ON THE GIT STRATIFICATION OF PREHOMOGENEOUS VECTOR SPACES

田嶋和明 (仙台高等専門学校)

Abstract. いくつかの概均質ベクトル空間の GIT stratification を有理的に決定した ([8]) ので，その結果について報告する．

1. Introduction

まず，主結果を説明する．次の 2 つの概均質ベクトル空間を考える：

(1) $G = \mathrm{GL}_3 \times \mathrm{GL}_3 \times \mathrm{GL}_2$, $V = \mathrm{Aff}^3 \otimes \mathrm{Aff}^3 \otimes \mathrm{Aff}^2$,
(2) $G = \mathrm{GL}_6 \times \mathrm{GL}_2$, $V = \wedge^2 \mathrm{Aff}^6 \otimes \mathrm{Aff}^2$.

GIT stratification は基礎体 k が代数閉体の場合は，V の軌道分解を与えている．GIT stratification を考える利点は軌道分解の有理性の問題に答えることが出来る点にあり，このことは概均質ベクトル空間のゼータ関数への応用において重要である．

さて，以下 k を任意の完全体とし，$\mathrm{Ex}_2(k)$ を k の高々2 次の分離拡大体の同型類の集合とする．次が本報告の主定理である ([8])：

Theorem 1.1. 概均質ベクトル空間 (1) は 16 個の空でない strata S_β を持つ．さらに，1 つの strata S_{β_0} を除いて $G_k \backslash S_{\beta\, k}$ は 1 点からなり，$G_k \backslash S_{\beta_0\, k}$ は $\mathrm{Ex}_2(k)$ と 1 対 1 に対応する．

Theorem 1.2. 概均質ベクトル空間 (2) は 13 個の空でない strata S_β を持つ．さらに，1 つの strata S_{β_0} を除いて $G_k \backslash S_{\beta\, k}$ は 1 点からなり，$G_k \backslash S_{\beta_0\, k}$ は $\mathrm{Ex}_2(k)$ と 1 対 1 に対応する．

$k = \mathbb{C}$ の場合，Theorem 1.1 は [2, pp. 385–387]，Theorem 1.2 は [1, pp. 456,457] で証明された．

Remark 1.3. 講演でもアナウンスしたが，概均質ベクトル空間

(3) $G = \mathrm{GL}_5 \times \mathrm{GL}_4$, $V = \wedge^2 \mathrm{Aff}^5 \otimes \mathrm{Aff}^4$

の場合は次のようになる ([6])：

$Q_0(v) \in \mathrm{Sym}^2 \mathrm{Aff}^4$ を $v_1 v_4 - v_2 v_3$ の形の二次形式とする．さらに次のように定義する：

(1) $\mathrm{Ex}_n(k)$ を $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ から $\mathfrak{S}_n$ への準同型の共役類の集合とする．
(2) $\mathrm{Prg}_2(k)$ を PGL_2 の k-form の k-同型の集合とする．
(3) $\mathrm{QF}_4(k)$ を $\mathrm{GO}(Q)^\circ$ の形の代数群[1](ここで，$Q \in \mathrm{Sym}^2 \mathrm{Aff}^4$) の k-同型類の集合とするとき，$\mathrm{IQF}_4(k) \subset \mathrm{QF}_4(k)$ を $\mathrm{GO}(Q_0)^\circ$ の inner form のなす部分集合とする．

$n = 2, 3$ であれば，$\mathrm{Ex}_n(k)$ は k の高々n 次の分離拡大体の同型類の集合と一致する．

次が，(3) の場合の結果である：

Key words and phrases. prehomogeneous, vector spaces, stratification, GIT.

[1] ここで，$\circ$ は identity component を表す．

Theorem 1.4. k を任意の完全体とする．

(1) 概均質ベクトル空間 (3) は 61 個の空でない strata S_β をもつ．

(2) $\mathrm{ch}\,(k) \neq 2$ と仮定する．もし，$S_\beta \neq \emptyset$ であれば，$G_k \backslash S_{\beta k}$ は次のいずれかである：(i) 1 点 (SP とかく) (ii) $\mathrm{Ex}_2(k)$，(iii) $\mathrm{Ex}_3(k)$，(iv) $\mathrm{Prg}_2(k)$ または (v) $\mathrm{IQF}_4(k)$．さらに，(i)–(v) の場合の S_β の個数は次のようになる：

Type	SP	$\mathrm{Ex}_2(k)$	$\mathrm{Ex}_3(k)$	$\mathrm{Prg}_2(k)$	$\mathrm{IQF}_4(k)$
Number of S_β's	43	12	3	2	1

