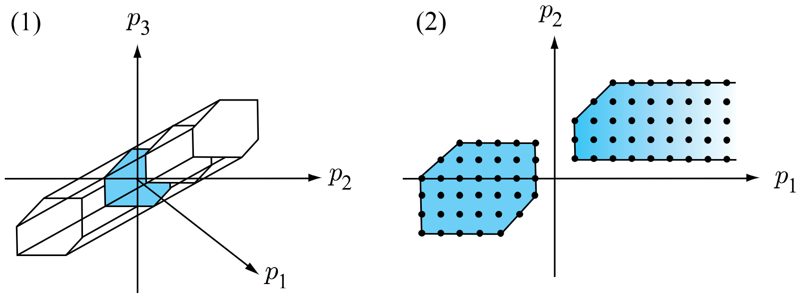

図 1: (1) $\mathbb{Z}^3$ の L 凸集合の凸包．　(2) $\mathbb{Z}^2$ の $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合．

図 1 のように，L 凸集合 D は対角方向 $\mathbf{1}$ に 1 次元の無駄があるため，$D \subset \mathbb{Z}^{n+1}$ の座標平面 $\{(0, p) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid p \in \mathbb{Z}^n\}$ による切り口を考える方が自然である．そのようにして得られる集合を $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合とよぶ．このとき，$\mathrm{L}^\natural$ 凸集合 $P \subset \mathbb{Z}^n$ は次の**中点凸性**で特徴づけられる．

$$\left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor,\ \left\lceil \frac{p+q}{2} \right\rceil \in P, \quad (p,\, q \in P), \tag{2}$$

ただし，$x \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\lceil x \rceil$ と $\lfloor x \rfloor$ はそれぞれ成分毎の切上げと切り捨てを表す．最近は (2) を $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合の定義とすることが多く，さらに $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合を L 凸集合とよぶこともある．

次に，$\mathrm{L}^\natural$ 凸集合の陽な表現を紹介する．$\mathbb{R}^n$ の第 i 標準単位ベクトルを $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ として，次の定理は，$\mathrm{L}^\natural$ 凸集合が法線ベクトルが $e_j - e_i$ 若しくは e_k であるような凸多面体の整数点集合であることを主張している．

定理 1 $P \subset \mathbb{Z}^V$ が $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合であるための必要十分条件は，ある $\alpha_i \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, $\beta_i \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, $\gamma_{ij} \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ を用いて

$$P = \{p \in \mathbb{Z}^n \mid \alpha_i \le p_i \le \beta_i,\ p_j - p_i \le \gamma_{ij}\ (1 \le i \ne j \le n)\}$$

と表されることである．

本節の最後に，離散凸解析の分離定理のひとつを引用しておく．

定理 2 2 つの $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合 P_1 と P_2 の共通集合が空であるための必要十分条件は，ある $x \in \{0, \pm 1\}^n$ が存在して，$|x_1 + \cdots + x_n| \le 1$ と

$$x^T p \le x^T q - 1 \quad (p \in P_1,\ q \in P_2) \tag{3}$$

を満たすことである．

3 離散共通不動点定理

最初にMarkov-角谷の共通不動点定理を引用する．

定理 3 K を局所凸な線形位相空間 X の非空なコンパクト凸集合とする．$\mathcal{T}$ を K から K へのアフィン写像の可換な族とする．このとき，$\mathcal{T}$ の共通不動点集合は非空なコンパクト凸集合である．

本節で定理3の離散版を目指すのであるが，舞台は $\mathbb{Z}^n$ なので，コンパクト凸集合の役割は有界な $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合が担うことになる．また，任意のアフィン写像 T が

$$T\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{Tx+Ty}{2},$$

を満たすことを参考に，写像 $T: P\to\mathbb{Z}^n$ が**離散中点アフィン写像**であることを，P が $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合であり，T が任意の $p,\,q\in P$ に対して

$$\left\lfloor\frac{Tp+Tq}{2}\right\rfloor=T\left\lfloor\frac{p+q}{2}\right\rfloor,\quad \left\lceil\frac{Tp+Tq}{2}\right\rceil=T\left\lceil\frac{p+q}{2}\right\rceil \tag{4}$$

を満たすことで定義する．

補題 1 $P\subset\mathbb{Z}^n$ を非空な $L^\natural$ 凸集合として，$T:P\to\mathbb{Z}^n$ を離散中点アフィン写像とする．このとき T のグラフ $G=\{(p,Tp)\mid p\in P\}$ と不動点集合 $F(T):=\{p\in P\mid Tp=p\}$ は（空を許して）$L^\natural$ 凸集合になる．

証明．$(p,Tp),\,(q,Tq)\in G$ とすると，(4) により，

$$\left\lfloor\frac{(p,Tp)+(q,Tq)}{2}\right\rfloor=\left(\left\lfloor\frac{p+q}{2}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{Tp+Tq}{2}\right\rfloor\right)=\left(\left\lfloor\frac{p+q}{2}\right\rfloor,T\left\lfloor\frac{p+q}{2}\right\rfloor\right).$$

