異なる shift の一般 Lerch 関数の特殊値の線形独立性について

日本大学 生産工学部 川島 誠

Makoto Kawashima

College of Industrial Engineering, Nihon University

概 要

本小論では異なる shift の一般 Lerch 関数の収束半径内の異なる代数的数における特殊値の代数体上の線形独立性について, Sinnou David 氏 (Sorbonne University), 平田典子氏 (日本大学), 筆者の共同で得られた結果を紹介する.

1 導入

1.1 Lerch 関数の特殊値の線形独立性の先行研究

s を自然数 $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{<0}$ とする. $\mathbb{Q}$ 係数の冪級数

$$\Phi_s(x,z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+x+1)^s} \quad ,$$

を s-Lerch 関数, x を Lerch 関数の shift と呼ぶことにする. 定義より $\Phi_s(0,z) = \mathrm{Li}_s(z)$ (s-多重対数関数), $\Phi_1(0,z) = \mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z)$ が成り立つ. p を $\mathbb{Q}$ の素点とし, $\Phi_s(x,z)$ を $\mathbb{Q}_p$ 係数の冪級数とみると, その収束半径は 1 である.

Lerch 関数の特殊値の, 無理数性, 線形独立性, 或いは, 超越性といった数論的な性質はあまり知られていない. ここでは, 主要な結果を紹介する. はじめに異なる shift の Lerch 関数のひとつの有理数での特殊値の線形独立性の十分条件を与える畑正義氏の 1990 年の結果を紹介するために記号を準備する. m を自然数, $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$ とする. $a_j, b_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を用いて $x_j = a_j/b_j$ とする. ここで $x_j \neq 0$ のとき, $(a_j, b_j) = 1$ とし, $x_j = 0$ のとき $a_j = 0, b_j = 1$ とする. このとき

$$\beta := \beta(x_1, \ldots, x_m) := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\log b_j + \sum_{\substack{p \mid b_j \\ p:\text{素数}}} \frac{\log(p)}{p-1} \right) \quad ,$$

とおく. つぎに $1 \leq j \leq m$ に対して, $k_j := \#\{1 \leq i \leq j; x_i = x_j\}$, $k^* := \max_j k_j$ とおく.

$1 \leq j \leq k^*$ に対して, $M_j := \{1 \leq i \leq m; k_i = j\}$, $L_j := \mathrm{l.c.m.}(b_i)_{i \in M_j}$ とし, b_j と互いに素な正整数 k に対して $d_{j,k}$ を $1 \leq d_{j,k} \leq b_j$ かつ,

$$kd_{j,k} + a_j \equiv 0 (\mathrm{mod} b_j)$$

をみたす唯一の整数とする. このとき,

$$\gamma := \gamma(x_1, \ldots, x_m) := \sum_{1 \le j \le k^*} \frac{1}{\varphi(L_j)} \sum_{\substack{1 \le k \le L_j \\ (k, L_j)=1}} \max_{i \in M_j} \left(\frac{b_i}{d_{i,k}} \right) \ ,$$

とおく. ここで $\varphi(n)$ はオイラー関数である. 更に関数を

$$\begin{aligned} D_{m,\pm}(x) &= \frac{m^m}{(m+1)^{m+1}} \frac{(x \pm 1)^{m+1}}{x^m} \\ F_{m,+}(x) &= D_{m,+}(1/x) \\ F_{m,-}(x) &= \begin{cases} D_{1,-}(1/x) & \text{if } m = 1 \\ \dfrac{2}{27}\left(x^2 - 9 + \dfrac{1}{x}(x^2+3)^{3/2} \right) & \text{if } m = 2 \\ D_{m,+}(1/x) & \text{if } m \ge 3 \ . \end{cases} \end{aligned}$$

とおく. 以上の記号のもと次が成り立つ.

定理 1.1. [17, Theorem 2.1] q を $|q| > F_{m,\mathrm{sgn}(q)}(e^{\beta+\gamma})$ をみたす整数とする. このとき, $m+1$ 個の実数 :

$$1, \Phi_{k_1}(-x_1, 1/q), \ldots, \Phi_{k_m}(-x_m, 1/q) \ ,$$

は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である.

つぎに, ダイログ関数 $\mathrm{Li}_2(z)$ に関する結果として, 1993 年に得られた畑正義氏の結果を紹介する.

定理 1.2. [18, Theorem 1.1] q を, $q \ge 7$, 若しくは, $q \le -5$ を満たす整数とする. このとき, $\mathrm{Li}_2(1/q)$ は無理数である.

また, 2005 年に G. Rhin と C. Viola は, 1996 年に [29] で, 彼らによって考案された "置換群の手法" をもちいて, 定理 1.2 の改良を行っている ([30] 参照).

ここまで紹介した結果は, 一つの代数的数 α に対して $(\mathrm{Li}_s(\alpha))_{1 \le s \le r}$ の代数体上の線形独立性に関するものであった. 次に, α を動かした際に Lerch 対数関数の特殊値の線形独立性について知られている結果を紹介する. m を自然数とする. $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ を, 相異なる, 0 でない代数的数とする. 1986 年, Rhin, P. Toffin は対数関数, $\log(1+\alpha_1 z), \ldots, \log(1+\alpha_m z)$ のパデ近似を構成することで次の結果を示した.

定理 1.3. [28, Théoreme 1] K を有理数体, 若しくは, 虚二次体とする. $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ を相異なる, 0 でない, K の元とする. $\max(|\alpha_1|, \cdots, |\alpha_m|)$ が "十分 0 に近い" とき, $m+1$ 個の複素数 :

$$1, \log(1+\alpha_1), \ldots, \log(1+\alpha_m)$$

は K 上線形独立である.