この場合の $k = \mathbb{C}$ のときの結果は [4] で証明された．

2. GIT stratification

本節では GIT stratification について説明する．k を任意の完全体とし，$\overline{k}$ をその代数的閉包とする．

本報告では具体的な概均質ベクトル空間を扱うが，GIT stratification の定義については一般的に説明する．

G を任意の連結簡約群，V を G の有限次表現とし，いずれも k 上で定義されているとする．本報告では G はスプリットと仮定してよいので，以下ではそのように仮定する．さらに，以下の仮定をおく：G の簡約部分群 G_1 とスプリット トーラス $T_0 \subset Z(G)$ (G の中心) で $T_0 \cap G_1$ が有限で，かつ $G = T_0 G_1$ が代数群として成立する．また，有理指標 χ of T_0 が存在して，$t \in T_0$ の作用は $\chi(t)$ のスカラー倍で与えられるものとする．

T を $(T_0 \cap G_1) \subset T \subset G$ を満たす極大スプリットトーラスとし，$X_*(T), X^*(T)$ をそれぞれ T の 1-パラメータ部分群 (以下，1PS と記す) のなす群，T の有理指標のなす群とする．

$$\mathfrak{t} = X_*(T) \otimes \mathbb{R},\ \mathfrak{t}_{\mathbb{Q}} = X_*(T) \otimes \mathbb{Q},\ \mathfrak{t}^* = X^*(T) \otimes \mathbb{R},\ \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Q}} = X^*(T) \otimes \mathbb{Q}.$$

などと定義し，$\mathbb{W} = N_G(T)/T$ を G のワイル群とする．$\chi \in X^*(T), \lambda \in X_*(T)$ に対して，$t^{\langle \chi, \lambda \rangle_T} = \chi(\lambda(t))$ で定義される自然なペアリング $\langle\ ,\ \rangle_T : X^*(T) \times X_*(T) \to \mathbb{Z}$ が存在し，これは perfect paring である．

$\mathfrak{t}$ 上の内積 $(\ ,\ )$ で $\mathbb{W}$ とガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ の作用により不変なものが存在する．この内積は有理的，すなわちすべての $\lambda, \nu \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Q}}$ に対して $(\lambda, \nu) \in \mathbb{Q}$ と仮定してよい．

$\|\ \|$ を $(\ ,\ )$ の定める $\mathfrak{t}$ 上のノルムとし，$\mathbb{W}$ の作用に関する Weyl chamber $\mathfrak{t}_+ \subset \mathfrak{t}$ をとる．

$\lambda \in \mathfrak{t}$ に対して，$\beta = \beta(\lambda) \in \mathfrak{t}^*$ を全ての $\nu \in \mathfrak{t}$ に対して $\langle \beta, \nu \rangle = (\lambda, \nu)$ を満たすものとする．このとき，写像 $\lambda \mapsto \beta(\lambda)$ は全単射であり，その逆写像を $\lambda = \lambda(\beta)$ と記すことにする．ただ 1 つの正の有理数 a が存在し $a\lambda(\beta) \in X_*(T)$ かつこの指標は indivisible となる．この $a\lambda(\beta)$ のことを λ_β と記すことにする．

$\mathfrak{t}$ と $\mathfrak{t}^*$ を同一視することにより，$\mathfrak{t}^*$ 上の $\mathbb{W}$-不変な内積 $(\ ,\ )_*$，$(\ ,\ )_*$ により定まるノルム $\|\ \|_*$，Weyl chamber $\mathfrak{t}^*_+$ を得る．

T が対角に作用する V 上の座標系を $v = (v_0, v_1, \ldots, v_N)$ とする．$\gamma_i \in \mathfrak{t}^*$ と $\mathbb{e}_i$ をそれぞれ第 i 座標に対応するウェイトと座標ベクトルとする．部分集合 $\mathfrak{I} \subset \{\gamma_i \,|\, i = 0, 1, \ldots, N\}$ に対して，$\mathfrak{I}$ の convex hull を $\mathrm{Conv}\,\mathfrak{I}$ と記すことにする．

$\mathbb{P}(V)$ を V に付随する射影空間とし，$\pi_V : V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$ を自然な射影とする．$0 \notin \mathrm{Conv}\,\mathfrak{I}$ を満たす $\mathfrak{I} \subset \{\gamma_i \,|\, i = 0, 1, \ldots, N\}$ に対して，β を $\mathrm{Conv}\,\mathfrak{I}$ と原点の一番近い点とする．このとき，β は $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Q}}$ に属す．$\mathfrak{B}$ を上のように構成された β で，$\mathfrak{t}^*_+$ に属すもの全てのなす集合とする．

