集合のスカラー化手法による集合鞍点の存在定理
—ロバストゲーム理論へ向けて—

Existence theorems of cone saddle-points in set optimization applying nonlinear scalarizations

—An introduction to robust game theory—

秋田県立大学　システム科学技術学部　経営システム工学科
Faculty of Systems Science and Technology, Akita Prefectural University
荒谷　洋輔 (Araya, Yousuke) *

1　はじめに

筆者は、ベクトルの非線形スカラー化手法 [8, 10] の自然な拡張である、集合の非線形スカラー化手法 [2, 3, 4] の研究を 2010 年代に進めてきた。本稿では、その応用としてベクトル鞍点問題 [38] を自然な形で拡張した「集合鞍点問題」について議論する。

本稿は基本的に [4] の解説であるが、最後に [4] にはない集合鞍点定理の応用（ロバストゲーム理論など）について、筆者の意見も交えた今後の展望を述べたいと思う。

2　準備

2.1　ベクトル最適化からの準備

本稿では Z を線形位相空間、$\mathbf{0}_Z$ を Z の原点とする。集合 $A \subset Z$ に対し、A の代数的内部、位相的内部、位相的閉包をそれぞれ cor$A$、int$A$、cl$A$ と表す。またこの論文では、4.1 節を除いて $C \subset Z$ を閉凸錐とする。つまり、以下の条件を満たす。

(a) $\mathrm{cl}C = C$、

(b) $C + C \subseteq C$、

(c) $\lambda C \subseteq C\ \forall \lambda \in [0, \infty)$。

尚、錐 $C \subset Z$ が solid とは $\mathrm{int}C \neq \emptyset$ を満たすことであり、pointed であるとは $C \cap (-C) = \{\mathbf{0}_Z\}$ が成立する場合である。凸錐 $C \subset Z$ によって以下のようなベクトル順序 $\leq_C$ が導入され、$(Z, \leq_C)$ は順序ベクトル空間となる。

$$\forall z_1, z_2 \in Z, \qquad z_1 \leq_C z_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} z_2 - z_1 \in C$$

もし、C が pointed ならベクトル順序 $\leq_C$ は反対称的となる。

$a \in A$ が weak maximal [minimal] point であるとは、$a \leq_{\mathrm{int}C} \hat{a}$ $[\hat{a} \leq_{\mathrm{int}C} a]$ となるような $\hat{a} \in A \setminus \{a\}$ が存在しない点であると定義する。

*(*E-mail:* **y-araya@akita-pu.ac.jp**)

2.2　集合最適化からの準備

$\mathcal{V}$ を Z の空でない部分集合全体とする。$V_1, V_2 \in \mathcal{V}$、$\alpha \in \mathbb{R}$、$V \in \mathcal{V}$ に対して、２つの集合の和・スカラー積は以下のように定義される。

$$V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\} \qquad \alpha V := \{\alpha v \mid v \in V\}$$

そのとき $\mathcal{V}$ は、$\{\mathbf{0}_Z\}$ を零ベクトルとするベクトル空間であることが確かめられる。

定義 2.1 (集合関係：黒岩-田中-Ha[27])**.** $A,\, B \in \mathcal{V}$ と、solid な閉凸錐 $C \subset Z$ に対して、以下の集合関係を定義する。

$$[\textbf{lower}] \quad A \leq_C^l B \quad \text{by} \quad B \subset A + C \qquad (\textbf{type 3})$$

$$[\textbf{upper}] \quad A \leq_C^u B \quad \text{by} \quad A \subset B - C \qquad (\textbf{type 5})$$

注意 1. ベクトル順序と集合順序はさまざまな違いがある。ベクトル順序の場合、$x, y \in Z$ と凸錐 $C \subset Z$ に対して

$$y - x \in C \ (x \leq_C y) \iff y \in x + C \iff x \in y - C$$

である。一方、集合順序の場合 $A, B \in \mathcal{V}$ と凸錐 $C \subset Z$ に対して、上記の中央と右の順序に対応する $B \subset A + C$ $(A \leq_C^l B)$ と $A \subset B - C$ $(A \leq_C^u B)$ は一般に異なる（[2] を参照）。

例 1. 集合の特別な場合として、「区間」を考える。

$$Z = \mathbb{R}, \quad C = \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \qquad A = [a_1, a_2], \quad B = [b_1, b_2] \quad (a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$$

このとき、$\leq_C^l$、$\leq_C^u$ について次が分かる。（[18] 参照）

$$A \leq_C^l B \iff a_1 \leq b_1, \qquad A \leq_C^u B \iff a_2 \leq b_2$$

命題 2.2 ([2, 5])**.** $A, B, D \in \mathcal{V}$、$\alpha \geq 0$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \leq_C^{l[u]} B \quad \Longrightarrow \quad A + D \leq_C^{l[u]} B + D$

(ii) $A \leq_C^{l[u]} B \quad \Longrightarrow \quad \alpha A \leq_C^{l[u]} \alpha B$

