ON THE MODULARITY OF SPECIAL CYCLES ON ORTHOGONAL SHIMURA VARIETIES

京都大学・数学教室　前田　洋太
YOTA MAEDA
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE,
KYOTO UNIVERSITY

Abstract. 志村多様体上の代数的サイクルを係数とした形式的べき級数がコホモロジー係数の Hilbert-Siegel 保型形式の Fourier 展開になるという現象は 1990 年代に Kudla-Millson により観察されており，一連の研究は "Kudla のプログラム"の始まりとされている．近年，Yuan-Zhang-Zhang により，Chow 群係数の形式的べき級数が研究され，ある種の直交型志村多様体の場合に保型性が示された．本稿では，より一般の直交型志村多様体に対する Yuan-Zhang-Zhang の結果の拡張について紹介する．

1. 導入

主定理の主張を述べる前に，今回の結果の動機となった Hirzebruch-Zagier の仕事 [4] を復習する．F を実二次体，$\mathcal{O}_F$ を F の整数環，$\mathscr{H}$ を複素上半平面とする．このとき，Hilbert モジュラー曲面 $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)\backslash\mathscr{H}^2$ が構成され，この曲面の上には Hirzebruch-Zagier サイクルと呼ばれる，非負整数でパラメトライズされた代数的サイクルが存在する．この $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)\backslash\mathscr{H}^2$ のトロイダルコンパクト化を考え，境界に延ばした Hirzebruch-Zagier サイクルを $\{T_m\}_{m\geqslant 0}$ と書く．このとき，Hirzebruch-Zagier はこのサイクルの自己交点数のなすべき級数がある種の保型性を持つことを示した．

定理 1.1 (Hirzebruch-Zagier [4, Theorem 1])**.**

$$\phi(z) := \sum_{m\geqslant 0} (T_m\text{の自己交点数})\exp(2\pi\sqrt{-1}mz)$$

は重さ 2 の楕円モジュラー形式.

この定理は局所対称空間上の "特殊因子"の保型性を示している．
この論文では，上記の結果の直交型志村多様体への一般化を考察する．

1.1. **志村多様体．** 導入で用いた Hilbert モジュラー曲面の代わりに直交型志村多様体を，Hirzebruch-Zagier サイクルの代わりに部分志村多様体を用いるのでそれらを定義する．F を拡大次数 $d > 1$ の総実体とし，埋め込みを $\sigma_1, \ldots, \sigma_d \colon F \hookrightarrow \mathbb{R}$ と書く．$(V, (\ ,\ ))$ を F 上の $n+2$ 次元の二次形式付きベクトル空間とし，符号が $\sigma_1, \ldots, \sigma_e$ で $(n, 2)$，$\sigma_{e+1}, \ldots, \sigma_d$ で $(n+2, 0)$ となるものとする．ここで n, e は 正の整数とし，$e < d$ と仮定する．このとき，$\mathbb{Q}$ 上の代数群 $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\,\mathrm{GSpin}(V)$ を考えると，

$$G(\mathbb{R}) = \mathrm{GSpin}(n,2)^e \times \mathrm{GSpin}(n+2)^{d-e}$$

となるので，$1 \leqslant i \leqslant e$ に対し，

$$D_i := \{v \in (V \otimes_{\sigma_i} \mathbb{C})\backslash\{0\} \mid (v,v) = 0,\ (v,\bar{v}) < 0\}/\mathbb{C}^\times$$

Date: February 26, 2020.
2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11G18; Secondary 11F46, 14C17.
Key words and phrases. Shimura varieties, modular forms, algebraic cycles.

とおき，$G(\mathbb{R})$ に付随する Hermite 対称領域を $D := D_1 \times \cdots \times D_e$ とおく．このとき，(G, D) は志村データである．よって，十分小さい開コンパクト部分群 $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ を選ぶごとに $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の滑らかな射影多様体 M_K を得る．この M_K を**直交型志村多様体**と呼び，$\mathbb{C}$ 値点は以下のようになる．

$$M_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash(D \times G(\mathbb{A}_f))/K$$

補足 1.2. 今回は $e < d$ と仮定しているので M_K は射影多様体になる．また，K を十分小さくとると，M_K は滑らかになる．

特殊サイクルを定義する．W を V の総正定値な部分空間とし

$$G_W := \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\,\mathrm{GSpin}(W^\perp)$$

を考え，D_W を対応する Hermite 対称領域とする．このとき，$g \in G(\mathbb{A}_f)$ に対し，

$$M_{gKg^{-1},W}(\mathbb{C}) := G_W(\mathbb{Q})\backslash(D_W \times G_W(\mathbb{A}_f))/(gKg^{-1} \cap G_W(\mathbb{A}_f))$$

とおくと

$$\begin{aligned} \iota\colon M_{gKg^{-1},W}(\mathbb{C}) &\hookrightarrow M_K(\mathbb{C}) \\ (\tau, h) &\mapsto (\tau, hg) \end{aligned}$$