V の部分空間

$$Y_\beta = \mathrm{Span}\{\mathbb{e}_i \,|\, (\gamma_i, \beta)_* \geq (\beta, \beta)_*\}, \quad Z_\beta = \mathrm{Span}\{\mathbb{e}_i \,|\, (\gamma_i, \beta)_* = (\beta, \beta)_*\},$$
$$W_\beta = \mathrm{Span}\{\mathbb{e}_i \,|\, (\gamma_i, \beta)_* > (\beta, \beta)_*\}.$$

を定義する．明らかに，$Y_\beta = Z_\beta \oplus W_\beta$ である．

λ を G の 1PS とするとき，

$$P(\lambda) = \left\{p \in G \,\middle|\, \lim_{t\to 0} \lambda(t)p\lambda(t)^{-1} \text{ exists}\right\},\ M(\lambda) = Z_G(\lambda) \text{ (the centralizer)},$$
$$U(\lambda) = \left\{p \in G \,\middle|\, \lim_{t\to 0} \lambda(t)p\lambda(t)^{-1} = 1\right\}$$

などと定める．$P(\lambda)$ は $M(\lambda)$ を Levi 部分とする G の放物部分群で，$U(\lambda)$ はその unipotent radical である．$\lambda = \lambda_\beta$ のときは，$P_\beta = P(\lambda_\beta)$，$M_\beta = Z_G(\lambda_\beta)$，$U_\beta = U(\lambda_\beta)$ 等と記すことにする．

χ_β を M_β の indivisible な有理指標で，ある正整数 a, b に対して χ_β^a の T への制限が $b\beta$ と一致するものとする．$G_\beta = \{g \in M_\beta \,|\, \chi_\beta(g) = 1\}^\circ$ と定義すると，G_β は Z_β に作用する．ここで，M_β と G_β は k 上定義され，$\langle \chi_\beta, \lambda_\beta \rangle$ は $\|\beta\|_*$ の正のべきであるから $M_\beta = G_\beta \mathrm{Im}(\lambda_\beta)$ が成り立つ．さらに，ν が G_β の有理的な 1PS であれば $(\nu, \lambda_\beta) = 0$ である．

$\mathbb{P}(Z_\beta)^{\mathrm{ss}}$ を $\mathbb{P}(Z)_\beta$ の $G_\beta^1 \overset{\mathrm{def}}{=} G_\beta \cap G_1$ の作用に関する semistable な点の集合とする．Z_β と $\mathbb{P}(Z_\beta)$ はスカラーが 1 次元だけ違うので，G_β の代わりに G_β^1 の作用の安定性を考えるのである．なお，安定性に関する GIT (幾何学的不変式論) の用語は [3] を参照せよ．

$\mathbb{P}(Z_\beta)^{\mathrm{ss}}$ を $\mathbb{P}(V)$ の部分集合と見做し，$Z_\beta^{\mathrm{ss}} = \pi_V^{-1}(\mathbb{P}(Z_\beta)^{\mathrm{ss}})$，$Y_\beta^{\mathrm{ss}} = \{(z, w) \,|\, z \in Z_\beta^{\mathrm{ss}}, w \in W_\beta\}$，$S_\beta = GY_\beta^{\mathrm{ss}}$ などと定義する．S_β は空集合にもなり得ることに注意しよう．また，S_β の k-有理点のなす集合を $S_{\beta\, k}$ などと記すことにする．

次の定理は 1980 年代に F.C.Kirwan, G.Kempf, L.Ness などの研究により得られ，(本報告の範疇外であるが) 群がスプリットでない場合にも筆者と雪江氏により証明された定理である．[7, p.264] に記された形で定理を述べる．

Theorem 2.1. k を任意の完全体とする．このとき，

$$V_k \setminus \{0\} = V_k^{\mathrm{ss}} \amalg \coprod_{\beta \in \mathfrak{B}} S_{\beta\, k}$$

が成り立つ．さらに，$S_{\beta\, k} \cong G_k \times_{P_{\beta\, k}} Y_{\beta\, k}^{\mathrm{ss}}$ が成立する．

このタイプの幾何学的不変式論 (GIT) を用いた stratification のことを，本報告では **GIT stratification** と呼ぶことにしよう．