注意 1.4. (i) 定理 1.3 における, "十分 0 に近い" という条件は, [28] で定量的に与えられているが複雑であるので, ここでは明示的には紹介していない.

(ii) 対数関数の代数的数における数論的な性質として有名な次の A. Baker の定理がある.

定理 1.5. (A. Baker, 1966)

$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ を 0 でない $\overline{\mathbb{Q}}$ の元とする.

$$\log(\alpha_1), \ldots, \log(\alpha_m) \text{ が } \mathbb{Q} \text{ 上一次独立である} \tag{1}$$

と仮定する. このとき, $1, \log(\alpha_1), \ldots, \log(\alpha_m)$ は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上一次独立である.

定理 1.3 は定理 1.5 の仮定 (1) が成り立つための十分条件を与えているという意味でも重要な結果である.

定理 1.3 は対数関数に関するものであるが, ダイログ関数 $\mathrm{Li}_2(z)$ の異なる特殊値の線形独立性について, 2018 年に Viola, W. Zudilin によって得られた次の結果がある.

定理 1.6. [39, Main Theorem] q を $q \geq 9$, 若しくは, $q \leq -8$ を満たす整数とする. このとき, 4 つの実数 :

$$1, \mathrm{Li}_1(1/q), \mathrm{Li}_2(1/q), \mathrm{Li}_2(1/(1-q))$$

は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である.

その後, 我々は定理 1.3 の手法を一般化することで Lerch 関数の異なる値の代数体上の線形独立性を与える十分条件と具体例を与えた.

定理 1.7. [11, Theorem 2.1] (*cf.* [10, Theorem 2.1])

r, m を自然数, K を代数体とする. $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ を相違なる K の 0 でない元とする. $b := \mathrm{den}(x)$, $\mu(x) := b \prod_{\substack{q:prime \\ q|b}} q^{1/(q-1)}$ とし, K の素点 v_0 に対して,

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{\alpha}, \beta) &= \log|\beta|_{v_0} - rm\mathrm{h}(\boldsymbol{\alpha} : \beta) - (rm+1)\log\|\boldsymbol{\alpha}\|_{v_0} + rm\log\|(\boldsymbol{\alpha}, \beta)\|_{v_0} \\ &\quad - \left[rm\log(2) + r\left(\log(rm+1) + rm\log\left(\frac{rm+1}{rm}\right)\right)\right] - r\log\mu(x) - br^2m \ , \end{aligned}$$

とおく. $V(\boldsymbol{\alpha}, \beta) > 0$ であれば $rm+1$ 個の K_{v_0} の元,

$$1, \Phi_s(x, \alpha_i/\beta) \ \ (1 \leq i \leq m, 1 \leq s \leq r) \ ,$$

は K 上一次独立である.

本小論の主結果は定理 1.7 を異なる shift の一般 Lerch 関数の異なる特殊値における線形独立性に一般化するものである. これは異なる shift を持つ Lerch 関数の異なる特殊値における線形独立性を与えるものとして初めての結果であり (注意 1.9 参照), Riemann ゼータ関数の特殊値の数論的な性質の解析などの様々な数論的な応用が期待される結果である.

1.2 主結果

はじめに記号を準備する． K を代数体とする． $m, q, d, r_1, \ldots, r_d$ を自然数とし, $r := \sum_{j=1}^{d} r_j$ とおく. $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ を相違なる 0 でない K の元からなるベクトル, $\boldsymbol{A} := (A_i)_{1 \le i \le m} \in \mathrm{GL}_q(K)^m$, $\boldsymbol{x} := (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{Q}^d$ をそれぞれ

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(i)} & \ldots & a_{1,q}^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q,1}^{(i)} & \ldots & a_{q,q}^{(i)} \end{pmatrix} ,$$

$0 \le x_d < \ldots < x_1 < 1$ を満たすものとする.

以下で考察する一般 Lerch 関数を $\Phi_{i,w,j,s_j}(z)$ を

$$\Phi_{i,w,j,s_j}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{w,k+1}^{(i)} \cdot z^{k+1}}{(k + x_j + 1)^{s_j}} \quad \text{for} \quad 1 \le i \le m, 1 \le w \le q, 1 \le j \le d, 1 \le s_j \le r_j \ ,$$

と定義する. ここで $a_{w,k+1}^{(i)} := a_{w,l+1}^{(i)}$ $(0 \le l \le q-1,\ k+1 \equiv l+1 \mod q)$ として定義する.

v_0 を K の素点 (アルキメデス素点でも非アルキメデス素点でも構わない) とし, K_{v_0} を K の v_0 での完備化とする． $\beta \in K$ を $\|\boldsymbol{\alpha}\|_{v_0} < |\beta|_{v_0}$ を満たす元とする． 各 $1 \le j \le d$ に対して, $b_j := \mathrm{den}(x_j) = b_j$, $\mu(x_j) := \mathrm{den}(x_j) \prod_{\substack{q:\text{prime} \\ q \mid \mathrm{den}(x_j)}} q^{1/(q-1)}$ とおき,

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{\alpha}, q, \boldsymbol{x}, \beta) = {} & \log|\beta|_{v_0} - qrm\mathrm{h}(\boldsymbol{\alpha}, \beta) - (qrm+1)\log||\boldsymbol{\alpha}||_{v_0} + qrm \log||(\boldsymbol{\alpha}, \beta)||_{v_0} \\ & - r\left(qm\log(2) + \log(qrm+1) + qrm\log\left(\frac{qrm+1}{qrm}\right)\right) - \sum_{j=1}^{d} r_j \log\mu(x_j) - \max_j (b_j r_j) \cdot qrm \ . \end{aligned}$$

と定義する. このとき, 次が成り立つ.