が構成されるので，$Z(W, g)_K$ をこの射の像で定める．簡単な計算により，

$$\mathrm{codim}(Z(W, g)_K) = e \times \dim(W)$$

がわかる．今回用いる特殊サイクルは余次元が 1 より真に大きい場合があるので，さらなる定義が必要となる．r を正の整数とし，V^r の元 $x = (x_1, \ldots, x_r)$ に対し，

$$U(x) := \mathrm{Span}_F\{x_1, \ldots, x_r\}$$

を V の部分空間であって，F 上 x の成分で張られるものとする．このとき，

$$Z(x, g)_K := \begin{cases} Z(U(x), g)_K(\mathrm{c}_1(\mathscr{L}_{K,1}^\vee) \cdots \mathrm{c}_1(\mathscr{L}_{K,e}^\vee))^{r - \dim U(x)} & (U(x)\text{ が総正定値}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

と定め，**特殊サイクル**と呼ぶ．ここで，D_i 上のトートロジカルバンドルから定まる M_K 上の直線束を $\mathscr{L}_{K,i}$ とおき，その双対束を $\mathscr{L}_{K,i}^\vee$ と書いた．また c_1 は第一種 Chern 類である．$\mathrm{codim}(Z(U(x), g)_K) = e \times \dim(U(x))$ より，

$$Z(x, g)_K \in \mathrm{CH}^{er}(M_K) \otimes \mathbb{C}$$

である．後で述べるが，ここで用いた r は，直交群と斜交群によるペアの Weil 表現を考えるときの斜交空間の次元の 1/2 倍であることに言及しておく．

この特殊サイクルを用いて，今回保型性を示したい形式的べき級数を定義する．種数 r の Siegel 上半空間を $\mathscr{H}_r$ と書く．Bruhat-Schwartz 関数 $\phi \in \boldsymbol{S}(V(\mathbb{A}_f)^r)^K$ と $\tau = (\tau_1, \ldots \tau_d) \in (\mathscr{H}_r)^d$ に対し，$\mathrm{CH}^{er}(M_K) \otimes \mathbb{C}$ 係数の形式的べき級数 $Z_\phi^K(\tau)$ を

$$Z_\phi^K(\tau) := \sum_{x \in G(\mathbb{Q})\backslash V^r} \sum_{g \in G_x(\mathbb{A}_f)\backslash G(\mathbb{A}_f)/K} \phi(g^{-1}x) Z(x, g)_K q^{T(x)}$$

で定める．ここで，G_x は x の固定部分群，$T(x) := \frac{1}{2}((x_i, x_j))_{i,j}$ を内積行列，

$$q^{T(x)} := \exp(2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{d} \mathrm{Tr}(\tau_i T(x)^{\sigma_i}))$$

とする．

補足 1.3. $Z_\phi^K(\tau)$ がテータ関数の類似であることを説明する．総半正定値対称行列 $\beta \in \mathrm{Sym}_r(F)$ に対し，$\Omega_\beta := \{x \in V^r \mid T(x) = \beta\}$ とおき，通常の保型形式と同様，β で Fourier 展開することを考える．いま，$\Omega_\beta \neq \phi$ なる β をとり，$x \in \Omega_\beta$ を固定する．このとき，

$$\Omega_\beta(\mathbb{A}_f) := \{x \in V(\mathbb{A}_f)^r \mid T(x) = \beta\}$$

とおくと $\xi_j \in G(\mathbb{A}_f)$ を用いて

$$\mathrm{Supp}(\phi) \cap \Omega_\beta(\mathbb{A}_f) = \coprod_{j=1}^{\ell} K \cdot \xi_j \cdot x$$

と分解される．また，

$$Z(\beta, \phi)_K := \sum_{j=1}^{\ell} \phi(\xi_j^{-1} \cdot x) Z(x, \xi_j)$$

とおく．このとき，

$$Z_\phi^K(\tau) = \sum_{\beta \geqslant 0} Z(\beta, \phi)_K q^\beta$$

となり，適切な無限部分の関数を補うことで，コホモロジーのレベルでこれは実際にテータ関数となる．詳しくは [5] を参照.

補足 1.4. ここで用いている特殊サイクルは Bruhat-Schwartz 関数で重みづけたものなので，レベル構造の引き戻しと可換である．すなわち，K' が K の部分群なら，対応する志村多様体の間の射を $\mathrm{pr}\colon M_{K'} \to M_K$ と書いたとき，$\mathrm{pr}^*(Z_\phi^K) = Z_\phi^{K'}$ が成り立つ．よって，これ以降は Z_ϕ^K を Z_ϕ と書く.

以下で $Z_\phi(\tau)$ の保型性について議論したいのだが，そもそもこの形式的べき級数は $\mathrm{CH}^{er}(M_K) \otimes \mathbb{C}$ 係数なので，保型的であるとはどういうことかを明らかにする必要がある.

