ユークリッド空間から筒状の集合を除いた集合上でのシュレディンガー作用素の観測性不等式

理化学研究所・数理創造プログラム 三上渓太
Keita Mikami
Riken, Interdisciplinary Theoretical and Mathematical Sciences Program

1 序文

本稿ではユークリッド空間から筒状の集合を除いた集合上でのシュレディンガー作用素の観測性不等式について紹介する．本研究は筆者と学習院大学の中村周氏と Madrid 工科大学の Fabricio Macià 氏との共同研究である．

1.1 主定理

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を $\Omega = \mathbb{R}^k \times \omega$ の形で書けるものとする，ただし $1 < k < d$ である．加えて $\mathbb{R}^{d-k} \setminus \omega$ はコンパクトであると仮定する．

P_1 と P_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^k$ および $\mathbb{R}^{d-k}$ 上の微分作用素とする．$\mathbb{R}^d$ 上の微分作用素 P を $P = P_1 + P_2 + V(x)$ で定める．

仮定 A. P_1, P_2 と V は以下を満たす:

1. P は $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的自己共役である．
2. P_1 は滑らかな実数値の係数を持ち $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ 上で本質的自己共役である．
3. $P_2 = -\triangle_{\mathbb{R}^{d-k}}$.
4. $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d : \mathbb{R})$ かつ $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_{x_2}^\alpha V(x)| < \infty$ を任意の $|\alpha| \le 1$ であるような $\alpha \in \mathbb{N}^d$ に対して満たす．

例.
1. $k = 1$ のとき, $P_1 = -\triangle_{\mathbb{R}} + x_1$ かつ $V = 0$ とすると, P はスタルクハミルトニアンであり, 仮定 A が満たされている．
2. $k = 1$ のとき, $P_1 = \triangle_{\mathbb{R}}$ かつ $V = 0$ とすると, P はダランベルシアンであり, 仮定 A が満たされている．

定理 1.1. *(観測性不等式)*
仮定 A が満たされているとする．任意の $T>0$ に対して $C_{\Omega,T}>0$ が存在して

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_{\Omega,T}\int_0^T\int_\Omega |e^{-itP}u(x)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

が任意の $u\in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して成り立つ．

Lions は [5] で観測性不等式が成り立つかどうかと対応する制御問題に解が存在するかは同値であることを示した．我々の設定では制御問題とは以下のような問題である: $T>0$ と $u_0, u_t \in L^2(\mathbb{R}^d)$ が与えられたとき

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) - Pu(t,x) = \mathbb{1}_\Omega(x) f(t,x), (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \\ u|_{t=0} = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ かつ } u|_{t=T} = u_T \in L^2(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

に解 $u\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ が存在するような $f\in L^2(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_x^d)$ をとることができるか?
コンパクト多様体の場合, 観測性不等式は測地流と関係があることが知られている．$\Omega\subset M$ が幾何学的制御条件 (GCC) を満たすとは任意の長さ L の測地流が Ω と交わることである．Lebeau は [3] でコンパクトなリーマン多様体 (M,g) の場合, $\Omega\subset M$ が GCC を満たせば, Ω 上でラプラスベルトラミ作用素の観測性不等式が成り立つことを示した．
我々の設定には二つの困難が存在する: 一つは Ω が GCC を満たさないことであり, もう一つは $\mathbb{R}^d$ がコンパクトでないことである．第一の困難は Ω がユークリッド空間とユークリッド空間から筒状の集合を除いた集合の直積であると仮定することで解決した．第二の困難は [3] での観測性不等式の証明は考えている多様体のコンパクト性が本質的な役割を果たしていたことである．[3] での観測性不等式の証明はまず高エネルギーの場合に観測性不等式を示し, 次に低エネルギーの場合は誤差項とみなせることを示していた．この低エネルギーにおける議論でコンパクト性が本質的な役割を果たしていたのである．本稿では Logvinenko-Sereda 定理を用いることでこの困難を解決する．

1.2 厚集合と Logvinenko-Sereda 定理

定義 1.1. ルベーグ可測集合 $S\subset\mathbb{R}^d$ が厚集合であるとは各辺が座標軸に平行な立方体 $K\subset\mathbb{R}^d$ と正定数 $0<\gamma\leq 1$ であって

$$\forall x\in\mathbb{R}^d,\quad |(K+x)\cap S| \geq \gamma|K| > 0,$$

が成り立つものが存在することである, ただし $|A|$ は A のルベーグ測度を表す．

定理 1.2 (Logvinenko-Sereda [4])**.** *$S,\Sigma\subset\mathbb{R}^d$ を可測集合で, 特に Σ はコンパクトであるとする．以下は同値である:*

- *S は厚集合.*

- 正定数 $C = C(S, \Sigma) > 0$ が存在して任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \leq C\Big(\int_S |f(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Sigma} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \Big)$$

  が成り立つ.