定理 1.8. 上述の記号の元, $V(\boldsymbol{\alpha}, q, \boldsymbol{x}, \beta) > 0$ であると仮定する. このとき, $qrm + 1$ 個の K_{v_0} の元：

$$1, \Phi_{i,w,j,s_j}(\alpha_i/\beta) \quad (1 \le i \le m, 1 \le w \le q, 1 \le j \le d, 1 \le s_j \le r_j) \ ,$$

は K 上線形独立である.

注意 1.9. 一般 Lerch 関数は, Siegel の意味での, G-関数 ([35] 参照) と呼ばれる冪級数のクラスに属している. G-関数の一般論として Galochikin, Chudnovsky 兄弟により示された, 次の Siegel-Shidlovsky の定理が知られている.

定理 1.10. (Siegel-Shidlovsky の定理) (cf. [16], [9])
K を代数体, v_0 を K の素点とする (有限素点でも無限素点でも構わない). $\vec{\boldsymbol{f}} := {}^t(f_1(z), \ldots, f_\mu(z)) \in K[[z]]^\mu$ を次の微分方程式系の解とする.

$$\Lambda := \frac{d}{dz} - A \quad (A = (a_{i,j}(z)) \in \mathrm{M}_\mu(K(z))) \ .$$

さらに $f_1(z),\dots,f_\mu(z)$ はそれぞれ G-関数であり,

$$f_1(z),\dots,f_\mu(z) \text{ は } K(z) \text{ 上一次独立である} \tag{2}$$

と仮定する. $t(z)\in\mathcal{O}_K[z]$ を $t(z)A\in \mathrm{M}_\mu(K[z])$ を満たす次数が最小の 0 でない多項式とし, $\alpha\in K$ を $\alpha t(\alpha)\neq 0$, かつ, $|\alpha|_{v_0}>\max(1,R_{v_0}(\vec{f})^{-1})$ を満たす元とする. $s:=\max(\deg t(z),1+\deg t(z)a_{i,j}(z))$ とおく. $0<\tau<\frac{1}{(\mu-1)(s-1)+1}$ を満たす実数 τ に対して, $\Lambda,\vec{f},\tau,\alpha$ に依存する実数 $V_{v_0}(\Lambda,\vec{f},\tau,\alpha)$ を

$$V_{v_0}(\Lambda,\vec{f},\tau,\alpha):=(\mu-\tau)\mathrm{h}_{v_0}(\alpha)-(\mu-1)(1+(s-1)\tau)\mathrm{h}(\alpha)-C(\Lambda,\vec{f},\tau)$$

と定義する. ここで, $C(\Lambda,\vec{f},\tau)$ は $\Lambda,\vec{f},\tau$ にのみ依存するある *effective* な定数である. このとき,

$$V_{v_0}(\Lambda,\vec{f},\tau,\alpha)>0\ ,$$

であれば, $f_1(\alpha^{-1}),\dots,f_\mu(\alpha^{-1})\in K_v$ は K 上一次独立である. $\square$

しかしながら, これまで一般 Lerch 関数達が定理 1.10 の仮定である (2) を満たすことが知られていなかったため, 定理 1.8 は異なる shift の一般 Lerch 関数の異なる特殊値の線形独立性を示した初めての結果であるといえる.

1.3 具体例

ここでは $K=\mathbb{Q}$ を考察する.

例 1.11. $v_0=\infty$, $q=m=d=r_1=\ldots=r_{10}=10$, $\boldsymbol{x}=(0,1/10,\dots,9/10)$, $\boldsymbol{\alpha}:=(1,1/2\dots,1/10)$ とする. $\boldsymbol{A}:=(A_i)_{1\le i\le m}\in\mathrm{GL}_{10}(K)^{10}$ をひとつ固定し, $\beta=b\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ とする. このとき $r=100$ であり,

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{\alpha},10,\boldsymbol{x},b)=\log|b|-100\left(\log(2520)+100\log(2)+\log(10001)+10000\log\left(\frac{10001}{10000}\right)\right)\\ -10000\log(2520)-100\left(\log(20)+\frac{1}{4}\log(5)\right)-1000000>\log|b|-1086621.655\ ,\end{aligned}$$

となる. 定理 1.8 より, $\log|b|\ge 1086621.655$ であれば 10001 個の実数:

$$1,\Phi_{i,w,j,s}(1/(ib))\quad(1\le i,w,j,s\le 10),$$

は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である.

例 1.12. p,l を素数, $v_0=p$ とし $q=m=10,d=l,r_1=\ldots=r_l=10$, $\boldsymbol{x}=(0,1/l,\dots,(l-1)/l)$, $\boldsymbol{\alpha}:=(1,1/2\dots,1/10)$ とする. $\boldsymbol{A}:=(A_i)_{1\le i\le m}\in\mathrm{GL}_{10}(K)^{10}$ をひとつ固定し, 自然数 k に対して, $\beta=p^{-k}$ とする. このとき $r=10\cdot l$ であり,

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{\alpha},10,\boldsymbol{x},p^{-k})\ge k\log p-10\cdot l\left(100\log(2)+\log(1000\cdot l+1)+1000\cdot l\log\left(\frac{1000\cdot l+1}{1000\cdot l}\right)\right)\\ -10000\log(2520)-10\cdot\frac{l^2}{l-1}\log(l)-10000\cdot l^2\ ,\end{aligned}$$