定義 1.5. H を $\mathrm{CH}^*(M_K) \otimes \mathbb{C}$ もしくは $H^*(M_K, \mathbb{C})$ とし，f を H 係数の形式的べき級数

$$f = \sum_{\beta \geqslant 0} c_\beta q^\beta \quad (c_\beta \in H)$$

とする．このとき，f が Hilbert-Siegel 保型形式であるとは，

$$\ell(f) = \sum_{\beta \geqslant 0} \ell(c_\beta) q^\beta$$

が絶対収束するような任意の $\mathbb{C}$ 線形写像 $\ell\colon H \to \mathbb{C}$ に対し，$\ell(f)$ が Hilbert-Siegel 保型形式であることと定める.

上の意味で今回の主定理を述べると以下のようになる.

$Z_\phi(\tau)$ は重さ $1 + n/2$，種数 r の Hilbert-Siegel 保型形式になる.

しかしながらこの定理は Beilinson-Bloch 予想の仮定の下で示されるので，Beilinson-Bloch 予想の説明をする.

1.2. **Beilinson-Bloch予想.** Beilinson-Bloch予想は代数幾何学における予想であり，Chow群のフィルトレーションの存在を主張するものである．詳しくは [1] を参照せよ．k を $\mathbb{C}$ の部分体とし，X を k 上の滑らかな射影多様体とする．このとき非負整数 m ごとにサイクル写像

$$\mathrm{cl}^m\colon\ \mathrm{CH}^m(X) \to H^{2m}(X, \mathbb{C})$$

が存在する．Beilinson-Bloch 予想は，$k = \overline{\mathbb{Q}}$ のとき，$\mathrm{Ker}(\mathrm{cl}^m)$ がねじれ部分を無視すると X の中間 Jacobi 多様体

$$J^{2m-1}(X) := H^{2m-1}(X, \mathbb{C})/(F^m H^{2m-1}(X, \mathbb{C}) \oplus H^{2m-1}(X, \mathbb{Z}(m))).$$

に埋め込めることを主張する（[1, Lemma 5.6]）．ここで $F^m H^{2m-1}(X, \mathbb{C})$ は Hodge フィルトレーションである．もし $H^{2m-1}(X, \mathbb{C}) = 0$ ならば $J^{2m-1}(X)$ が消えるので，この系として，次の予想が存在する．

予想 1.6 ([1]). $k = \overline{\mathbb{Q}}$ のとき，$H^{2m-1}(X, \mathbb{C}) = 0$ ならば $\mathrm{cl}^m_{\mathbb{C}}$ は単射である．

補足 1.7. 予想1.6は余次元1の場合，すなわち $m = 1$ の場合は成り立つ．

2. 主定理

主定理の仮定が n の値によって変わるので場合分けをする．

定理 2.1 ([11, Theorem 1.5]). $n \geqslant 3$ とする．また，予想1.6を，X が志村多様体 M_K，$m = e$ の場合に仮定する．このとき次が成り立つ．

(1) 任意の $r \geqslant 1$ に対し，$\mathrm{CH}^{er}(M_K) \otimes \mathbb{C}$ 係数の形式的べき級数 $Z_\phi(\tau)$ は重さ $1 + n/2$，種数 r の Hilbert-Siegel 保型形式になる．
(2) さらに $r = 1$ ならば，任意の $\mathbb{C}$ 線形写像 $\ell\colon\ \mathrm{CH}^e(M_K) \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対し，$\ell(Z_\phi(\tau))$ は絶対収束する．

$n < 3$ の場合も，3次元以上の総正定値二次形式付き空間 V' を用意し，V を $V \oplus V'$ に埋め込み，embedding trick を用いることで $V \oplus V'$ の場合に話を帰着できる．よって，予想1.6を $V \oplus V'$ に付随する志村多様体に対して仮定することで，$n \geqslant 3$ の結果から $n < 3$ の場合の結果が導かれる．紙数の都合上，embedding trick については説明することができないので，興味のある方は [11] を参照してほしい．

補足 2.2. 先行研究を紹介する．なお，一連の研究は "Kudla のプログラム"，もしくは "Kudla の保型性予想" と呼ばれている（[7, Section 3] を参照）．

(1) サイクル写像 $\mathrm{cl}^{er}_{\mathbb{C}}\colon\ \mathrm{CH}^{er}(M_K) \otimes \mathbb{C} \to H^{2er}(M_K, \mathbb{C})$ を通して，コホモロジー係数の形式的べき級数として

$$\mathrm{cl}^{er}_{\mathbb{C}}(Z_\phi(\tau)) := \sum_{x \in G(\mathbb{Q}) \backslash V^r} \sum_{g \in G_x(\mathbb{A}_f) \backslash G(\mathbb{A}_f)/K} \phi(g^{-1}x)\, \mathrm{cl}^{er}_{\mathbb{C}}(Z(x, g)_K) q^{T(x)}$$