(iii) $\leq_C^l$ と $\leq_C^u$ は、反射律と推移律が成り立つ。

(iv) $A \leq_C^u b \Longrightarrow A \leq_C^l b \quad \mathit{and} \quad a \leq_C^l B \Longrightarrow a \leq_C^u B$

定義 2.3 (C-proper：Hernandez-Rodriguez-Marin[16])**.** $A \in \mathcal{V}$ が C-proper $[(-C)$-proper$]$ であるとは、$A + C \neq Z[A - C \neq Z]$ が成り立つときである。また、$\mathcal{V}_C[\mathcal{V}_{-C}]$ を Z の C-proper $[(-C)$-proper$]$ である部分集合の族とする。

定義 2.4 (Luc[31])**.** $A \in \mathcal{V}$ とする。

(i) A が C-closed $[(-C)$-closed$]$ であるとは、$A + C$ $[A - C]$ が閉集合であるときである。

(ii) A が C-有界 $\big[(-C)$-有界$\big]$ であるとは、それぞれの Z の近傍 U に対して、次を満たすような正の数 $t > 0$ が存在するときである。

$$A \subset tU + C \quad [A \subset tU - C]$$

(iii) A が C-compact $\big[(-C)$-compact$\big]$ であるとは、以下の形をした A の任意の被覆

$$\{U_\alpha + C|\ U_\alpha \text{ are open}\} \qquad [\{U_\alpha - C|\ U_\alpha \text{ are open}\}]$$

が有限個の被覆で A を覆うことが出来るときである。

任意の C-compact 集合は、C-closed かつ C-有界である。

注意 2. ベクトル順序 $\leq^l_C$ と $\leq^l_{\mathrm{int}C}$ は明らかに異なる。しかし集合の場合、$\leq^l_C$ と $\leq^l_{\mathrm{int}C}$ が同値になることもある。よって、$\leq^l_C$ と $\leq^l_{\mathrm{int}C}$ を区別したいとき、集合 A に C-closed の仮定が必要となる（[2] を参照)。

定義 2.5. $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ とする。$\mathcal{V}$ に次のような同値関係を導入する。

$$V_1 \sim_l V_2 \Longleftrightarrow V_1 \leq^l_C V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq^l_C V_1$$

$$V_1 \sim_u V_2 \Longleftrightarrow V_1 \leq^u_C V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq^u_C V_1$$

同値類の集合をそれぞれ $[\cdot]^l$、$[\cdot]^u$ と書く。同値関係の定義より次が分かる。

$$A \in [B]^l \Leftrightarrow A + C = B + C$$

$$A \in [B]^u \Leftrightarrow A - C = B - C$$

定義 2.6. $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ とする。$A \in \mathcal{S}$ が $l[u]$-weak minimal element であるとは、任意の $B \in \mathcal{S}$ について

$$B \leq^{l[u]}_{\mathrm{int}C} A \quad \Longrightarrow \quad A \leq^{l[u]}_{\mathrm{int}C} B$$

が成り立つことである。$\mathcal{S}$ の $l[u]$-weak minimal element の族を $l[u]$-wMin$(\mathcal{S}, \mathrm{int}C)$ と書く。同様にして、$A \in \mathcal{S}$ が $l[u]$-weak maximal element であるとは、任意の $B \in \mathcal{S}$ について

$$A \leq^{l[u]}_{\mathrm{int}C} B \quad \Longrightarrow \quad B \leq^{l[u]}_{\mathrm{int}C} A$$

が成り立つことである。$\mathcal{S}$ の weak maximal element の族を $l[u]$-wMax$(\mathcal{S}, \mathrm{int}C)$ と書く。

3 集合のスカラー化手法

3.1 ベクトルのスカラー化関数

この節では $k^0 \in C \setminus (-C)$ とする。1983 年に Gerstewitz [8] は、ベクトル最適化問題において以下のような非線形スカラー化関数（Gerstewitz のスカラー化関数）を提案した。

$$\varphi_{C,k^0} : Z \to (-\infty, \infty], \quad \varphi_{C,k^0}(z) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, z \leq_C tk^0\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, z \in tk^0 - C\}$$

上記のスカラー化手法は似たような形が [33] で見られる。また、C を半空間とすると、線形スカラー化関数を含むことが知られている。その後、彼らは [9, 10] で、 ベクトル最適化問題における Gerstewitz の関数の本質的な性質（順序保存性・劣線形性など）を導いた。上記の Gerstewitz の関数は、以下の双対形に変形できる。

$$\psi_{C,k^0} : Z \to [-\infty, \infty), \quad \psi_{C,k^0}(z) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 \leq_C z\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, z \in tk^0 + C\}$$

$\varphi_{C,k^0}(z) = -\psi_{C,k^0}(-z)$

これらの関数は、Pareto 最適解の特徴付などベクトル最適化問題において幅広い応用を持つ。(Luc [31], Göpfert-Riahi-Tammer-Zălinescu [11])