離散中点凸性により $\lfloor(p+q)/2\rfloor\in P$ なので，最後の項は G に属する．同様に，中点の切り上げも G に属する．よって G は $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合である．

次に，$p,\,q\in F(T)$ とすると，(4) により，

$$\left\lfloor\frac{p+q}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{Tp+Tq}{2}\right\rfloor=T\left\lfloor\frac{p+q}{2}\right\rfloor,$$

$$\left\lceil\frac{p+q}{2}\right\rceil=\left\lceil\frac{Tp+Tq}{2}\right\rceil=T\left\lceil\frac{p+q}{2}\right\rceil$$

となる．つまり，$\lfloor(p+q)/2\rfloor$ と $\lceil(p+q)/2\rceil$ は T の不動点なので，$F(T)$ は $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合である．

定理 4 $P\subset\mathbb{Z}^V$ を非空で有界な $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合とし，$T:P\to P$ を離散中点アフィン写像とすると，不動点集合 $F(T)$ は非空な $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合になる．

証明．T が不動点をもたなければ，対角集合 $\Delta_P=\{(p,p)\mid p\in P\}$ と T のグラフは交わらない．どちらも $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合なので (補題1)，分離定理 (定理2) により，$x,\,y\in\{0,\pm1\}^n$ で $|x^T\mathbf{1}+y^T\mathbf{1}|\le 1$ と

$$x^Tp+y^Tp\le x^Tq+y^T(Tq)-1\quad(p,\,q\in P)$$

を満たすものが存在する．ここで $q=p$ をとると，

$$y^T(Tp-p) \geq 1 \quad (p \in P).$$

この不等式に p として Tp を代入すると，$y^T(T^2p-Tp) \geq 1$. 以下同様に

$$y^T(T^kp-T^{k-1}p) \geq 1 \quad (k=1,\ldots,n).$$

和をとると $y^T(T^np-p) \geq n$ なので，極限をとると $y^T(T^np)$ は発散し，$\{T^np\}_n$ が有界であることに矛盾である．故に T は不動点をもつ．補題 1 により，不動点集合は $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合である．

定理 5 （離散共通不動点定理）$P \subset \mathbb{Z}^n$ を非空で有界な $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合とし，$T_i : P \to P$ $(i=1,\ldots,m)$ を可換な離散中点アフィン写像とする．このとき，共通不動点集合 $F(T_1)\cap\cdots\cap F(T_m)$ は非空で有界な $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合になる．

証明.（帰納法）$m=1$ は定理 4 の主張である．$m=k$ のとき $T_1,\ldots,T_k$ の共通不動点集合 $F(T_1)\cap\cdots\cap F(T_k)$ を F_k として，任意の $p \in F_k$ と $1 \leq i \leq k$ に対して，可換性から

$$T_i(T_{k+1}p) = T_{k+1}(T_ip) = T_{k+1}p$$

が成立するので，$T_{k+1}p$ は T_i の不動点である．特に $T_{k+1}(F_k) \subset F_k$ となる．

帰納法の仮定により F_k は有界な $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合で，定理 4 を T_{k+1} の制限 $T_{k+1}|_{F_k} : F_k \to F_k$ に適用すると，その不動点集合は非空で有界な $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合になり，$T_1,\ldots,T_{k+1}$ の共通不動点集合である．∎

例 1 P を非空な整数区間 $\{p \in \mathbb{Z}^n \mid a \leq p \leq b\}$ とする．ある点 $c=(c_1,\ldots,c_n) \in P$ を固定して，写像 $T_i : P \to P$ $(i=1,\ldots,n)$ を

$$T_ip := (p_1,\ldots,p_{i-1},c_i,p_{i+1},\ldots,p_n)$$

で定義すると，$T_1,\ldots,T_n$ は可換な離散中点アフィン写像になる．例えば，

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{T_1p+T_1q}{2} \right\rfloor &= \left\lfloor \left(c_1, \frac{p_2+q_2}{2},\ldots,\frac{p_n+q_n}{2}\right) \right\rfloor \\ &= \left(c_1, \left\lfloor\frac{p_2+q_2}{2}\right\rfloor,\ldots,\left\lfloor\frac{p_n+q_n}{2}\right\rfloor\right) = T_1\left\lfloor\frac{p+q}{2}\right\rfloor,\end{aligned}$$

$$T_2T_1p = (c_1,c_2,p_3,\ldots,p_n) = T_1T_2p.$$

切り上げについても同様である．$T_ip=p$ は $p_i=c_i$ のことなので，共通不動点は c である．

例 2 $\alpha<\beta$ を整数，$\gamma \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ として，

$$P = \{p \in \mathbb{Z}^n \mid \alpha\mathbf{1} \leq p \leq \beta\mathbf{1},\ p_j-p_i \leq \gamma\ (1 \leq i,\, j \leq n,\ i \neq j)\} \tag{5}$$