さて，[5] では計算機により，空間 (1)–(3) に対する $\mathfrak{B}$ の可能性 ($\mathfrak{B}$ に属する β の個数) は次のように決定されている：

空間	$\mathfrak{B}$ の可能性
(1)	49
(2)	81
(3)	292

本報告ではこのことは解説しない．なお，[5] では Z_β, W_β の座標も同時に決定されており，それらのデータの一覧表が載っている．

これらのデータを基にして「S_β が空であるか否かをどうやって決定するか？」を空間 (2) の場合を例として概説するのが本報告の目標である．

以下，空間 (2) $G = \mathrm{GL}_6 \times \mathrm{GL}_2$, $V = \wedge^2 \mathrm{Aff}^6 \otimes \mathrm{Aff}^2$ の場合を考える．このとき，$G_1 = \mathrm{SL}_6 \times \mathrm{SL}_2$ であり，G_1 の極大スプリットトーラスは

$$T = \left\{ \left(\begin{pmatrix} t_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & t_{16} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_{21} & \\ & t_{22} \end{pmatrix} \right) \middle| t_{11} \cdots t_{16} = t_{21} t_{22} = 1 \right\}$$

と取れる．したがって，

$$\mathfrak{t}^* = \left\{ (a_{11}, \ldots, a_{16}, a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^8 \middle| \sum_{i=1}^{6} a_{1i} = \sum_{i=1}^{2} a_{2i} = 0 \right\}$$

であり，ワイル群は $\mathbb{W} \cong \mathfrak{S}_6 \times \mathfrak{S}_2$ であるから

$$\mathfrak{t}^*_+ = \left\{ (a_{11}, \ldots, a_{16}, a_{21}, a_{22}) \in \mathfrak{t}^* \middle| \begin{array}{c} a_{11} \le a_{12} \le \cdots \le a_{16}, \\ a_{21} \le a_{22} \end{array} \right\}$$

である．また，$\mathfrak{t}^* \subset \mathbb{R}^8$ 上のワイル不変な内積としては標準内積 $(a, b)_* := \displaystyle\sum_{i=1}^{8} a_i b_i$ が取れる．

$\{\mathbb{e}_{1,i}\}$ を Aff^6 の座標ベクトル，$\{\mathbb{e}_{2,i}\}$ を Aff^2 の座標ベクトルとするとき，$e_{ijk} := (\mathbb{e}_{1,i} \wedge \mathbb{e}_{1,j}) \otimes \mathbb{e}_{2,k}$ とおくと $x \in \wedge^2 \mathrm{Aff}^6 \otimes \mathrm{Aff}^2$ は $x = \displaystyle\sum_{i,j,k} x_{ijk} e_{ijk}$ のように展開できる．T が対角に作用する x の座標として，以下では (x_{ijk}) を用いる．

3. NON–EMPTY CASE

$S_\beta \neq \emptyset$ を示すには，G^1_β の作用に関する不変式を見つければよい．正確には，0 でない多項式 $P(x)$ と M^1_β の指標 χ で

(1) χ は χ_β と proportional
(2) すべての $g \in M^1_\beta, x \in Z_\beta$ に対して，$P(gx) = \chi(g) P(x)$

となるものを見つければよい．

まず，$G_k \backslash S_{\beta,k}$ が 1 点に対応する場合を考える：

Example 3.1. $\beta_{18} = \frac{1}{12}(-1, -1, -1, -1, 2, 2, 0, 0)$ の場合を考える．$Z_{\beta_{18}}$ の座標は

$$x_{151}, x_{152}, x_{161}, x_{162}, x_{251}, x_{252}, x_{261}, x_{262}, x_{351}, x_{352}, x_{361}, x_{362}, x_{451}, x_{452}, x_{461}, x_{462}$$

である．$\lambda_{\beta_{18}}(t) = (\mathrm{diag}(t^{-1}, t^{-1}, t^{-1}, t^{-1}, t^2, t^2), \mathrm{diag}(1, 1))$ なので，

$$M_{\beta_{18}} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} g_{11} & O \\ O & g_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \right) \right\} \cong \mathrm{GL}_4 \times \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$$

である．ここで，g_{11} は 4×4 行列，g_{12} は 2×2 行列である．また，$M_{\beta_{18}}$ の表現として $Z_{\beta_{18}}$=$\mathrm{Aff}^4 \otimes \mathrm{Aff}^2 \otimes \mathrm{Aff}^2 = \mathrm{Aff}^4_{1,[1,4]} \otimes \mathrm{Aff}^2_{1,[5,6]} \oplus \mathrm{Aff}^2_{2,[1,2]}$ となる．