その後、筆者は [1] で以下のようなベクトル最適化問題における非線形の 2 変数の下限型関数 $h_{\inf} : Z \times Z \to (-\infty, \infty]$ と上限型関数 $h_{\sup} : Z \times Z \to [-\infty, \infty)$ を調査した。

$$h_{\inf}(z, a) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, z \leq_C tk^0 + a\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, z \in tk^0 + a - C\}$$

$$h_{\sup}(z, a) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 + a \leq_C z\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, z \in tk^0 + a + C\}$$

もちろん、$h_{\inf}, h_{\sup}$ は Gerstewitz の関数の拡張である。($h_{\inf}(z, a) := \varphi_{C,k^0}(z - a)$ for $a, z \in Z$) さらに、次も分かる。

$$h_{\sup}(z, a) = -h_{\inf}(-z, -a)$$

ベクトルのスカラー化関数の場合、基本的には 1 変数と 2 変数で大きな性質の違いはない。

3.2 集合のスカラー化関数

ベクトルのスカラー化関数 $h_{\inf}, h_{\sup}$ を集合の場合に拡張することを考える。集合のスカラー化手法の研究は 2000 年代に始まった。この研究の草分け的な存在である 2000 年代初頭の田中-Georgiev[6, 7] から始まり、2000 年代後半に Hamel-Löhne[14]、Hernandez-Rodriguez-Marin[16] などの重要な研究があった。筆者は、2010 年代に [29, 30] の影響から以下の関数の詳細な性質を調べる研究を始めた。$\inf \emptyset = \infty$ と $\sup \emptyset = -\infty$ を認めることにより、

$$h^l_{\inf}, h^u_{\inf} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to [-\infty, \infty]$$

$$h^l_{\sup}, h^u_{\sup} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to [-\infty, \infty]$$

を次のように定義する。関数 $h^l_{\inf}, h^u_{\inf}, h^l_{\sup}, h^u_{\sup}$ は、効用関数の役割を果たしている。

$$h^l_{\inf}(V_1, V_2) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,\Big|\, V_1 \leq^l_C tk^0 + V_2\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 + V_2 \subset V_1 + C\}$$

$$h^u_{\inf}(V_1, V_2) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_1 \leq^u_C tk^0 + V_2\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_1 \subset tk^0 + V_2 - C\}$$

$$h^l_{\sup}(V_1, V_2) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,\Big|\, tk^0 + V_2 \leq^l_C V_1\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_1 \subset tk^0 + V_2 + C\}$$

$$h^u_{\sup}(V_1, V_2) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 + V_2 \leq^u_C V_1\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 + V_2 \subset V_1 - C\}$$

現在、集合のスカラー化手法の研究は実に幅広い研究がなされている。([2, 3, 4, 12, 13, 15, 19, 25, 26, 32, 34, 40] やその参考文献を見よ)

集合のスカラー化関数は、ベクトルのスカラー化関数で成り立っていた重要な性質（順序保存性・劣線形性など）は同様に成り立つ。しかし、狭義単調性・関数の有界性などは集合に適切な条件を付け加えないと成立しない。また、集合のスカラー化関数の場合、1 変数と 2 変数で違いが至る所で見られる。([2, 3, 4, 5] 参照)

命題 3.1 ([2])**.** 上記のスカラー化関数について、次が成り立つ。

$$h^l_{\sup}(V_1, V_2) = -h^u_{\inf}(-V_1, -V_2) \qquad \text{and} \qquad h^u_{\sup}(V_1, V_2) = -h^l_{\inf}(-V_1, -V_2)$$

l 型と u 型は、双対の関係になっている。よって、l 型と u 型についての集合に対するスカラー化関数は、ベクトルの場合とは異なり、$h^l_{\inf}$ と $h^u_{\inf}$ の 2 つを調べる必要がある。

3.3 集合関係とスカラーの変換定理

前節で定義した集合のスカラー化関数の性質を調べることで、集合関係とスカラーの変換定理を得ることが出来る。変換定理は筆者の論文 [2] で最初に触れられているが、Gutierrez et al.[12, 13] によって [2] の誤りが指摘された。その後、Köbis et al.[25, 26] によって完成形に至った。本稿は、[2] の修正版 [4] を紹介する。

定理 3.2 (l-inf **型**). $C \subset Z$ を *solid* な閉凸錐、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。

(i) もし $V_1 \in \mathcal{V}_C$ が $(-C)$-有界で、$V_2 \in \mathcal{V}$ が C-有界ならば、$h^l_{\inf}(\cdot,\cdot)$ は実数値である。

(ii) さらに、$V_1 \in \mathcal{V}_C$ が C-*closed*、 $V_2 \in \mathcal{V}$ ならば、次が言える。

$$V_2 \not\subset V_1 + C \Longleftrightarrow h^l_{\inf}(V_1, V_2) > 0$$

(iii) さらに、$V_1 \in \mathcal{V}_C$、$V_2 \in \mathcal{V}$ が C-*compact* ならば、次が言える。

$$V_2 \not\subset V_1 + \mathrm{int}C \Longleftrightarrow h^l_{\inf}(V_1, V_2) \geq 0$$