は，定理 1 により，非空で有界な $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合である．Σ を n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の可換な部分集合として，$\sigma \in \Sigma$ に対して，写像 $T_\sigma : P \to P$ を

$$T_\sigma p = p_\sigma := (p_{\sigma(1)},\ldots,p_{\sigma(n)})$$

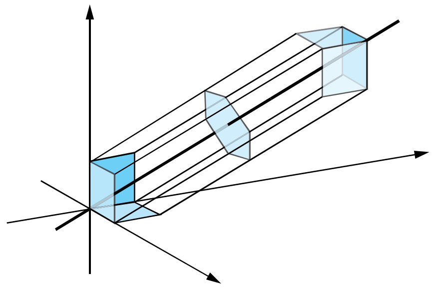

図 2: $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合 $P=\{p\in\mathbb{Z}^3 \mid (0,0,0)\le p\le(12,12,12),\ p_j-p_i\le 3\ (1\le i,\, j\le 3,\ i\ne j)\}$ の凸包．その中心を対角線 $\{(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{Z}^3 \mid z_1=z_2=z_3\}$ が貫く．

で定義する．このとき，$\{T_\sigma \mid \sigma\in\Sigma\}$ は離散中点アフィン写像になる．実際，

$$\begin{aligned}\left\lfloor\frac{T_\sigma p+T_\sigma q}{2}\right\rfloor &= \left\lfloor\left(\frac{p_{\sigma(1)}+q_{\sigma(1)}}{2},\ldots,\frac{p_{\sigma(n)}+q_{\sigma(n)}}{2}\right)\right\rfloor\\ &= \left(\left\lfloor\frac{p_{\sigma(1)}+q_{\sigma(1)}}{2}\right\rfloor,\ldots,\left\lfloor\frac{p_{\sigma(n)}+q_{\sigma(n)}}{2}\right\rfloor\right) = T_\sigma\left\lfloor\frac{p+q}{2}\right\rfloor\end{aligned}$$

であり，切り上げについても同様である．さらに，$T_\sigma T_\tau p=T_{\sigma\tau}p=T_\tau T_\sigma p$ なので，これらの写像は可換である．$T_\sigma p=p$ は $p_\sigma=p$ と同値なので，共通不動点集合は $\{p\in P \mid p_\sigma=p\ (\sigma\in\Sigma)\}$ で，非空である（定理 5）．

この例の特別な場合として巡回置換の集合 $\Sigma=\{\sigma^i \mid \sigma=(1,2,\ldots,n),\ (i=1,\ldots,n)\}$ をとると，$\{T_\sigma \mid \sigma\in\Sigma\}$ は図 2 の対角線を軸とする回転なので可換である．明らかに，共通不動点集合は $\{p\in P \mid p_1=\cdots=p_n\}$ である．

例 3 $\alpha<\beta$ を整数として，$P=\{p\in\mathbb{Z}^n \mid \alpha\mathbf{1}\le p\le\beta\mathbf{1}\}$ とすると，例 2 と同じく，P は非空で有界な $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合である．写像 $T_i: P\to P$ を

$$T_i p := (\underbrace{\alpha,\ldots,\alpha}_{i-1}, p_1,\ldots,p_{n-i+1})$$

で定義すると，$T_1,\ldots,T_n$ は離散中点アフィン写像であり，それらは可換である．$\alpha\mathbf{1}$ が唯一の共通不動点である．

4 結び

離散の世界で共通不動点定理を与えようとすると，強い縛りがかかる．例えば，定理 5 は $\mathbb{Z}^n$ に自然に入る半順序を保たないような写像を除外する．前節で挙げた 3 つの例は個別に取り上げれば明らかなものばかりであるが，定理 5 はそれらに共通するものを抽出した形になっている．無論，定理 5 をもって Markov-角谷の不動点定理の離散版と主張している訳ではない．

5 謝辞

本研究は科研費 JSPS KAKENHI Grant Number 16K05278 及び 20K03751 の助成を受けた．

参　考文献

[1] S. Kakutani, *Two fixed point theorems concerning bicompact convex sets*, Proc. Imp. Akad. Tokyo, **14** (1938), 242–45.

[2] S. Kakutani, *A proof of the Hahn-Banach theorem via a fixed point theorem*, in Selected Papers, Vol.I, Birkhäuser, (1986), 144-147.

[3] H. Kawasaki, *A common fixed point theorem on $L^\natural$-convex sets*, to appear in Nonlinear Analysis and Convex Analysis, **22**, (2021).

[4] A. Markov, *Quelques theoremes sur les ensembles abeliens*, C. R. URSS, **2** (1936), 311-313.

[5] K. Murota, *Discrete convex analysis*, Mathematical Programming, **83** (1998), 313-371.

[6] K. Murota, *Discrete convex analysis*, SIAM, Philadelphia 2003.

[7] D. Werner, *A proof of the Markov-Kakutani fixed point theorem via the Hahn-Banach theorem*, Extracta Mathematicae, **8** (1992), 37-38.