Kovrjikine により Logvinenko-Sereda 定理にあらわれる定数の上からの評価が与えられている.

定義 1.2. $S \subset \mathbb{R}^d$ を可測集合とする. S が (γ, L)-厚集合であるとは

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |([0, L]^d + x) \cap S| \geq \gamma L^d,$$

が成り立つことである. ただし, $\gamma \in (0, 1)$ かつ $L > 0$ である.

定理 1.3. 正定数 $C > 0$ であって任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ が $supp\hat{f} \subset J$ をある一片の長さが b で各辺が座標軸に平行な立方体 J に対して満たすとき,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < c(\gamma, d, L, b)\|f\|_{L^2(S)},$$

が成り立つようなものが存在する. ただし $c(\gamma, d, L, b) = \left(\frac{C^d}{\gamma}\right)^{Cd(Lb+1)}$ である.

注. $b \to \infty$, $c(\gamma, d, L, b) \to \infty$ である. そのため Logvinenko-Sereda 定理から直接観測性不等式を示すのは困難である.

厚集合であるという条件はは幾何学的制御条件の次元に関する一般化であると考えることができる. κ-次元幾何学的制御条件を以下で定義する:

定義 1.3. $\kappa \in \{1, \ldots, d\}$ とする. $\ell > 0$ と $\gamma > 0$ について, 集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ κ-次元 (ℓ, γ)-幾何学的制御条件を満たすとは任意の一辺の長さが ℓ の立方体 $Q \subset \mathbb{R}^d$ について,

$$|Q \cap E|_\kappa \geq \gamma |Q|_\kappa,$$

を満たすことである. ただし $|\cdot|_\kappa$ は κ-次元ハウスドルフ測度である. E が κ-幾何学的制御条件を満たすとは κ-次元 (ℓ, γ)-幾何学的制御条件をある $\ell > 0$ と γ について満たすことである.

この κ-次元幾何学的制御条件の定義を用いると, 厚集合は d-次元幾何学的制御条件をみたす集合であるといえる. 一方で, ここでの 1-次元幾何学的制御条件と [3] で用いられた幾何学的制御条件は同値ではない.

$s > 0$ について $P_s = (-\triangle)^s$ を考える. Martin と Pravda-Starov は [6] で $S \subset \mathbb{R}^d$ 上で P_s についての観測性不等式が成り立つならば S は厚集合であることを示した. さらに彼らは $s > \frac{1}{2}$ の場合, ある $T_0 > 0$ であって $T > T_0$ なら S の δ 近傍上で P_s についての観測性不等式が成り立つことも示した. また Huang, Wang と Wang により [1] で $s = 1$ かつ $d = 1$ の場合に同等の結果が示されている.

Martin と Pravda-Starov は S がある $\kappa \in \{1, \cdots d-1\}$ について κ-次元幾何学的制御条件を満たすなら, 十分大きい $T>0$ に対して S の δ 近傍上で P_s についての観測性不等式が成り立つことも示した.

Ω が仮定 A を満たすとする. この時 ω および Ω は厚集合になる. しかしながら, Ω は幾何学的制御条件は満たさない. それゆえに定理 1.1 は Ω が厚集合であり, 任意の $T>0$ に対して P についての観測性不等式を満たすが各 $\kappa \in \{1, \cdots d-1\}$ について κ-次元幾何学的制御条件を満たさない例を与えている.

定理 1.1 は観測性不等式が有界かつなめらかなポテンシャルによる摂動で安定であることも示している. さらに仮定 A は非楕円型の微分作用素や非有界な係数を持つポテンシャルをも包含している.

2 主定理の証明

先行する [3] での議論を拡張することで, 以下の二つのエネルギーについて制限を課した観測性不等式から制限なしの観測性不等式をしめす:

定理 2.1. *(半古典観測性不等式)*
$\tilde{\chi} \in C^\infty(\mathbb{R}^d; [0,1])$ を $\mathbb{1}_\Omega \tilde{\chi} = \mathbb{1}_\Omega$ を満たすものとする. 仮定 A が満たされているなら, 任意の $T>0$ に対して, 正定数 $C_{\omega,T}, h_0 > 0$ が存在して

$$\begin{aligned} &\|\chi(h^2 P_2) u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C_{\omega,T} \left(\int_0^T \|\chi(h^2 P_2) \tilde{\chi} e^{-itP} u(x)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \mathrm{d}x\mathrm{d}t + h^2 \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right), \end{aligned} \tag{2.1}$$

を任意の $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ と $0 < h < h_0$ に対して満たす.