定理 3.3 (u-inf **型**). $C \subset Z$ を *solid* な閉凸錐、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。

(i) もし $V_1 \in \mathcal{V}$ が $(-C)$-有界で、$V_2 \in \mathcal{V}_{-C}$ が C-有界ならば、$h^u_{\inf}(\cdot,\cdot)$ は実数値である。

(ii) さらに、$V_1 \in \mathcal{V}$、$V_2 \in \mathcal{V}_{-C}$ が $(-C)$-*closed* ならば、次が言える。

$$V_1 \not\subset V_2 - C \Longleftrightarrow h^u_{\inf}(V_1, V_2) > 0$$

(iii) さらに、$V_1 \in \mathcal{V}$ が $(-C)$-*compact*、$V_2 \in \mathcal{V}_{-C}$ ならば、次が言える。

$$V_1 \not\subset V_2 - \mathrm{int}C \Longleftrightarrow h^u_{\inf}(V_1, V_2) \geq 0$$

定理 3.4 (l-sup **型**). $C \subset Z$ を *solid* な閉凸錐、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。

(i) もし $V_1 \in \mathcal{V}$ が C-有界で、$V_2 \in \mathcal{V}_C$ が $(-C)$-有界ならば、$h^l_{\sup}(\cdot,\cdot)$ は実数値である。

(ii) さらに、$V_1 \in \mathcal{V}$、$V_2 \in \mathcal{V}_C$ が C-*closed* ならば、次が言える。

$$V_1 \not\subset V_2 + C \Longleftrightarrow h^l_{\sup}(V_1, V_2) < 0$$

(iii) さらに、$V_1 \in \mathcal{V}$ が C-*compact* で、$V_2 \in \mathcal{V}_C$ ならば、次が言える。

$$V_1 \not\subset V_2 + \mathrm{int}C \Longleftrightarrow h^l_{\sup}(V_1, V_2) \leq 0$$

定理 3.5 (u-sup **型**). $C \subset Z$ を *solid* な閉凸錐、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。

(i) もし $V_1 \in \mathcal{V}_{-C}$ が C-有界で、$V_2 \in \mathcal{V}$ が $(-C)$-有界ならば、$h^u_{\sup}(\cdot,\cdot)$ は実数値である。

(ii) さらに、$V_1 \in \mathcal{V}_{-C}$ が $(-C)$-*closed* で、$V_2 \in \mathcal{V}$ ならば、次が言える。

$$V_a \not\subset V_y - C \Longleftrightarrow h^u_{\sup}(V_1, V_2) < 0$$

(iii) さらに、$V_1 \in \mathcal{V}_{-C}$ で、$V_2 \in \mathcal{V}$ が $(-C)$-*compact* ならば、次が言える。

$$V_2 \not\subset V_1 - \mathrm{int}C \Longleftrightarrow h^u_{\sup}(V_1, V_2) \leq 0$$

4　主な結果

4.1　ベクトル鞍点問題

定義 4.1 (ベクトル鞍点問題)**.** X、Y を空でない集合、Z をノルム空間、$f : X \times Y \to Z$ をベクトル値関数とする。ベクトル鞍点問題とは、次の式を満たす $\bar{x} \in X$ と $\bar{y} \in Y$ を見つける問題である。

$$\text{(P)} \qquad f(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{wMax} f(\bar{x}, Y) \cap \mathrm{wMin} f(X, \bar{y})$$

ここで、wMax$A$ と wMin$A$ は A の weak maximal point、weak minimal point 全体の集合である。点 $(x, y) \in X \times Y$ が上記の問題の解であるならば、(x, y) は f の $X \times Y$ 上での弱 C-鞍点であるという。

定義 4.2 (ベクトル値関数の凸性)**.** K をベクトル空間 X の凸集合、Z を solid で pointed な凸錐 $C \subset Z$ によって半順序の構造が構成されたノルム空間とする。

(i) ベクトル値関数 $f : X \to Z$ が K 上で C-準凸であるとは、それぞれの $x_1, x_2 \in K$、$\lambda \in [0, 1]$ と $z \in Z$ に対して、以下が成り立つときである。

$$f(x_1), f(x_2) \leq_C z \quad \Longrightarrow \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq_C z$$

(ii) ベクトル値関数 $f : X \to Z$ が K 上で真の C-準凸であるとは、それぞれの $x_1, x_2 \in K$ と $\lambda \in [0, 1]$ に対して、次式のどちらかが成り立つときである。

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq_C f(x_1) \quad \text{or} \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq_C f(x_2)$$