となる． $l \neq p$ のときは, k が十分大きいか p が十分大きければ, $l = p$ のときは k が十分大きければ, $V(\boldsymbol{\alpha}, 10, \boldsymbol{x}, p^{-k}) > 0$ が成り立つ．例えば $l = 17$ とすると,

$$V(\boldsymbol{\alpha}, 10, \boldsymbol{x}, p^{-k}) > k \log p - 2904153.58 \ ,$$

となるので, $\begin{cases} k \log p > 2982473.78 & (p \neq 17) \\ k \geq 1052684 & (p = 17) \end{cases}$ となるとき, 定理 1.8 より, 17001 個の $\mathbb{Q}_p$ の元 :

$$1, \Phi_{i,w,j,s}(p^k/i) \quad (1 \leq i, w, s \leq 10, 1 \leq j \leq 17) \ ,$$

は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である．

2　一般 Lerch 関数のパデ型近似

この章では K を標数 0 の体とする．まずパデ型近似を復習する．無限遠点におけるオーダー関数, ord_∞, を次で定義する．

$$\mathrm{ord}_\infty : K((1/z)) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, \quad \sum_k \frac{a_k}{z^k} \mapsto \min\{k \in \mathbb{Z} \mid a_k \neq 0\} \ .$$

補題 2.1. r を自然数, $f_1(z), \ldots, f_r(z) \in 1/z \cdot K[[1/z]]$ をローラン級数, $\mathbf{n} := (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}^r$ とする． $N := \sum_{i=1}^r n_i$ とおく． M を $M \geq N$ を満たす整数とする．このとき, 次の条件を満たす多項式族 $(P_0(z), P_1(z), \ldots, P_r(z)) \in K[z]^{r+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ が存在する．

$$\text{(i) } \deg P_0(z) \leq M \ ,$$
$$\text{(ii) } \mathrm{ord}_\infty P_0(z) f_j(z) - P_j(z) \geq n_j + 1 \quad (1 \leq j \leq r) \ .$$

定義 2.2. 補題 2.1 と同様の記号を用いる．(i) と (ii) の条件を満たす多項式の族, $(P_0(z), P_1(z), \ldots, P_r(z)) \in K[z]^{r+1}$ を $(f_1, \ldots, f_r)$ の重さ $\mathbf{n}$, 次数 M のパデ型近似という．

まず記号の準備を行う．

記号 2.3.

(i) $\alpha \in K$ に対して, 代入写像 $K[t] \longrightarrow K$, $P \longmapsto P(\alpha)$ を Eval_α とかく．

(ii) $P \in K[t]$, に対して, P 倍写像 $K[t] \longrightarrow K[t]$, $(Q \longmapsto PQ)$ を $[P]$ とかく．

(iii) $x \in K \setminus \mathbb{Z}_{<0}$ に対して形式的な積分写像 $K[t] \longrightarrow K[t]$, $P \longmapsto \frac{1}{t^{1+x}} \int_0^t t^x P(\xi) d\xi$ を Prim_x とかく．定義より, 任意の非負整数 k に対して, $\mathrm{Prim}_x(t^k) = t^k/(k+x+1)$ が成り立つ．

(iv) $x \in K \setminus \mathbb{Z}_{<0}$, n を自然数とする．写像 $K[t] \longrightarrow K[t]$, $P \longmapsto \frac{1}{n!} t^{-x} \frac{d^n}{dt^n}(t^{n+x} P(t))$ を $S_{n,x}$ とかく．定義より, 非負整数 k に対して, $S_{n,x}(t^k) = \frac{(k+x+1)_n}{n!} t^k$ が成り立つことに注意する．

事実 2.4.　(i) Prim_x は K 同型写像であり, その逆写像は $S_{1,x}$ である．

(ii) $x_1, x_2 \in K \setminus \mathbb{Z}_{<0}$, 非負整数 n_1, n_2 に対して, S_{n_1,x_1}, S_{n_2,x_2} は可換である. 即ち,

$$S_{n_1,x_1} \circ S_{n_2,x_2} = S_{n_2,x_2} \circ S_{n_1,x_1} \ ,$$

が成り立つ.

(iii) n を自然数, k を非負整数, $x \in K \setminus \mathbb{Z}_{<0}$ とすると次が成り立つ.

$$S_{n,x} = \frac{1}{n!} S_{1,x} \circ (S_{1,x} + \mathrm{Id}) \circ \cdots \circ (S_{1,x} + (n-1)\mathrm{Id}) \ , \ [t^k] \circ S_{1,x} = (S_{1,x} - k\mathrm{Id}) \circ [t^k] \ .$$

(iv) 集合 $\{b_{n,m,l}\} \subset \mathbb{Q}$ で, $b_{n,m,0} = (-1)^n$ かつ, 全ての $n, m \geq 0$ に対して等式：

$$[t^m] \circ S_{n,x} = \sum_{l=0}^{n} b_{n,m,l} S_{1,x}^{(l)} \circ [t^m] \ ,$$

を満たすものが存在する.

$m, q_1, \ldots, q_m, d, r_1, \ldots, r_d$ を自然数とし, $\sum_{i=1}^m q_i = \tilde{q}$, $\sum_{j=1}^d r_j = r$ とおく. 多項式族 $(\beta_1(z), \ldots, \beta_m(z)) \in K[z]^m$ を $\deg\beta_i(z) = q_i$ を満たすもの, 正則行列の族

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(i)} & \ldots & a_{1,q_i}^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q_i,1}^{(i)} & \ldots & a_{q_i,q_i}^{(i)} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{q_i}(K) \text{ for } 1 \leq i \leq m \ ,$$

と K の元の族 $(x_1, \ldots, x_d) \in K^d$ が $x_i - x_j \notin \mathbb{Z}$ for $i \neq j$ を満たすとする.