を考える．この形式的べき級数 $\mathrm{cl}^{er}_{\mathbb{C}}(Z_\phi(\tau))$ の保型性を，Kudla-Millson [10] が $e = 1$ の場合に，Rosu-Yott [12] と Kudla [8] が $e < d$ の場合について示している．
(2) W. Zhang [16] の手法を用いて，Yuan-Zhang-Zhang [15] が $e = 1$ の場合に示している．

これらの結果は Beilinson-Bloch 予想を仮定せずに示されている．Beilinson-Bloch 予想は余次元1で成り立つので，今回の結果は Yuan-Zhang-Zhang [15] の $1 \leqslant e < d$ の場合への一般化になっている．

補足 2.3. 今回の主定理と同様の主張が Kudla によって，[8] において示されている．Kudla は我々よりも数多くの，さらにより“大きな”志村多様体に関して Beilinson-Bloch 予想を仮定することで，$Z_\phi(\tau)$ の保型性と，任意の $\mathbb{C}$ 線形写像 $\ell\colon \mathrm{CH}^{er}(M_K)\otimes\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ による $\ell(Z_\phi(\tau))$ の絶対収束性を示している．

補足 2.4. コホモロジーのレベルで $Z_\phi(\tau)$ を考えるとテータ関数になるので Siegel-Weil 公式を用いることで，$Z_\phi(\tau)$ の交点数は Eisenstein 級数の特殊値と関係する．詳しくは [9, Theorem A] を参照.

定理 2.1 の証明の方針を述べる．以下では $n\geqslant 3$ とし，予想 1.6 を $X=M_K, m=e$ の場合について仮定する．

$r=1$ の場合．志村多様体のコホモロジー $H^{2e-1}(M_K,\mathbb{C})$ が消えることを示し，予想 1.6 と組み合わせることでコホモロジーの場合の結果（[12]，[8]）に帰着する．

$r>1$ の場合．$\mathrm{Sp}_{2r}(F)$ の生成元ごとに Weil 表現を計算し，$r=1$ の場合に帰着させる．これは [15] において用いられた手法である．

3. $r=1$ の場合

3.1. **志村多様体のコホモロジー．** この節では $H^{2e-1}(M_K,\mathbb{C})=0$ を示す．志村多様体 M_K の $\mathbb{C}$ 値点は

$$M_K(\mathbb{C})\cong\coprod_\Gamma X_\Gamma \quad (X_\Gamma:=\Gamma\backslash D)$$

と書ける．ここで，Γ は $\mathrm{SO}_0(n,2)^e\times\mathrm{SO}(n+2)^{d-e}$ の合同部分群である．よって，$G':=(\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{SO}(V))(\mathbb{R})$,

$$G'_i:=\begin{cases}\mathrm{SO}_0(n,2) & (1\leqslant i\leqslant e)\\ \mathrm{SO}(n+2) & (e+1\leqslant i\leqslant d),\end{cases}$$

とおくと，$G'\cong G'_1\times\cdots\times G'_d$ となる．$\mathfrak{g}':=(\mathrm{Lie}\,G')\otimes_\mathbb{R}\mathbb{C}$，$\mathfrak{g}'_i:=\mathrm{Lie}(G'_i)\otimes_\mathbb{R}\mathbb{C}$,

$$K'_i:=\begin{cases}\mathrm{SO}(n)\times\mathrm{SO}(2) & (1\leqslant i\leqslant e)\\ \mathrm{SO}(n+2) & (e+1\leqslant i\leqslant d),\end{cases}$$

$K':=K'_1\times\cdots\times K'_d$ とおくと，松島公式より

$$H^{2e-1}(X_\Gamma,\mathbb{C})\cong\bigoplus_{\pi\in\widehat{G'}}H^{2e-1}(\mathfrak{g}',K';\pi)^{\oplus m_\pi}$$

と書ける．ここで $\widehat{G'}$ は G' の既約ユニタリ表現の同値類の集合であり，m_π は

$$L^2(\Gamma\backslash G')\cong\widehat{\bigoplus_{\pi\in\widehat{G'}}}\pi^{\oplus m_\pi}$$

の分解に現れる整数．このとき π は既約ユニタリ表現なので $\pi\cong\widehat{\otimes}_{i=1}^d\pi_i$ と分解する．ここで，π_i は G'_i の既約ユニタリ表現である．

また $\mathrm{SO}(n+2)$ がコンパクトであることから，Lie 環のコホモロジーの定義より，任意の $j\geqslant 1$ に対し，

$$H^j(\mathfrak{g}'_i,K'_i;\pi_i)=0 \quad (e+1\leqslant i\leqslant d)$$

が成り立つので，Künneth 公式より

$$\begin{aligned}&H^{2e-1}(\mathfrak{g}',K';\pi)\\ \cong&\left(\bigoplus_{i_1+\cdots+i_e=2e-1}\bigotimes_{k=1}^{e}H^{i_k}(\mathfrak{g}'_k,K'_k;\pi_k)\right)\otimes_\mathbb{C}\bigotimes_{k=e+1}^{d}H^0(\mathfrak{g}'_k,K'_k;\pi_k).\end{aligned} \tag{3.1}$$