定義 4.3 (ベクトル値関数の半連続性)**.** X を位相空間、Z をノルム空間とする。ベクトル値関数 $f : X \to Z$ が X 上で C-連続であるとは、

$$\{x \in X | f(x) \leq_C z\}$$

が任意の $z \in Z$ で閉集合であるときにいう。

木村-田中 [24] は、ベクトルの非線形スカラー化関数 $h_{\inf}(\cdot, 0_Z)$ を用いて、次のようなベクトル鞍点の存在定理を発表した。

定理 4.4 (木村-田中 [24])**.** X、Y をノルム空間の空でない *compact* 凸集合、Z を *solid* で *pointed* な凸錐 $C \subset Z$ によって半順序の構造が構成されたノルム空間とする。ベクトル値関数 $f : X \times Y \to Z$ が、以下の 2 条件を満たすとする。

(i) $x \mapsto f(x, y)$ は、それぞれの $y \in Y$ において X 上で C-連続で C-準凸関数である。

(ii) $y \mapsto f(x, y)$ は、それぞれの $x \in X$ において Y 上で $(-C)$-連続で真の $(-C)$-準凸関数である。

そのとき、f は少なくとも 1 つのベクトル鞍点を持つ。

本稿では、まず集合鞍点問題の定式化をして、[24] と同様の手法での集合鞍点の存在定理を導く。

4.2 集合鞍点問題の定式化と集合値写像の凸性・連続性

まず最初に、ベクトル鞍点問題を自然な形で拡張した集合鞍点問題を定式化する。

定義 4.5 (集合鞍点問題)**.** X, Y を空でない集合、$f : X \times Y \to \mathcal{V}$ を集合値写像とする。集合鞍点問題とは、次の式を満たす $\bar{x} \in X$ と $\bar{y} \in Y$ を見つける問題であると定義する。

(l-P) $F(\bar{x}, \bar{y}) \in l\text{-wMax}(F(\bar{x}, Y), \mathrm{int}C) \cap l\text{-wMin}(F(X, \bar{y}), \mathrm{int}C)$

(u-P) $F(\bar{x}, \bar{y}) \in u\text{-wMax}(F(\bar{x}, Y), \mathrm{int}C) \cap u\text{-wMin}(F(X, \bar{y}), \mathrm{int}C)$

点 $(x, y) \in X \times Y$ が上記の問題の解であるならば、(x, y) は F の $X \times Y$ 上での**弱 l-C-鞍点** [**弱 u-C-鞍点**] であるという。

次に、集合値写像の凸性・連続性の概念を導入して、その性質について調べる。これらは、[27, 29, 36, 37, 38] などの継続研究である。

定義 4.6 (集合値写像の凸性・凹性)**.** K をベクトル空間 X の凸集合であるとする。

(a) 集合値写像 $F : X \to \mathcal{V}$ が K 上で l-C-準凸 [u-C-準凸] であるとは、それぞれの $x_1, x_2 \in K$、$\lambda \in [0, 1]$ と $V \in \mathcal{V}$ に対して、以下が成り立つときである。

$$F(x_1) \leq_C^{l[u]} V, \quad F(x_2) \leq_C^{l[u]} V \implies F(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq_C^{l[u]} V$$

(b) 集合値写像 $F : X \to \mathcal{V}$ が K 上で l-C-準凹 [u-C-準凹] であるとは、それぞれの $x_1, x_2 \in K$、$\lambda \in [0, 1]$ と $V \in \mathcal{V}$ に対して、以下が成り立つときである。

$$V \leq_C^{l[u]} F(x_1), \quad V \leq_C^{l[u]} F(x_2) \implies V \leq_C^{l[u]} F(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2)$$

命題 4.7. 次の事実が分かる。

- $\big[\ l$-$(-C)$-準凸$\ \big] = \big[\ u$-C-準凹$\ \big]$
- $\big[\ u$-$(-C)$-準凸$\ \big] = \big[\ l$-C-準凹$\ \big]$

ここでも、ある種の双対性のような性質が成り立つ。

補題 4.8. K をベクトル空間 X の凸集合で、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。集合値写像 $F : X \to \mathcal{V}$ について、以下のことが分かる。

(i) もし F が l-C-準凸ならば、$h^l_{\inf}(F(\cdot), \{0_Z\})$ と $h^l_{\sup}(F(\cdot), \{0_Z\})$ は K 上で準凸関数である。

(ii) もし F が u-C-準凸ならば、$h^u_{\inf}(F(\cdot), \{0_Z\})$ と $h^u_{\sup}(F(\cdot), \{0_Z\})$ は K 上で準凸関数である。

(iii) もし F が l-C-準凹ならば、$h^l_{\inf}(F(\cdot), \{0_Z\})$ と $h^l_{\sup}(F(\cdot), \{0_Z\})$ は K 上で準凹関数である。

(iv) もし F が u-C-準凹ならば、$h^u_{\inf}(F(\cdot), \{0_Z\})$ と $h^u_{\sup}(F(\cdot), \{0_Z\})$ は K 上で準凹関数である。