このとき有理関数の族：

$$f_{i,w_i}(z) := \frac{\sum_{k=1}^{q_i} a_{w_i,k}^{(i)} z^{q_i-k}}{\beta_i(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{w_i,k}^{(i)}}{z^{k+1}} \in K(z) \cap 1/z \cdot K[[1/z]] \ \ (1 \leq i \leq m, \ 1 \leq w_i \leq q_i) \ ,$$

と一般 Lerch 関数：

$$f_{i,w_i,j,s}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{w_i,k}^{(i)}}{(k+x_j+1)^s} \frac{1}{z^{k+1}} \in 1/z \cdot K[[1/z]] \quad (1 \leq i \leq m, \ 1 \leq w_i \leq q_i, \ 1 \leq j \leq d, \ s \in \mathbb{Z}) \ ,$$

と定義する.

例 2.5. $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ を相違なる 0 でない K の元. $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{N}$, $\beta_i(z) = z^{q_i} - \alpha_i^{q_i}$,

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(i)}\alpha_i & \ldots & a_{1,q_i}^{(i)}\alpha_i^{q_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q_i,1}^{(i)}\alpha_i & \ldots & a_{q_i,q_i}^{(i)}\alpha_i^{q_i} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{q_i}(K) \text{ for } 1 \leq i \leq m \ .$$

とする. このとき

$$f_{i,w_i,j,s_j}(z) = \Phi_{i,w_i,j,s_j}(\alpha_i/z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{w_i,k+1}^{(i)}}{(k+x_j+1)^{s_j}} \frac{\alpha_i^{k+1}}{z^{k+1}} \ ,$$

となる. ここで $a_{w_i,k+1}^{(i)} := a_{w_i,l+1}^{(i)} (0 \leq l \leq q_i - 1 \text{ and } k+1 \equiv l+1 \mod q_i)$ である.

$\alpha \in K,\, x \in K \setminus \mathbb{Z}_{<0},\, 1 \leq w_i \leq q_i, s \in \mathbb{Z}$ に対して K 準同型を

$$\varphi^{(i)}_{w_i,x,s} : K[t] \longrightarrow K;\ t^k \mapsto \frac{b^{(i)}_{w_i,k+1}}{(k+x+1)^s} \quad , \tag{3}$$

と定義すると, 等式 :

$$f_{i,w_i,j,s}(z) = \varphi^{(i)}_{w_i,x_j,s}\left(\frac{1}{z-t}\right) \quad ,$$

が成り立つ. 以降は任意の x に対して, $\varphi^{(i)}_{w_i,x,0} = \varphi^{(i)}_{w_i}$ とかく. 以上の記号の下で重要な等式 :

$$\varphi^{(i)}_{w_i,x,s} \circ S_{1,x} = \varphi^{(i)}_{w_i,x,s-1} \quad , \tag{4}$$

が成り立つ.

以上の準備の下, 一般 Lerch 関数 $f_{i,w_i,j,s}(z)(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq w_i \leq q_i,\ 1 \leq j \leq d,\ s \in \mathbb{Z})$ のパデ型近似を構成する.

補題 2.6. $1 \leq i \leq m, 1 \leq w_i \leq q_i$ に対して, $(\beta_i(t)) \subseteq \ker \varphi^{(i)}_{w_i}$ が成り立つ. ここで $(\beta_i(t))$ は多項式 $\beta_i(t)$ で生成される $K[t]$ のイデアルである.

証明. $f_{i,w_i}(z)$ の定義と等式 (3) から, 等式 :

$$\sum_{k=1}^{q_i} a^{(i)}_{w_i,k} z^{q_i-k} = \beta_i(z) f_{i,w_i}(z) = \varphi^{(i)}_{w_i}\left(\frac{\beta_i(z)-\beta_i(t)}{z-t}\right) + \varphi^{(i)}_{w_i}\left(\frac{\beta_i(t)}{z-t}\right) \quad ,$$

が成り立つ. 従って,

$$\sum_{k=1}^{q_i} a^{(i)}_{w_i,k} z^{q_i-k} - \varphi^{(i)}_{w_i}\left(\frac{\beta_i(z)-\beta_i(t)}{z-t}\right) = \varphi^{(i)}_{w_i}\left(\frac{\beta_i(t)}{z-t}\right) \quad ,$$

が成り立つ. この等式の右辺は $K[z]$ に含まれ, 等式 :

$$\varphi^{(i)}_{w_i}\left(\frac{\beta_i(t)}{z-t}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(i)}_{w_i}(t^k \beta_i(t))}{z^{k+1}} \in 1/z \cdot K[[1/z]] \quad ,$$

が成り立つことから, $\varphi^{(i)}_{w_i}(t^k\beta_i(t)) = 0\ (k \geq 0)$ を得る. 即ち主張が示された. □

l を $0 \leq l \leq \tilde{q}r$ を満たす非負整数とし, 自然数 n に対して多項式族を以下のように定義する.

$$P_{n,l}(z) = P_l(z) := \mathrm{Eval}_z \circ_{j=1}^{d} S^{(r_j)}_{n,x_j}\left(t^l \prod_{i=1}^{m} \beta_i(t)^{rn}\right) \quad , \tag{5}$$

$$P_{n,l,i,w_i,j,s_j}(z) := P_{l,i,w_i,j,s_j}(z) := \varphi^{(i)}_{w_i,j,s_j}\left(\frac{P_l(z)-P_l(t)}{z-t}\right) \quad , \tag{6}$$

$(1 \leq i \leq m, 1 \leq w_i \leq q_i, 1 \leq j \leq d, 1 \leq s_j \leq r_j)$. これらの記号の元, 一般 Lerch 関数 $f_{i,w_i,j,s}(z)(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq w_i \leq q_i,\ 1 \leq j \leq d,\ s \in \mathbb{Z})$ のパデ型近似が次のように構成される.