となる．

ここで $\mathrm{SO}_0(n,2)$ の Lie 環のコホモロジー関するは Vogan-Zuckerman による結果を引用する．

補題 3.1. $n \geqslant 3$ かつ $1 \leqslant i \leqslant e$ とする．このとき，π_i が非自明表現なら次が成り立つ．

$$H^j(\mathfrak{g}_i', K_i'; \pi_i) = 0 \quad (j = 0, 1).$$

Proof. [13, Theorem 8.1] を参照. □

よって，補題 3.1 より (3.1) は以下のように書ける．

$$\begin{aligned} &H^{2e-1}(\mathfrak{g}', K'; \pi) \\ \cong\ &\left(\bigoplus_{\substack{i_1+\cdots+i_e=2e-1 \\ 1\leqslant \exists j \leqslant e,\ \pi_j=1}} \bigotimes_{k=1}^{e} H^{i_k}(\mathfrak{g}_k', K_k'; \pi_k) \right) \otimes_{\mathbb{C}} \bigotimes_{k=e+1}^{d} H^0(\mathfrak{g}_k', K_k'; \pi_k). \end{aligned} \tag{3.2}$$

従って π_i が $\mathrm{SO}_0(n,2)$ の自明表現となる場合の解析が必要となるが，それは次の補題によってなされる．

補題 3.2. L を総実体，V を L 上の非退化な $n+2$ 次元の二次形式付き空間，$\pi \cong \otimes_v' \pi_v$ を $\mathrm{SO}(V)(\mathbb{A}_L)$ の保型表現とする．このとき，あるアルキメデス素点 w であって $\mathrm{SO}(V)(L_w) \cong \mathrm{SO}(n,2)$ かつ π_w の $\mathrm{SO}_0(n,2)$ への制限が自明になるものが存在するならば，任意の素点 v において π_v は 1 次元表現となる．

Proof. [3, Lemma 3.24] を参照. □

ここで $n \geqslant 3$ のとき $\mathrm{SO}_0(n,2)$ はコンパクトでない単純 Lie 群である．従って，もし，ある $1 \leqslant i \leqslant e$ に対して π_i が 1 次元表現ならば，π_i は自明表現となる．この事実に関しては [14, Section 4.3.2, Example 4] を参照.

よって，(3.2) は以下のように書ける．

$$\begin{aligned} &H^{2e-1}(\mathfrak{g}', K'; \pi) \\ \cong\ &\left(\bigoplus_{i_1+\cdots+i_e=2e-1} \bigotimes_{k=1}^{e} H^{i_k}(\mathfrak{g}_k', K_k'; 1) \right) \otimes_{\mathbb{C}} \bigotimes_{k=e+1}^{d} H^0(\mathfrak{g}_k', K_k'; \pi_k). \end{aligned} \tag{3.3}$$

最後に，[2, Section 5.10] より，自明表現は奇数次のコホモロジーに寄与しない．つまり，$1 \leqslant i \leqslant e$ と奇数 s に対して $H^s(\mathfrak{g}_i', K_i'; 1) = 0$ を得る．

以上より

$$H^{2e-1}(\mathfrak{g}', K'; \pi) = 0.$$

これらをまとめて次の定理を得る．

定理 3.3. $n \geqslant 3$ とする．このとき，次を得る．

$$H^{2e-1}(M_K, \mathbb{C}) = 0.$$

系 3.4. $n \geqslant 3$ とし，予想 1.6 が M_K と $m = e$ について成り立つとする．このとき，次の写像は単射である．

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{C}}^e\colon\ \mathrm{CH}^e(M_K) \otimes \mathbb{C} \to H^{2e}(M_K, \mathbb{C}).$$

3.2. **定理 2.1(2) の証明.** $n \geqslant 3$ の場合は系 3.4 とコホモロジー係数の結果（[12]，[8]）から従う．$n < 3$ の場合は embedding trick を用いて $n \geqslant 3$ の場合に帰着する．

4. $r > 1$ の場合

この節では定理 2.1(1) の証明をする．

4.1. **Weil 表現.** 加法指標 $\psi\colon F\backslash\mathbb{A}_F \to \mathbb{C}^\times$ を，trace 写像 $F\backslash\mathbb{A}_F \to \mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}$ と加法指標

$$\begin{aligned}&\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A} \to \mathbb{C}^\times\\ &(x_v)_v \mapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}(x_\infty - \sum_{v<\infty}\overline{x_v})),\end{aligned}$$

の合成として定義する．ここで $\overline{x_v}$ は x_v の $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ における類.