定義 4.9 (集合値写像の半連続性)**.** X を位相空間とする。

(i) 集合値写像 $F : X \to \mathcal{V}$ が X で $l[u]$-C-下半連続 ($u[l]$-$(-C)$-上半連続) であるとは、

$$\{x \in X | F(x) \leq_C^{l[u]} V\} = \{x \in X | V \leq_{(-C)}^{u[l]} F(x)\}$$

が任意の $V \in \mathcal{V}$ で閉集合であるときに言う。

(ii) 集合値写像 $F : X \to \mathcal{V}$ が X で $l[u]$-C-上半連続 ($u[l]$-$(-C)$-下半連続) であるとは、

$$\{x \in X | V \leq_C^{l[u]} F(x)\} = \{x \in X | F(x) \leq_{(-C)}^{u[l]} V\}$$

が任意の $V \in \mathcal{V}$ で閉集合であるときに言う。

補題 4.10. X を位相空間とする。集合値写像 $F : X \to \mathcal{V}$ について、以下のことが分かる。

(i) もし F が l-C-下半連続ならば、$h^l_{\inf}(F(\cdot), \{0_Z\})$ と $h^l_{\sup}(F(\cdot), \{0_Z\})$ は下半連続である。

(ii) もし F が u-C-下半連続ならば、$h^u_{\inf}(F(\cdot), \{0_Z\})$ と $h^u_{\sup}(F(\cdot), \{0_Z\})$ は下半連続である。

(iii) もし F が l-C-上半連続ならば、$h^l_{\inf}(F(\cdot), \{0_Z\})$ と $h^l_{\sup}(F(\cdot), \{0_Z\})$ は上半連続である。

(iv) もし F が u-C-上半連続ならば、$h^u_{\inf}(F(\cdot), \{0_Z\})$ と $h^u_{\sup}(F(\cdot), \{0_Z\})$ は上半連続である。

4.3 集合鞍点の存在定理

3.3 節で紹介した「集合関係とスカラーの変換定理」と 4.2 節の結果を組み合わせると、以下の結果を得ることできる。

定理 4.11 (l **型の鞍点定理**)**.** X と Y をノルム空間の空でない *compact* で凸な集合とする。もし、集合値写像 $F : X \times Y \to \mathcal{V}_C$ が C-*proper*、C-*compact* の値をとる写像であり、さらに次の 4 条件を満たすとする。

(i) それぞれの $y \in Y$ で、$F(\cdot, y)$ は X 上で l-C-準凸関数である。

(ii) それぞれの $y \in Y$ で、$F(\cdot, y)$ は X 上で l-C-下半連続である。

(iii) それぞれの $x \in X$ で、$F(x, \cdot)$ は Y 上で l-C-準凹関数である。

(iv) それぞれの $x \in X$ で、$F(x, \cdot)$ は Y 上で l-C-上半連続である。

そのとき、F は少なくとも 1 つの弱 l-C-鞍点を持つ。

定理 4.12 (u **型の鞍点定理**)**.** X と Y をノルム空間の空でない *compact* で凸な集合とする。もし、集合値写像 $F : X \times Y \to \mathcal{V}_{-C}$ が $(-C)$-*proper*、$(-C)$-*compact* の値をとる写像であり、さらに次の 4 条件を満たすとする。

(i) それぞれの $y \in Y$ で、$F(\cdot, y)$ は X 上で u-C-準凸関数である。

(ii) それぞれの $y \in Y$ で、$F(\cdot, y)$ は X 上で u-C-下半連続である。

(iii) それぞれの $x \in X$ で、$F(x, \cdot)$ は Y 上で u-C-準凹関数である。

(iv) それぞれの $x \in X$ で、$F(x, \cdot)$ は Y 上で u-C-上半連続である。

そのとき、F は少なくとも 1 つの弱 u-C-鞍点を持つ。

注意 3. 上記の存在定理について、[24] の結果と比較すると、集合値写像に何らかのコンパクト性の条件が課されている。その理由は、集合関係とスカラーの変換定理を利用しているためである。集合値写像に何らかの条件を課さなければいけない所が、ベクトルの鞍点定理との大きな違いである。

5　まとめと今後の課題

(a) 集合鞍点問題の定式化について

[4] では、ベクトル鞍点問題の素直な拡張として (l-**P**) と (u-**P**) を定義した。しかし、l 型と u 型の組み合わせや他の定義も当然考えられる。他の定式化の方法については、今後の課題である。

(b) 集合の鞍点定理の別証明について

ベクトル鞍点の存在定理を得るための手法については、以下がある ([39] 参照)。

- 何らかのスカラー化関数（線形・非線形）を用いてベクトル値関数をスカラー化して、それに対して既に知られている実数値関数の帰着させる方法。（[24, 38] など）
- ベクトル値関数による像の集合に対して、何らかの不動点定理を適用する方法。（[37] など）
- ベクトル鞍点問題をベクトル変分不等式問題に埋め込むという方法。（[22] など）