定理 2.7. 多項式族, $(P_l(z), P_{l,i,w_i,j,s_j}(z))_{\substack{1\leq i\leq m, 1\leq w_i\leq q_i \\ 1\leq j\leq d, 1\leq s_j\leq r_j}}$ は一般 *Lerch* 関数 $(f_{i,w_i,j,s_j}(z))_{\substack{1\leq i\leq m, 1\leq w_i\leq q_i \\ 1\leq j\leq d, 1\leq s_j\leq r_j}}$ の重さ $(n,\dots,n) \in \mathbb{N}^{\tilde{q}r}$, 次数 $\tilde{q}rn + l$ のパデ型近似である.

証明. $P_l(z)$ の定義から $\deg P_l(z) = \tilde{q}rn + l$ が成り立つので, $P_l(z)$ は次数に関するパデ型近似の性質をみたす. これより, $R_{l,i,w_i,j,s_j}(z) := P_l(z) f_{i,w_i,j,s_j}(z) - P_{l,i,w_i,j,s_j}(z)$ とおくとき

$$\mathrm{ord}_\infty R_{l,i,w_i,j,s_j}(z) \geq n+1 \ ,$$

が成り立つことを示せばよい. $R_{l,i,w_i,j,s_j}(z)$ の定義から等式 :

$$\begin{aligned} R_{l,i,w_i,j,s_j}(z) &= P_l(z)\varphi^{(i)}_{w_i,x_j,s_j}\left(\frac{1}{z-t}\right) - P_{l,i,w_i,j,s_j}(z) \\ &= \varphi^{(i)}_{w_i,x_j,s_j}\left(\frac{P_l(t)}{z-t}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(i)}_{w_i,x_j,s_j}(t^k P_l(t))}{z^{k+1}} \ , \end{aligned}$$

が成り立つ. 事実 2.4 (ii) から S_{n,x_j} が互いに可換であることに注意する. $P_l(t)$ の定義は, $S_{n,x_j} \circ \cdots \circ S_{n,x_j}$ (r_j 回の合成) を $\beta_i(z)^{r_j n}$ で割り切れる多項式に作用させているので, 事実 2.4 (iii), (iv) とライプニッツの公式から,

$$t^k P_l(t) \in S^{(s_j)}_{1,x_j}\beta_i(t)\cdot(K[t]) \ \ (0 \leq k \leq n-1) \ ,$$

を満たすことが分かる. 関係式 (4) から $\varphi^{(i)}_{w_i,x_j,s_j}(t^k P_l(t)) \in \varphi^{(i)}_{w_i}((\beta_i(t))$ が成り立つことに注意して補題 2.6 を用いると

$$\varphi^{(i)}_{w_i,x_j,s_j}(t^k P_l(t)) = 0 \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq w_i \leq q_i, 1 \leq j \leq d, 1 \leq s_j \leq r \ \ 0 \leq k \leq n-1) \ ,$$

が成り立ち $R_{l,i,w_i,j,s_j}(z)$ のローラン級数表示から, 関係式 :

$$\mathrm{ord}_\infty \, R_{l,i,w_i,j,s_j}(z) \geq n+1 \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq w_i \leq q_i, 1 \leq j \leq d, 1 \leq s_j \leq r_j) \ ,$$

を得る. 以上で定理 2.7 が示された. □

3 証明の概要

定理 1.8 を示すために与えられた数の代数体上の線形独立性を与える判定法を紹介する.

命題 3.1. K を代数体, v_0 を K の素点とする. $m \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \ldots, \theta_m) \in K^{m+1}_{v_0}$ とする. 行列の族

$$(\mathrm{M}_n)_n = \left(\left(a^{(n)}_{l,j}\right)_{0 \leq l,j \leq m}\right)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{GL}_{m+1}(K) \ ,$$

と実数 $\mathbb{A}$, 関数の族 $\{F_v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}\}_{v \in \mathfrak{M}_K}$ で任意の自然数 n に対して条件 :

$$\max_{\substack{0 \leq l \leq m \\ 1 \leq j \leq m}} \left| a^{(n)}_{l,0}\theta_j - a^{(n)}_{l,j}\theta_0 \right|_{v_0} \leq e^{-\mathbb{A}n + o(n)} \ , \tag{7}$$

$$\|\mathrm{M}_n\|_v \leq e^{F_v(n)} \ \ (v : K \text{ の素点}) \ , \tag{8}$$

を満たすものが存在すると仮定する. さらに $\lim_{n \to \infty} 1/n \sum_{v \neq v_0} F_v(n) =: \mathbb{B}$ が存在すると仮定する. 実数 V を

$$V := \mathbb{A} - \mathbb{B} \ ,$$

と定義する. $V > 0$ とすると, $\theta_0, \ldots, \theta_m$ は K 上線形独立である.