W を F 上の $2r$ 次元の斜交空間とする．このとき ψ に付随する reductive dual pair $(\mathrm{O}(V), \mathrm{Sp}(W))$ の Weil 表現を考え，$\mathrm{Mp}_{2r}(\mathbb{A}_F)\times\mathrm{O}(V(\mathbb{A}_F))$ の $\boldsymbol{S}(V(\mathbb{A}_F)^r)$ への作用を ω と書く．また，ω_∞，ω_f，$\omega_\mathbb{A}$ をそれぞれ $\mathrm{Mp}_{2r}(F_\infty)$ の $\boldsymbol{S}(V(F_\infty)^r)$ への作用，$\mathrm{Mp}_{2r}(\mathbb{A}_{F,f})$ の $\boldsymbol{S}(V(\mathbb{A}_{F,f})^r)$ への作用，$\mathrm{Mp}_{2r}(\mathbb{A}_F)$ の $\boldsymbol{S}(V(\mathbb{A}_F)^r)$ への作用とする．ここで $F_\infty := F\otimes_\mathbb{Q}\mathbb{R}\cong\prod_{i=1}^d\mathbb{R}$ とおいた.

さらに，[5] に従って**退化 Whittaker 関数**を導入する．$(V_+, (\ ,\ )_+)$ を $\mathbb{R}$ 上の $n+2$ 次元正定値二次形式付き空間とし，$\varphi_+\in\boldsymbol{S}(V_+^r)$ を以下で定められた関数とする

$$\varphi_+(x) := \exp(-\pi((x_1,x_1)_+ + \cdots + (x_r,x_r)_+)) \quad (x=(x_1,\dots,x_r)\in V_+^r).$$

$\mathrm{Mp}_{2r}(\mathbb{R})$ の $\boldsymbol{S}(V_+^r)$ への作用を ω_+ と書く．$\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群

$$K_\infty := \left\{ \begin{pmatrix} p & q\\ -q & p\end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}_{2r}(\mathbb{R}) \;\middle|\; (p+\sqrt{-1}q)\,{}^t(p-\sqrt{-1}q) = 1_r\right\}$$

をとり，$\mathrm{Mp}_{2r}(\mathbb{R})$ への逆像を $\widetilde{K}_\infty$ と書く．このとき $k\in\widetilde{K}_\infty$ とすると，次が成り立つ.

$$\omega_+(k)\varphi_+ = \det(k)^{(n+2)/2}\varphi_+.$$

ここで半正定値対称行列 $T\in\mathrm{Sym}_r(\mathbb{R})$ に対して $\frac{1}{2}((x_i,x_j)_+)_{i,j} = T$ となる $x\in V_+^r$ をとる．このとき，$g_\infty\in\mathrm{Mp}_{2r}(\mathbb{R})$ に対し退化 Whittaker 関数を以下で定義する.

$$W_T(g_\infty) := (\omega_+(g_\infty)\varphi_+)(x).$$

これは x のとり方によらない.

いま，$g'\in\mathrm{Mp}_{2r}(\mathbb{A}_F)$ に対し，無限成分を

$$g'_\infty = (g'_{\infty,1},\dots,g'_{\infty,d})\in\mathrm{Mp}_{2r}(F_\infty)\cong\prod_{i=1}^d\mathrm{Mp}_{2r}(\mathbb{R})$$

と書き，$g'_{\infty,i}$ の岩澤分解を考える:

$$g'_{\infty,i} = \begin{pmatrix}1 & s_i\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_i & 0\\ 0 & {}^tt_i^{-1}\end{pmatrix}k_i \quad (s_i\in\mathrm{Sym}_r(\mathbb{R}), t_i\in\mathrm{GL}_r^+(\mathbb{R}), k_i\in\widetilde{K}_\infty).$$

このとき，半正定値対称行列 $T\in\mathrm{Sym}_r(\mathbb{R})$ に対して退化 Whittaker 関数は次の公式を満たす:

$$W_T(g'_{\infty,i}) = |\det(s_i)|^{(n+2)/4}\exp(2\pi\sqrt{-1}(\mathrm{Tr}(\tau_iT)))\det(k_i)^{(n+2)/2} \quad (\tau_i = s_i+\sqrt{-1}t_i{}^tt_i).$$

さらに総半正定値対称行列 $\beta\in\mathrm{Sym}_r(F)$ と $g'\in\mathrm{Mp}_{2r}(\mathbb{A}_F)$ に対し

$$W_\beta(g'_\infty) := W_{\beta^{\sigma_1}}(g'_{\infty,1})\cdots W_{\beta^{\sigma_d}}(g'_{\infty,d}).$$

と定める.