集合の鞍点定理について、[4] では（上記の最初の手法に相当する）集合の非線形スカラー化手法を利用して集合鞍点の存在定理を得ることができた。他のアプローチについては今後の課題である。集合鞍点問題の場合は、上記の方法の他に、集合値特有の証明方法があるかも知れない。

(c) ロバストゲーム理論の構築に向けて

集合最適化問題は、近年その重要性が叫ばれている「多目的のロバスト最適化問題」に変換できることが 2014 年に Ide et al. の研究 [17] で判明している。鞍点問題はゲーム理論と密接な関係があるので、[4] の結果は **（集合最適化からのアプローチでの）ロバストゲーム理論構築に向けての重要なマイルストーン**であると言える。ロバストゲーム理論の構築に向けては、以下の課題などを解決する必要があると考えている。

- **集合値のロバストゲームをどのように定義するのか？**
  （2 人零和ゲーム、n 人零和ゲーム、非零和ゲームなど)
- **2 人零和ゲームにおける「ゲームの決定」はどのように定義するのか？**
  実数値では、プレーヤー I, J、混合戦略の集合を S_I, S_J、$f : S_I \times S_J \to \mathbb{R}$ としたとき、通常以下のように定義する。

$$\operatorname*{Max}_{x\in S_I}\operatorname*{Min}_{y\in S_J} f(x,y) = \operatorname*{Min}_{y\in S_J}\operatorname*{Max}_{x\in S_I} f(x,y)$$

  それでは、集合値写像 F ではどうなるのか？

ベクトル鞍点問題（ノイマンの Minimax 定理をベクトル値へ拡張する問題）は、1980・1990 年代に盛んに研究された（[37, 38] やその参考文献を参照)。[37] では、ベクトル値への拡張 minimax 定理が「ベクトル順序の不等式」という形で表現されている。これは、ベクトル最適化問題の性質上仕方のないことなのかも知れない。(ベクトル最適化問題では、domination property[31]、pointed などベクトル特有の概念がある。）しかし、minimax 定理は maxmini 値と minimax 値が混合戦略まで拡大すると「等しい」という主張であるため、筆者はこれらの先行研究に少し違和感を感じている。

ベクトル値の共役双対性の理論では、1980 年代に川崎 [20, 21] がベクトル値関数の共役関数は集合値写像になるというベクトル最適化問題の枠組みで考える問題点を指摘した。[20, 21] では、共役関数の拡張として「共役関係」という集合関係を導入している。もしかしたら、多目的の鞍点問題・minimax 定理もベクトル最適化問題の枠組みではなく、集合最適化問題の枠組みで議論すべきなのかも知れないと筆者は考えている。

おわりに

高橋涉先生には、論文 [4] の証明を丁寧に見て頂いた（特に、集合関係とスカラーの変換定理の部分）だけでなく、たくさんの有益なコメントを頂きました。ここに感謝を申し上げます。また、高橋涉先生のご冥福を心よりお祈り申し上げます。

参考文献

[1] Y. Araya, *Nonlinear scalarizations and some applications in vector optimization*, Nihonkai Math. J. 21, (2010) 35–45.

[2] Y. Araya, *Four types of nonlinear scalarizations and some applications in set optimization*, Nonlinear Anal. 75, (2012) 3821–3835.

[3] Y. Araya, *New types of nonlinear scalarizations in set optimization*, Nonlinear Analysis and Optimization, S. Akashi, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), pp. 7–21. Yokohama Publishers, Yokohama (2014).

[4] Y. Araya, *Existence theorems of cone saddle-points in set optimization applying nonlinear scalarizations*, Linear Nonlinear Anal. 6 (2020) 13–33.

[5] Y. Araya, *On some properties of conjugate relation and subdifferentials in set optimization problem*, Nonlinear Analysis and Convex Analysis & Optimization: Techniques and Applications -I-, Yokohama Publishers, Yokohama, (2021) 1–23.

[6] P. G. Georgiev, T. Tanaka, *Vector-valued set-valued variants of Ky Fan's inequality*, J. Nonlinear Convex Anal. 1 (2000) 245–254.

[7] P. G. Georgiev, T. Tanaka, *Fan's inequality for set-valued maps*, Proceedings of the Third World Congress of Nonlinear Analysts, Part 1 (Catania, 2000), Nonlinear Anal. 47 (2001) 607–618.

[8] C. Gerstewitz *Nichtkonvexe Dualitt in der Vektoroptimierung.* (*German*) [*Nonconvex duality in vector optimization*], Wiss. Z. Tech. Hochsch. Leuna-Merseburg, 25 (1983) 357–364.

[9] C. Gerstewitz, E. Iwanow, *Dualitt fr nichtkonvexe Vektoroptimierungsprobleme.* (*German*) [*Duality for nonconvex vector optimization problems*], Workshop on vector optimization (Plaue, 1984) Wiss. Z. Tech. Hochsch. Ilmenau 31 (1985) 61–81.

[10] C. Gerth, P. Weidner, *Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization*, J. Optim. Theory Appl. 67, (1990) 297–320.