いま，$Z_{\beta_{18}}$ を写像

$$Z_{\beta_{18}} \ni x \mapsto A(x) := \begin{pmatrix} x_{151} & x_{152} & x_{161} & x_{162} \\ x_{251} & x_{252} & x_{261} & x_{262} \\ x_{351} & x_{352} & x_{361} & x_{362} \\ x_{451} & x_{452} & x_{461} & x_{462} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,4}$$

により 4×4 行列全体の集合 $\mathrm{M}_{4,4}$ と同一視し，$P(x) := \det A(x)$ と定める．このとき，任意の $(\mathrm{diag}(g_{11}, g_{12}), g_2) \in M_{\beta_{18}}$ に対して $P(gx) = (\det g_{12})P(x)$ が成り立ち，$\chi(g) = \det g_{12}$ は $\chi_{\beta_{18}}$ と proportional である．したがって，$P(x)$ は $G^1_{\beta_{18}}$ の作用によって不変式となっている．$Z^{\mathrm{ss}}_{\beta_{18}} = \{x \in Z_{\beta_{18}} \mid P(x) \neq 0\}$ であるから，$S_{\beta_{18}} \neq \emptyset$ が分かる．

次に，$R_{18} \in Z^{\mathrm{ss}}_{\beta_{18}\,k}$ を $A(R_{18}) = I_4$ となる元とする．このとき，$Z^{\mathrm{ss}}_{\beta_{18}\,k} = M_{\beta_{18}\,k} R_{18}$ が示される．

$x \in Y^{\mathrm{ss}}_{\beta_{18}}$ とすると，x は $x = (R(18), w)$ (ここで $w = (x_{561}, x_{562})$) という形であるとしてよい．$U_{\beta_{18}\,k}$ を $P_{\beta_{18}\,k}$ の unipotent radical とすると，ある $n \in U_{\beta_{18}\,k}$ に対して $n(R(18), w) = (R(18), 0)$ となる．したがって，$G_k \backslash S_{\beta_{18}\,k} \cong P_{\beta_{18}\,k} \backslash Y^{\mathrm{ss}}_{\beta_{18}\,k}$ は 1 点 SP と対応することが分かる．

次に，$G_k \backslash S_{\beta,k}$ が $\mathrm{Ex}_2(k)$ と対応する場合を考える：

Example 3.2. $\beta_{67} = \frac{1}{6}(-2, -2, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$ の場合を考える．$Z_{\beta_{67}}$ の座標は

$$x_{341}, x_{351}, x_{361}, x_{451}, x_{461}, x_{561}, x_{342}, x_{352}, x_{362}, x_{452}, x_{462}, x_{562}$$

である．$\lambda_{\beta_{67}}(t) = (t^{-2}, t^{-2}, t, t, t, t, 1, 1)$ であるから

$$M_{\beta_{67}} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} g_{11} & O \\ O & g_{12} \end{pmatrix}, g_2 \right) \right\} \cong \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_4 \times \mathrm{GL}_2$$

(ここで，g_{11} は 2×2 行列，g_{12} は 4×4 行列，g_2 は 2×2 行列) である．また，$M_{\beta_{67}}$ の表現として $Z_{\beta_{67}} \cong \wedge^2 \mathrm{Aff}^4_{1,[3,6]} \otimes \mathrm{Aff}^2_{2,[1,2]}$ である．ここで，$(\mathrm{diag}(g_{11}, g_{12}), g_2)$ の作用は

$$\wedge^2 \mathrm{Aff}^4 \otimes \mathrm{Aff}^2 \ni A \otimes v \mapsto (g_{12} A^t g_{12}) \otimes g_2 v \in \wedge^2 \mathrm{Aff}^4 \otimes \mathrm{Aff}^2$$

で与えられており，この表現は概均質ベクトル空間となっている (したがって，$S_{\beta_{67}} \neq \emptyset$ である)．この概均質ベクトル空間は [9] において研究されていて，その有理軌道は $\mathrm{Ex}_2(k)$ と 1 対 1 対応するすることが示されている．$W_{\beta_{67}} = \{0\}$ であるから，$G_k \backslash S_{\beta_{67}\,k}$ は $\mathrm{Ex}_2(k)$ と 1 対 1 対応することが分かる．