4.2. **形式的べき級数のアデール群上への持ち上げ.** ℓ: $\mathrm{CH}^{er}(M_K)\otimes\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を，$\ell(Z_\phi(\tau))$ が絶対収束するようにとる．退化 Whittaker 関数を用いて

$$g' = (g'_f, g'_\infty)\in \mathrm{Mp}_{2r}(\mathbb{A}_F) = \mathrm{Mp}_{2r}(\mathbb{A}_{F,f})\times\mathrm{Mp}_{2r}(F_\infty)$$

に対して

$$A_\phi(g') := \sum_{x\in G(\mathbb{Q})\backslash V^r}\ \sum_{g\in G_x(\mathbb{A}_f)\backslash G(\mathbb{A}_f)/K} (\omega_f(g'_f)\phi)(g^{-1}x)\ell(Z(x,g)_K)W_{T(x)}(g'_\infty)$$

とおく．これは $\ell(Z_\phi(\tau))$ を $\mathrm{Mp}_{2r}(\mathbb{A}_F)$ に持ち上げ Fourier 展開したものになっている．従って，$\ell(Z_\phi(\tau))$ の保型性を示すことと $A_\phi(g')$ の $\mathrm{Sp}_{2r}(F)$ 不変性を示すことは同値である．

以下で $A_\phi(g')$ の $\mathrm{Sp}_{2r}(F)$ 不変性を示す．

$J := \begin{pmatrix} 0 & -1_r \\ 1_r & 0\end{pmatrix}\in \mathrm{GL}_{2r}(F)$ とおくと，斜交群

$$\mathrm{Sp}_{2r}(F) := \left\{ g\in\mathrm{GL}_{2r}(F)\ \middle|\ {}^t gJg = J\right\}$$

は Siegel 放物型部分群 $P(F)$ と $w_1\in\mathrm{Sp}_{2r}(F)$ で生成される．ここで

$$P(F) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D\end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}_{2r}(F)\right\}$$

であり，w_1 は以下の写像による $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ の像である．

$$\mathrm{SL}_2 \hookrightarrow \mathrm{Sp}_{2r}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1_{r-1} & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{r-1}\end{pmatrix}.$$

よって，$A_\phi(g')$ の $P(F)$ 不変性と w_1 不変性を示せばよい．

4.3. **Siegel 放物型部分群による不変性.** $a\in\mathrm{GL}_r(F)$ と $u\in\mathrm{Sym}_r(F)$ に対して $m(a) := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & {}^t a^{-1}\end{pmatrix}$ および $n(u) := \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とおくと，$m(a)$ と $n(u)$ は Siegel 放物型部分群 $P(F)$ を生成する．

[6, Part I, Section 1] より, Weil 表現において $n(u)$ は次のように作用する:

$$(\omega_f(n(u)_f)\phi)(x) = \psi_f(\mathrm{Tr}(u_f T(x)))\phi(x).$$

従って

$$\begin{aligned}
&(\omega_f(n(u)_f g'_f)\phi)(x)\prod_{i=1}^d W_{T(x)}(n(u_{\infty,i})g'_{\infty,i})\\
=\ & \psi_f(\mathrm{Tr}(u_f T(x_f)))(\omega_f(g'_f)\phi)(x)\prod_{i=1}^d \psi_\infty(\mathrm{Tr}(u_{\infty,i}T(x_{\infty,i})))W_{T(x)}(g'_{\infty,i})\\
=\ & \psi(\mathrm{Tr}(uT(x)))(\omega_f(g'_f)\phi)(x)\prod_{i=1}^d W_{T(x)}(g'_{\infty,i})\\
=\ & (\omega_f(g'_f)\phi)(x)\prod_{i=1}^d W_{T(x)}(g'_{\infty,i}).
\end{aligned}$$

よって，$n(u)$ 作用での不変性を得る:

$$(\omega_f(n(u)_f g'_f)\phi)(x)\ell(Z(x,g)_K)W_{T(x)}(n(u)_\infty g'_\infty) = (\omega_f(g'_f)\phi)(x)\ell(Z(x,g)_K)W_{T(x)}(g'_\infty).$$

$m(a)$ 作用についても同様の不変性を得る．よって，$A_\phi(g')$ は Siegel 放物型部分群 $P(F)$ の作用で不変である．

4.4. w_1 **作用での不変性．** [15, Proposition 3.1] により，次の式を得る．

$$Z_\phi(\tau) = \sum_{\substack{y\in K\backslash \hat{V}^{r-1} \\ \text{admissible}}} \sum_{x_2\in Fy} \sum_{\substack{x_1\in K_y\backslash y^\perp \\ \text{admissible}}} \phi(x_1+x_2,y)\ell(Z(x_1)_{K_y})q^{T(x_1+x_2,y)}.$$