[11] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, and C. Zălinescu *Variational methods in partially ordered spaces*, Springer-Verlag, New York (2003).

[12] C. Gutierrez, E. Miglierina, E. Molho and V. Novo, *Pointwise well-posedness in set optimization with cone proper sets* Nonlinear Anal. 75 (2012) 1822–1833.

[13] C. Gutierrez, B. Jimenez, B, E. Miglierina and E. Molho, *Scalarization in set optimization with solid and nonsolid ordering cones*, J. Global Optim. 61 (2015) 525–552.

[14] A. Hamel, A. Löhne, *Minimal element theorems and Ekeland's principle with set relations*, J. Nonlinear and Convex Anal. 7 (2006) 19–37.

[15] Y. Han, *Nonlinear scalarizing functions in set optimization problems*, Optimization 68 (2019) 1685–1718.

[16] E. Hernández, L. Rodríguez-Marín, *Nonconvex scalarization in set-optimization with set-valued maps*, J. Math. Anal. Appl. 325 (2007) 1–18.

[17] J. Ide, E. Köbis, D. Kuroiwa, A. Schöbel, C. Tammer, *The relationship between multi-objective robustness concepts and set-valued optimization*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:83, 20.

[18] J. Jahn, T.X.D. Ha, *New order relations in set optimization*, J. Optim. Theory Appl. 148, (2011) 209–236.

[19] E. Karaman, M. Soyertem, I. Atasever Güvenç, D. Tozkan, M. Küçük, Y. Küçük, *Partial order relations on family of sets and scalarizations for set optimization*, Positivity 22 (2018) 783–802.

[20] H. Kawasaki, *Conjugate relations and weak subdifferentials of relations*, Math. Oper. Res. 6 (1981) 593–607.

[21] H. Kawasaki, *A duality theorem in multiobjective nonlinear programming*, Math. Oper. Res. 7 (1982) 95–110.

[22] K. R. Kazmi, S. Khan, *Existence of solutions for a vector saddle point problem*, Bull. Austral. Math. Soc. 61 (2000) 201–206.

[23] A. Khan, C. Tammer, C. Zălinescu, *Set-valued optimization. An introduction with applications*, Vector Optimization. Springer, Heidelberg, 2015.

[24] K. Kimura, T. Tanaka, *Existence theorem of cone saddle-points applying a nonlinear scalarization*, Taiwanese J. Math. 10(2), (2006) 563–571.

[25] E. Köbis, M. A. Köbis, *Treatment of set order relations by means of a nonlinear scalarization functional: a full characterization*, Optimization 65 (2016) 1805-1827.

[26] E. Köbis, M. A. Köbis, J. Yao, *Generalized upper set less order relation by means of a nonlinear scalarization functional*, J. Nonlinear Convex Anal. 17 (2016) 725–734.

[27] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T.X.D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal. 30, (1997) 1487–1496.

[28] D. Kuroiwa, *On set-valued optimization*, Nonlinear Anal. 47, (2001) 1395–1400.

[29] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, *Characterization of nonlinear scalarizing functions for set-valued maps*, Nonlinear Analysis and Optimization, S. Akashi, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), pp. 193–204. Yokohama Publishers, Yokohama (2009).

[30] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, *Inherited properties of nonlinear scalarizing functions for set-valued maps*, Nonlinear Analysis and Convex Analysis, S. Akashi, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), pp. 161–177. Yokohama Publishers, Yokohama (2010).

[31] D. T. Luc, *Theory of vector optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 319, Springer-Verlag, Berlin (1989).

[32] T. Maeda, *On optimization problems with set-valued objective maps: existence and optimality*, J. Optim. Theory Appl. 153 (2012) 263–279.

[33] A. M. Rubinov, *Sublinear operators and their applications (Russian)*, Uspehi Mat. Nauk 32 (1977) 113–174.

[34] P. H. Sach, *New nonlinear scalarization functions and applications*, Nonlinear Anal. 75 (2012) 2281–2292.

[35] M. Sion, *On general minimax theorems*, Pacific J. Math., **8** (1958) 171–176.

[36] T. Tanaka, *Cone-convexity of vector-valued functions*, Sci. Rep. Hirosaki Univ. 37 (1990) 170–177.

[37] T. Tanaka, *Generalized quasiconvexities, cone saddle points, and minimax theorem for vector-valued functions*, J. Optim. Theory Appl. 81 (1994) 355–377.

[38] T. Tanaka, *Generalized semicontinuity and existence theorems for cone saddle points*, Appl. Math. Optim. 36 (1997) 313–322.

[39] 田中環, **ベクトル最適化の解析的研究と数理計画問題への応用**, 平成 13 年～平成 15 年度, 科学研究費補助金（基盤研究（C)）研究成果報告書, 2004 年 3 月.

[40] H. Yu, K. Ike, Y. Ogata, Y. Saito, T.Tanaka, *Computational methods for set-relation-based scalarizing functions*, Nihonkai Math. J. 28 (2017) 139–149.