定理 2.2. *(低エネルギー観測性不等式)*
$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ とする. $C_{\omega,\chi} > 0$ であって任意の $T>0$ に対して,

$$\|\chi(P_2) u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C_{\omega,\chi}}{T} \int_0^T \int_\Omega |e^{-itP} u(x)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + C_{\omega,\chi} T^2 \|V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{2.2}$$

が任意の $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して成り立つようなものが存在する.

2.1 半古典観測性不等式

この節では半古典観測性不等式を紹介する. 我々の証明は [3] での議論に基づくが設定の違いから議論をいくつか変更する必要がある.

定理 2.3. *($\mathbb{R}^{d-k}$ 上の半古典観測性不等式)*
$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を $0 \notin \mathrm{supp}\chi$ を満たすものとする. 任意の $T>0$ に対して $C_{\omega,T} > 0$ と $h_0 > 0$ であって

$$\|\chi(h^2 P_2) u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-k})} \leq C_{\omega,T} \left(\int_0^T \int_\omega |e^{-ithP_2} \chi(h^2 P_2) u(x)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + h^2 \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-k})} \right) \tag{2.3}$$

が任意の $u \in L^2(\mathbb{R}^{d-k})$ と $0 < h < h_0$ に対して成り立つ.

$L^2(\mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}^k) \otimes L^2(\mathbb{R}^{d-k})$, 定理 2.3 を拡張して $P_1 + P_2$ についての半古典観測性不等式を得ることができる. 関数解析的な議論から摂動に関する安定性を得ることができ以下を得る.

命題 2.4. *($\mathbb{R}^d$ 上の半古典観測性不等式)*
$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を $0 \notin \mathrm{supp}\chi$ を満たすものとする. 任意の $T > 0$ に対して $C_{\omega,T} > 0$ と $h_0 > 0$ であって

$$\|\chi(h^2P_2)u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le C_{\omega,T}\left(\int_0^T\int_\Omega |\chi(h^2P_2)e^{-ithP}u(x)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + h^2\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right) \tag{2.4}$$

が任意の $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ と $0 < h < h_0$ に対して成り立つ.

[3] での議論を拡張することで, (2.4) 中の e^{-ithP} を e^{-itP} に置き換えることができ, 定理 2.1 を得る.

2.2 低エネルギー観測性不等式

Logvinenko-Sereda 定理より, Ω は厚集合なので $C > 0$ が存在して

$$\|\chi(P_2)u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-k})} \le C\|e^{-itP_2}\chi(P_2)u\|^2_{L^2(\omega)}$$

を任意の $u \in L^2(\mathbb{R}^{d-k})$ に対して満たす. u を $e^{-itP_2}u$ で置き換えて $(0,T)$ 上で積分することで以下の補題を得る:

補題 2.5. $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ とする. $C_{\omega,\chi} > 0$ が存在して任意の $T > 0$ に対して,

$$\|\chi(P_2)u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-k})} \le \frac{C_{\omega,\chi}}{T}\int_0^T\int_\omega |e^{-itP_2}u(x)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{2.5}$$

が任意の $u \in L^2(\mathbb{R}^{d-k})$ に対して成り立つ.

半古典の場合と同様にして, この評価を Ω の場合に拡張することで定理 2.2 を得る.

謝辞. 筆者三上はこの講究録を書くことを快諾してくださり助言をいただきました, 本研究の共同研究者である Madrid 工科大学 Fabricio Macià 教授と学習院大学中村周教授に感謝いたします.

参考文献

[1] S. Huang, G. Wang and M Wang, Observable sets, potentials and Schrödinger equations, preprint, arXiv:2003.11263v1

[2] O.Kovrjikine, Some results related to the Logvinenko-Sereda Theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **129**, (2001) no. 10, 3037-3047.

[3] G. Lebeau, Contrôle de l'équation de Schrödinger, *J. Math. Pures Appl.* **9**, (1992), 267-291.

[4] V.N. Logvinenko and J.F. Sereda, Equivalent norms in spaces of entire functions of exponential type, *Teor. Funkcii Funkcional. Anal. i Prilozen. Vyp.* **20** (1974), 102-111, 175.

[5] J. L. Lions, Contrôlabilité de l'équation exacte, perturbation et stabilization des systémes distribués, R.M.A. Masson **23** (1988).

[6] J. Martin and K. Pravda-Starov, Exact controllability, Schrödinger equation, harmonic oscillator, preprint(2020), arXiv:2007.04096, to appear in Journal of Evolution Equations.