証明. ベクトル $\boldsymbol{\beta} := (\beta_0, \ldots, \beta_m) \in K^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ で $\Lambda(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}) := \sum_{i=0}^{m} \beta_i \theta_i = 0$ を満たすものが存在すると仮定して矛盾を出す. n を自然数とする. 仮定より, $\det(M_n)_{0 \le l,j \le m} \neq 0$ が成り立つので, $0 \le l_n \le m$ をみたす整数 l_n で,

$$B_{l_n} := \sum_{j=0}^{m} a_{l_n,j}^{(n)} \beta_j \neq 0 \tag{9}$$

が成り立つものが存在する. $1 \le j \le m, 0 \le l \le m$ に対して, $R_{n,l,j} = a_{l,0}^{(n)} \theta_j - a_{l,j}^{(n)}$ とおく. $\Lambda(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta})$, B_{l_n}, 及び, $R_{n,l,j}$ の定義から,

$$0 = a_{l_n,0}^{(n)} \Lambda(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}) = B_{l_n} + \sum_{j=1}^{m} R_{n,l_n,j} \beta_j$$

が成り立つ. $B_{l_n} \in K \setminus \{0\}$ に対して積公式を用いると, 次の不等式を得る.

$$1 = |B_{l_n}|_{v_0} \times \prod_{v \neq v_0} |B_{l_n}|_v = \left| \sum_{j=1}^{m} R_{n,l_n,j} \beta_j \right|_{v_0} \times \prod_{v \neq v_0} |B_{l_n}|_v \ . \tag{10}$$

はじめに $|B_{l_n}|_v$ の上界の評価を行う. 不等式 (8) と B_{l_n} の定義より,

$$|B_{l_n}|_v \le e^{F_v(n) + \mathrm{h}_v(\boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_v \log(m+1)} \ , \tag{11}$$

が成り立つ. ここで $\varepsilon_v := \begin{cases} 1 & v: \text{アルキメデス素点} \\ 0 & v: \text{非アルキメデス素点} \end{cases}$ である. 次に $\left| \sum_{j=1}^{m} R_{n,l_n,j} \beta_j \right|_{v_0}$ の上界の評価を行う. 不等式 (7) から

$$\left| \sum_{j=1}^{m} R_{n,l_n,j} \beta_j \right|_{v_0} \le e^{-\mathbb{A} n + o(n)} \ (n \to \infty) \ ,$$

が成り立つ. (11) と上の不等式を (10) に用いると

$$1 \le e^{-Vn + o(n)} \ (n \to \infty) \ ,$$

が成り立つ. 仮定より $V > 0$ なので, 上の不等式は十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して矛盾を与える. □

命題 3.1 を $(\theta_{i,w,j,s_j} := \Phi_{i,w,j,s_j}(\alpha_i/\beta))_{\substack{1 \le i \le m, 1 \le w \le q \\ 1 \le j \le d, 1 \le s_j \le r_j}}$ に対して用いたい. 命題 3.1 の条件にある行列の族を, 定理 2.7 を $\beta_i(z) = z^q - \alpha_i^q$ として得られる多項式族 $(P_{n,l}(z), P_{n,l,i,w,j,s_j}(z))$ から構成する.

自然数 n と $0 \le l \le qrm$ に対して, $a_l^{(n)} := P_{n,l}(\beta), a_{l,i,w,j,s_j}^{(n)} := P_{n,l,i,w,j,s_j}(\beta)$ とおき,

$$M_n := \begin{pmatrix} a_0^{(n)} & \ldots & a_{qrm}^{(n)} \\ & a_{l,i,w,j,s_j}^{(n)} & \end{pmatrix}_{\substack{1 \le i \le m, 1 \le w \le q, 1 \le j \le d, 1 \le s_j \le r_j \\ 0 \le l \le qrm}} \in \mathrm{M}_{qrm+1}(K) \ ,$$

と定義する. ここで, B_n が可逆になることを示すことが難しいが, 次の結果が成り立つ.

命題 3.2. n を自然数とする. このとき, $c_n \in K \setminus \{0\}$ で次の条件を満たすものが存在する.

$$\det B_n = c_n \prod_{i=1}^{m} \alpha_i^{qr(u+1) + q^2 r^2 n + \binom{q}{2} r^2 + q\left(\sum_{1 \le j_1 < j_2 \le d} r_{j_1} r_{j_2} + \sum_{j=1}^{d} \binom{r_j}{2}\right)} \prod_{1 \le i_1 < i_2 \le m} (\alpha_{i_2}^q - \alpha_{i_1}^q)^{(2n+1)qr^2} \ .$$

注意 3.3. 命題 3.2 で与えられる c_n は明示的に計算できる値である.

この後は, $P_{n,l}(z), P_{n,i,s,l}(z)$ の定義から, (7), (8) に対応する評価を行い, 可逆な行列族 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して, 命題 3.1 を用いると, 定理 1.8 が得られる.

謝辞: 最後になりますが, 講演の機会をくださいました組織委員の中村隆先生 (東京理科大学), 赤塚広隆先生 (小樽商科大学) に感謝を致します.

参考文献

[1] K. Alladi and M. L. Robinson, *Legendre polynomials and irrationality*, J. Reine Angew Math., **318**, (1980), 137–155.

[2] A. I. Apetekarev, A. Branquinho and W. Van Assche, *Multiple orthogonal polynomials for classical weights*, Trans. Amer. Math. Soc., **355**, no. 10, (2003), 3887–3914.

[3] A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge Univ. Press, 1975.

[4] F. Beukers, *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$*, Bull. London Math. Soc., **11**, (1979), 268–272.

[5] F. Beukers, *Irrationality of some p-adic L-values*, Acta Math. Sin., **24**, no. 4, (2008), 663–686.

[6] G. V. Chudnovsky, *Padé approximations to the generalized hypergeometric functions I*, J. Math. Pures et Appl., **58**, (1979), 445–476.

[7] G. V. Chudnovsky, *Measures of irrationality, transcendence and algebraic independence, Recent progress*, London Math. Soc. Lecture Notes ser., **56**, Cambridge Univ. Press, (1982), 11–82.

[8] G. V. Chudnovsky. *On applications of Diophantine approximations*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **81** (1984), 7261–7265.