4. EMPTY CASE

$S_\beta = \emptyset$ を示すには，定義から $Z^{\mathrm{ss}}_\beta = \emptyset$ を示せばよい．そのためには次のようにする：

(1) 任意の $x \in Z_\beta$ に対して，ある $g \in M^s_\beta$ (M_β の semi-simple part) を取れば，gx のいくつかの座標は 0 に出来る．
(2) x のそのような座標が 0 であるとの仮定の下，G^1_β の 1PS $\lambda(t)$ で「x_j が x の 0 でない座標のとき $\lambda(t)$ に関する x_j のウェイトがすべて正」のものを見つける．

例を紹介する前に，(1) のステップで用いる補題を述べる．証明は簡単な線形代数である．

Lemma 4.1. $G = \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2, V = \mathrm{Aff}^2 \oplus \mathrm{M}_{2,2}$ の場合を考え，$(g_1, g_2) \in G$ の V への作用は $(v, A) \mapsto (g_1 v, g_1 A^t g_2)$ により与えられているとする．このとき，任意の $(v, A) \in V_k$

に対して，ある $g \in G_k$ が存在して，$g(v, A)$ は次の形となる：$g(v, A) = [w, B]$，ただし $w = [0, *]$，$B = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix}$.

Example 4.2. $\beta_{53} = \frac{1}{42}(-14, -2, -2, 4, 7, 7, -3, 3)$ の場合を考える．$Z_{\beta_{53}}$ の座標は

$$x_{451}, x_{461}, x_{252}, x_{262}, x_{352}, x_{362}$$

である．

$$M_{\beta_{53}} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} * & & & \\ & g_{11} & & \\ & & * & \\ & & & g_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right) \right\} \cong \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_1^4$$

であり，$M_{\beta_{50}}$ の表現としては $Z_{\beta_{53}} \cong \mathrm{Aff}^2_{1,[5,6]} \oplus \mathrm{Aff}^2_{1,[5,6]} \otimes \mathrm{Aff}^2_{1,[2,3]}$ である．また，$M^s_{\beta_{53}} = \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2$．したがって，Lemma 4.1 より，$x_{451} = x_{252} = 0$ と仮定してよい．いま，$\lambda(t) := (\mathrm{diag}(t, t^{-5}, t^5, t^{-7}, t^{-2}, t^8), \mathrm{diag}(1, 1))$ とおくと，$x \in Z^{\mathrm{ss}}_{\beta_{53}}$ の 0 でない座標 x_{461} (resp. $x_{262}, x_{352}, x_{362}$) の $\lambda(t)$ に関するウェイトは 1 (resp. $3, 3, 13$) となり，全て正である．よって，$Z^{\mathrm{ss}}_{\beta_{53}} = \emptyset$ であるから，$S_{\beta_{53}} = \emptyset$ であることが従う．

なお，上のような 1PS $\lambda(t)$ の見つけ方については後述 (Example 4.5) する．

もう 1 つ例を紹介する前にやはりステップ (1) で用いる次の補題を述べる．これも簡単な線形代数の結果である：

Lemma 4.3 (Witt's theorem). $G = \mathrm{SL}_n, V = \wedge^2 \mathrm{Aff}^n$ とする．V を対称行列で，対角成分が 0 のもの全体と同一視する．このとき，任意の $A \in V_k$ に対して，ある $g \in G_k$ を取れば，$B = gA^tg$ は次の形で表される：

$$\wedge^2 k^3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & * \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \wedge^2 k^4 : \begin{pmatrix} 0 & * & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & * \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \wedge^2 k^5 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & * & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & * \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Example 4.4. $\beta_{30} = \frac{1}{48}(-4, -1, -1, 2, 2, 2, -3, 3)$ の場合を考える．$Z_{\beta_{30}}$ の座標は

$$x_{451}, x_{461}, x_{561}, x_{142}, x_{152}, x_{162}, x_{232}$$

である．また，

$$M_{\beta_{30}} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} * & & \\ & g_{11} & \\ & & g_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right) \right\} \cong \mathrm{GL}_3 \times \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_1^3$$

であり，$M_{\beta_{30}}$ の表現としては $Z_{\beta_{30}} \cong \wedge^2 \mathrm{Aff}^3_{1,[4,6]} \oplus \mathrm{Aff}^3_{1,[4,6]} \oplus 1$ となる．いま，$\wedge^2 \mathrm{Aff}^3_{1,[4,6]}$ を

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{451} & x_{461} \\ -x_{451} & 0 & x_{561} \\ -x_{461} & -x_{561} & 0 \end{pmatrix}$$