ここで admissible の定義については [15] を参照．従って，退化 Whittaker 関数の定義より

$$\begin{aligned} A_\phi(g') &= \sum_{\substack{y\in K\backslash \hat{V}^{r-1} \\ \text{admissible}}} \sum_{x_2\in Fy} \sum_{\substack{x_1\in K_y\backslash y^\perp \\ \text{admissible}}} (\omega_f(g'_f)\phi)(x_1+x_2,y)\ell(Z(x_1)_{K_y})W_{T(x_1+x_2,y)}(g'_\infty) \\ &= \sum_{\substack{y\in K\backslash \hat{V}^{r-1} \\ \text{admissible}}} \sum_{x_2\in Fy} \sum_{\substack{x_1\in K_y\backslash y^\perp \\ \text{admissible}}} (\omega_{\mathbb{A}}(g')(\phi\otimes\varphi_+^d))(x_1+x_2,y)\ell(Z(x_1)_{K_y}). \end{aligned}$$

ここで $r=1$ の場合の定理 2.1 より次を得る．

$$A_\phi(w_1 g') = \sum_{\substack{y\in K\backslash \hat{V}^{r-1} \\ \text{admissible}}} \sum_{x_2\in Fy} \sum_{\substack{x_1\in K_y\backslash y^\perp \\ \text{admissible}}} (\omega_{\mathbb{A}}(g')(\phi\otimes\varphi_+^d)^{x_2})(x_1+x_2,y)\ell(Z(x_1)_{K_y}).$$

ここで $\phi^x(x,y)$ は 1 変数目に関する Fourier 変換とし，次の事実を用いた:

$$(\omega_{\mathbb{A}}(w_1)(\phi\otimes\varphi_+^d))(x,y) = (\phi\otimes\varphi_+^d)^x(x,y).$$

よって，Poisson 和公式より

$$A_\phi(w_1 g') = \sum_{\substack{y\in K\backslash \hat{V}^{r-1} \\ \text{admissible}}} \sum_{x_2\in Fy} \sum_{\substack{x_1\in K_y\backslash y^\perp \\ \text{admissible}}} (\omega_{\mathbb{A}}(g')(\phi\otimes\varphi_+^d))(x_1+x_2,y)\ell(Z(x_1)_{K_y})$$

を得る．これはまさに $A_\phi(g')$ そのものであったので，結局 $A_\phi(w_1 g') = A_\phi(g')$ が示された．

以上より $A_\phi(g')$ の w_1 作用での不変性が分かったので，定理 2.1(1) が従う．

参考文献

[1] Beilinson, A., *Height pairing between algebraic cycles*, K-theory, Arithmetic and Geometry (Moscow, 1984-1986), 1-25, Lecture Notes in Math., 1289, Springer, Berlin, 1987.

[2] Bergeron, N., Millson, J., Moeglin, C., *Hodge type theorems for arithmetic manifolds associated to orthogonal groups*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2017, no. 15, 4495-4624.

[3] Gorodnik, A., Maucourant, F., Oh, H., *Manin's and Peyre's conjectures on rational points and adelic mixing*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 41 (2008), no. 3, 383-435.

[4] Hirzebruch, F., Zagier, D., *Intersection numbers of curves on Hilbert modular surfaces and modular forms of Nebentypus*, Invent. Math. 36 (1976), 57-113.

[5] Kudla, S., *Algebraic cycles on Shimura varieties of orthogonal type*, Duke Math. J. 86 (1997), no. 1, 39-78.

[6] Kudla, S., *Central derivatives of Eisenstein series and height pairings*, Ann. of Math. (2) 146 (1997), no. 3, 545-646.

[7] Kudla, S., *Special cycles and derivatives of Eisenstein series*, Heegner points and Rankin L-series, 243-270, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 49, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[8] Kudla, S., *Remarks on generating series for special cycles*, preprint, 2019, `arXiv:1908.08390`.

[9] Kudla, S., *On the subring of special cycles*, preprint, 2020, `arXiv:2001.09068`.

[10] Kudla, S., Millson, J., *Intersection numbers of cycles on locally symmetric spaces and Fourier coefficients of holomorphic modular forms in several complex variables*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 71 (1990), 121-172.
[11] Maeda, Y., *The modularity of special cycles on orthogonal Shimura varieties over totally real fields under the Beilinson-Bloch conjecture*, preprint, 2019, `arXiv:1908.08063`, submitted.
[12] Rosu, E., Yott, D., *Generating series of a new class of orthogonal Shimura varieties*, preprint, 2018, `arXiv:1812.05183`.
[13] Vogan, D., Zuckerman, G., *Unitary representations with nonzero cohomology*, Compositio Math. 53 (1984), no. 1, 51-90.
[14] Warner, G., *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. I*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 188. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.
[15] Yuan, X., Zhang, S.-W., Zhang, W., *The Gross-Kohnen-Zagier theorem over totally real fields*, Compositio Math. 145 (2009), no. 5, 1147-1162.
[16] Zhang, W., *Modularity of generating functions of special cycles on Shimura varieties*, Ph. D Thesis, Columbia University, 2009, 48 pp.

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan
Email address: `y.maeda@math.kyoto-u.ac.jp`