[9] D. V. Chudnovsky and G. V. Chudnovsky, *Applications of Padé approximations to diophantine inequalities in values of G-functions*, in: Number Theory, New York 1983–84, eds. D. V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky, H. Cohn, M. B. Nathanson, Lecture Notes in Math., **1135**, Springer, (1985), 9–51.

[10] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Can polylogarithms at algebraic points be linearly independent?*, Moscow Journal in Combinatorics and Number Theory, **9**, no. 4, (2020), 389–406.

[11] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Linear Forms in Polylogarithms*, arXiv:2010.9167v1.

[12] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Linear independence criterion of the Lerch functions with distinct shifts*, preprint.

[13] N. I. Fel'dman, *Improved estimate for a linear form of logarithms of algebraic numbers*, Mat. Sb., **77**, (1968), 256–270; English transl. in Math. USSR Sbornik, **6** (1968), 393–406.

[14] N. I. Fel'dman and Yu. V. Nesterenko (authors), A. N. Parshin and I. R. Schfarevich (eds.), Number Theory IV, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol. 44, 1998.

[15] S. Fischler, J. Sprang and W. Zudilin, *Many odd zeta values are irrational*, Compositio Math., **155**, (2019) , 938–952.

[16] A. O. Galochikin, *Lower bounds for polynomials in values of analytic functions of certain class*, Mat. Sb., **95**, (1974), 396–417; English transl. in Math. USSR Sbornik, **24** (1974).

[17] M. Hata, *On the linear independence of the values of polylogarithmic functions*, J. Math. Pures et Appl., **69**, (1990), 133–173.

[18] M. Hata, *Rational approximations to the dilogarithms*, Trans. Amer. Math. Soc., **336**, no. 1, (1993), 363–387.

[19] N. Hirata-Kohno, M. Ito and Y. Washio, *A criterion for the linear independence of polylogarithms over a number field*, RIMS Kokyouroku Bessatu, **64**, (2017), 3–18.

[20] M. Hirose, M. Kawashima and N. Sato, *A lower bound of the dimension of the vector space spanned by the special values of certain functions*, Tokyo J. Math., **40**, no. 2, (2017), 439–479.

[21] M. Kawashima, *Evaluation of the dimension of the $\mathbb{Q}$-vector space spanned by the special values of the Lerch function*, Tsukuba J. Math. **38**, no. 2, (2014), 171–188.

[22] R. Marcovecchio, *Linear independence of forms in polylogarithms*, Ann. Scuola Nor. Sup. Pisa CL. Sci., **5**, (2006), 1–11.

[23] M. A. Miladi, *Récurrences linéaires et approximations simultanées de type Padé: applications à l'arithmétiqus*, Thèse, Université des S. et T. de Lille, 2001.

[24] L. M. Milne-Thomson, *The Calculus of finite differences*, Macmillan and co., London, 1933.

[25] E. M. Nikišin, *On logarithms of natural numbers*, Math. USSR Izvestia, **15**, no. 3, (1980), 523–530 (originally published in Izv. Akad. Nauk., **43**, no. 6, (1979)).

[26] E. M. Nikišin, *On irrationality of the values of the functions $F(x, s)$*, Math. USSR Sbornik, **37**, no. 3, (1980), 381–388 (originally published in Mat, Sb., **109**, no. 3, (1979)).

[27] E. M. Nikishin and V. N. Sorokin, *Rational Approximations and Orthogonality*, Translations of Mathematical Monographs, **92**, American Math. Society, 1991.

[28] G. Rhin and P. Toffin, *Approximants de Padé simultanés de logarithmes*, J. Number Theory, **24**, (1986), 284–297.

[29] G. Rhin and C. Viola, *On a permutation group related to* $\zeta(2)$, Acta Arith., **77**, no. 1, (1996), 23–56.

[30] G. Rhin and C. Viola, *The permutation group method for the dilogarithms*, Ann. Scuola Nor. Sup. Pisa CL. Sci., **4**, no. 3, (2005), 389–437.

[31] T. Rivoal, *Irrationalité d'au moins un des neuf nombres* $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$, Acta Arith., **103**, no. 2, (2002), 157—167.

[32] T. Rivoal, *Indépendance linéaire des valeurs des polylogarithmes*, J. Théorie des Nombres Bordeaux, **15**, no. 2, (2003), 551–559.

[33] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math., **6**, (1962), 64–94.

[34] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, *Shaper bounds for the Chebyshev functions* $\theta(x)$ *and* $\psi(x)$, Math. Comp., **29**, (1975), 243–269.

[35] C. Siegel, *Uber einige Anwendungen diophantischer Approximationen*, Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch Mathematische Kalasse 1929, Nr. 1.

[36] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, American Math. Society, Colloquium Publications **23**, first edition 1939, 4th edition, 1975.

[37] K. Väänänen, *On linear forms of a certain class of G-functions*, Acta Arith., Vol. **36**, (1980), 273–295.

[38] K. Väänänen, X. Guangshan *On linear forms of G-functions*, Acta Arith., Vol. **50**, (1988), 251–263.

[39] C. Viola and W. Zudilin, *Linear independence of dilogarithmic values*, J. Reine Angew Math., **736**, (2018), 193–223.

[40] W. Zudilin, *On a measure of irrationality for values of G-functions*, Math. USSR Izv., **60**, no. 1, 91–118.

Makoto Kawashima,
kawashima.makoto@nihon-u.ac.jp
Department of Liberal Arts
and Basic Sciences
College of Industrial Engineering
Nihon University
Izumi-chou, Narashino, Chiba
275-8575, Japan