の形の 3×3 行列の全体と同一視する．また，$M^s_{\beta_{30}} = \mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_2$ である．

ここで，(1) のステップを実行したいのだが，注意すべきは $\wedge^2\mathbf{Aff}^3_{1,[4,6]}$ と $\mathbf{Aff}^3_{1,[4,6]}$ が G の同じファクターの表現であることである (つまり，どちらかの座標しか消せない)．このような場合は両方試みてどちらが上手く行くか試行錯誤するのだが，この場合 $\wedge^2\mathrm{Aff}^3_{1,[4,6]}$ の座標を消すことが正しいと分かる．

よって，Lemma 4.3 (Witt's theorem) より，$x_{451} = x_{461} = 0$ であると仮定しても良い．$\lambda(t) = (\mathrm{diag}(t^5, t^{-1}, t^{-1}, t^{-8}, t, t^4), \mathrm{diag}(t^4, t^{-4}))$ とおくと，$x \in Z_{\beta_{30}}$ の 0 でない座標 x_{561} (resp. $x_{142}, x_{152}, x_{162}, x_{462}, x_{232}$) の $\lambda(t)$ に関するウェイトは 1 (resp. 1,10,13,2) となり，すべて正である．よって，$Z^{\mathrm{ss}}_{\beta_{30}} = \emptyset$ であることが分かり，したがって $S_{\beta_{30}} = \emptyset$ である．

最後に，1–PS の見つけ方を説明する

Example 4.5. $\beta_{53} = \frac{1}{42}(-14, -2, -2, 4, 7, 7, -3, 3)$ の場合 (Example 4.2) を例にとる．$Z_{\beta_{53}}$ の座標は $x_{451}, x_{461}, x_{252}, x_{262}, x_{352}, x_{362}$ であり，$M_{\beta_{53}} \cong \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_1^4$，$Z_{\beta_{53}}$ の $M_{\beta_{53}}$ の表現としては $Z_{\beta_{53}} \cong \mathrm{Aff}^2_{1,[5,6]} \oplus \mathrm{Aff}^2_{1,[5,6]} \otimes \mathrm{Aff}^2_{1,[2,3]}$，$M^s_{\beta_{53}} \cong \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2$ 等であった．

$M^1_{\beta_{53}}$ の作用をトーラス部分と semi-simple 部分を分けて考察する．

$M^1_{\beta_{53}}$ の中心 (トーラス部分) は $\{(\mathrm{diag}(t_1^{-1}, t_2^{-1}I_2, t_1t_2^2t_3^2, t_3^{-1}I_2), \mathrm{diag}(1,1))\}$ に等しい．トーラス部分では $\chi_{\beta_{53}}(t)$ は $\chi(t) = t_1^{18}t_2^{12}t_3^{-6}$ と proportional である．$G^1_{\beta_{53}} = (\ker \chi_{\beta_{53}})^\circ$ より $t_3 = t_1^3t_2^2$ が成り立つ．

semi-simple 部分の元は $(1, \mathrm{diag}(t_4^{-1}, t_4), 1, \mathrm{diag}(t_5^{-1}, t_5), 1, 1) \in M^{1s}_{\beta_{53}}$ である．

$Z_{\beta_{53}}$ の座標 $x_{451}, x_{461}, x_{252}, x_{262}, x_{352}, x_{362}$ に対して，上の元の積の作用によるウェイトの表を作ると以下になる：

coordinates	x_{451}	x_{461}	x_{252}	x_{262}	x_{352}	x_{362}
weights	$t_1^4t_2^4t_5^{-1}$	$t_1^4t_2^4t_5$	$t_1^{-3}t_2^{-3}t_4^{-1}t_5^{-1}$	$t_1^{-3}t_2^{-3}t_4^{-1}t_5$	$t_1^{-3}t_2^{-3}t_4t_5^{-1}$	$t_1^{-3}t_2^{-3}t_4t_5$

いま，$[c_1, c_2, c_4, c_5] \in \mathbb{Z}^4$ を $t_1 = t^{c_1}, t_2 = t^{c_2}, t_4 = t^{c_4}, t_5 = t^{c_5}$ 成り立つように選び，$\lambda_c(t) = (\mathrm{diag}(t_1^{-1}, t_2^{-1}t_4^{-1}, t_2^{-1}t_4, t_1t_2^2t_3^2, t_3^{-1}t_5^{-1}, t_3^{-1}t_5), \mathrm{diag}(1,1))$ とおく．ここで，$t_3 = t_1^3t_2^2$ である．

さて，$x_{451} = x_{252} = 0$ と仮定しても良かったことを思い出そう．各座標のウェイトに対応するベクトルを

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_{12} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_{12} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_{21} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$v_{22} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix}$$

と定義し，$A = (v_2\, v_{12}\, v_{21}\, v_{22})$ とおく．このとき，$\lambda_c(t)$ に関する $x_{461}, x_{262}, x_{352}, x_{362}$ のウェイトが全て正であることは，${}^tcA = [{}^tcv_2\, {}^tcv_{12}\, {}^tcv_{21}\, {}^tcv_{22}]$ の全ての成分が正であることと同値である．

そこで，以下ではそのような c を MAPLE を使って求める：

```
> with(linalg):
```

```
> v1:= matrix(4,1,[4,4,0,-1]):
> v2:= matrix(4,1,[4,4,0,1]):
> v12:= matrix(4,1,[-3,-3,-1,-1]):
> v12:= matrix(4,1,[-3,-3,-1,1]):
> v21:= matrix(4,1,[-3,-3,1,-1]):
> v22:= matrix(4,1,[-3,-3,1,1]):
> A:= augment(v2,v12,v21,v22):
> rref(A);
```

上の計算を実行すると $\{v_2, v_{12}, v_{21}\}$ は線形独立で，$v_{22} = 2v_2 + \frac{4}{3}v_{12} + \frac{7}{3}v_{21}$ を満たすことが分かる．

$a_2 = {}^t c v_2, a_{12} = {}^t c v_{12}, a_{21} = {}^t v_{21}, a_{22} = {}^t c v_{22}$ とおく．このとき，$a_{22} = {}^t c v_{22} = 2a_2 + \frac{4}{3}a_{12} + \frac{7}{3}a_{21}$ である．$\{v_2, v_{12}, v_{21}\}$ は線形独立であるから，a_2, a_{12}, a_{21} は任意の正の数が選べる．

例えば，$a_2 = 1, a_{12} = 3, a_{21} = 3$ と選ぼう．そのとき，$a_{22} = 13$ である．

したがって，${}^t c A = [1, 3, 3, 13]$ を解けばよい．

```
>b:= matrix(4,1,[1,3,3,13]);
>A:= augment(transpose(augment(v2,v12,v21,v22)),b);
> rref(A);
```

上の計算より $c = [c_1, c_2, c_4, c_5] = [-1, 0, 5, 5]$ と選べることが分かる．このとき，$c_3 = 3c_1 + 2c_2 = -3$ である．

$\lambda(t) = \lambda_c(t) = (\mathrm{diag}(t, t^{-5}, t^5, t^{-7}, t^{-2}, t^8), \mathrm{diag}(1, 1))$ とおくと，これが Example 4.2 の $\lambda(t)$ である．

References

[1] T. Kimura and S. Kasai. The orbital decomposition of some prehomogeneous vector spaces. In *Algebraic groups and related topics (Kyoto/Nagoya, 1983)*, volume 6 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 437–480. North-Holland, Amsterdam, 1985.

[2] T. Kimura and M. Muro. On some series of regular irreducible prehomogeneous vector spaces. *Proc. Japan Acad.*, Math. Sci. 55 Ser. A:384–389, 1979.

[3] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan. *Geometric invariant theory.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 3rd edition, 1994.

[4] I. Ozeki. On the micro-local structure of the regular prehomogeneous vector spaces associated with SL(5) × GL(4) I. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 26:no3, 539–584, 1990.

[5] K. Tajima and A. Yukie. On the GIT stratification of prehomogeneous vector spaces I. preprint; arXiv:1902.04274.

[6] K. Tajima and A. Yukie. On the GIT stratification of prehomogeneous vector spaces III. preprint.

[7] K. Tajima and A. Yukie. Stratification of the null cone in the non-split case. *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, 63(1-2):261–276, 2014.

[8] K. Tajima and A. Yukie. On the GIT stratification of prehomogeneous vector spaces II. *Tsukuba J. Math.*, 44(1):1–62, 2020.

[9] D.J. Wright and A. Yukie. Prehomogeneous vector spaces and field extensions. *Invent. Math.*, 110(2):283–314, 1992.

(K. Tajima) National Institute of Technology, Sendai College, Natori Campus, 48 Nodayama, Medeshima-Shiote, Natori-shi, Miyagi, 981-1239, Japan

E-mail address: `kazuaki.tajima.a8@tohoku.ac.jp`