量子ウォークの一般論の構築について

新潟大学 工学部　酒匂(さこう) 宏樹

§1 量子ウォークの定義が必要な理由

私は最近 量子ウォーク（Quantum walk 以下QW）の研究に参入してきた新参者です。研究をはじめて、とまどったのは量子ウォークQWの一般的な定義が与えられていないことでした。研究者が興味をもった対象をQWと呼び、その性質を調べる。また新しい対象をみつけそれをQWと呼び、新たな性質をみつけ論文としてまとめる。そのような研究の価値が低い、などというつもりは全くありません。私が申し上げたいのは、その方向性でみすごされてしまう観点もあるということです。

全ての量子現象をQWで記述できる、ということはおそらく成り立たないでしょう。となると、どのような現象がQWで記述できるのか、そして、できないのか、その境界について調べることはおそらく、自然科学の探究として意味のあることと思います。私はその答えを持ちあわせていませんが、確かにいえることは、答え以前に、未だ問いとしても確立していないということです。なぜならば、量子ウォークQWの定義が未だ与えられていないからです。

もしかしたら「この現象はQWで記述できる」という類の結果は現状でも可能かもしれません。しかし「この現象はQWでは記述できない」という類の結果を得ることは原理的に不可能な現状となっております。それは、数学的にもしくは技術的に困難だからではなく、単にQWの定義が与えられていないからです。

ここでかっこよく「QWの定義はこれです」と言えれば話ははやいのですが、私にそのような力量はおそらくないでしょう。以下の節でQWの定義の一案を提示しますが、これがたたき台となって、よりよい定義が発見されることを、望んでいます。

§2 d次元座標つきHilbert空間の圏

QWの定義の私案を述べる前に少し準備をさせて下さい。まず、d次元座標つきHilbert空間の圏を定義します。QWはその上に作用します。

<u>定義</u>

dを自然数とする。$\mathcal{H}$をHilbert空間とする。Eを$\mathbb{R}^d$上の射影測度：すなわち、$\mathbb{R}^d$のBorel部分集合に$\mathcal{H}$に作用する直交射影を対応させる、可算加法的写像で $E(\mathbb{R}^d) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ をみたすものとする。対$(\mathcal{H}, E)$をd次元座標つきHilbert空間と呼ぶ。

いま定義した$(\mathcal{H}, E)$を対象(Object)とするような圏(Category)を考えたいと思います。射(morphism, arrow)をどのように定めたらいいでしょうか。

定義

　対象 $(\mathcal{H}_1, E_1)$ から対象 $(\mathcal{H}_2, E_2)$ への射 V とは $\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}_2$ への線形有界作用素 $V : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ のことである。」

　ここで違和感を覚える方がいらっしゃるかも知れません。それは当然のことです。上の定義では V と E_1, E_2 の関係性について何の言及もありません。「こういう関係性をもつ V のみを射と考える」と言えればよいのですが、研究を進めていく中で、どうやら、関係性の良さとして、3つ程の定義がありえて、それぞれがそれなりに意味をもつことがわかってきました。少し面倒かもしれませんが、見ていただけるとうれしいです。

定義（有限伝搬　もしくは　Strictly local）

　$(\mathcal{H}_1, E_1)$ から $(\mathcal{H}_2, E_2)$ への射 V が有限伝搬である、もしくは Strictly local である、とは次をみたす正定数が存在することである：

$\mathrm{dist}_{\mathbb{R}^d}(\Omega_1, \Omega_2) > R$ のときはいつも、

$$\mathrm{image}\,(V E_1(\Omega_1)) \perp \mathrm{image}\,(E_2(\Omega_2))\text{.」}$$

　この性質をもつ射 V がどのような性質をみたすのか、確認しておきましょう。Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1$ のベクトル ξ_1 が与えられると次の式で $\mathbb{R}^d$ 上の Borel 測度が与えられます：

$$\underset{\text{Borel}}{\mathbb{R}^d \supset \Omega} \longmapsto \| E_1(\Omega)\xi_1 \|^2 .$$

もし、$\xi_1 \in \mathrm{image}(E_1(\Omega_1))$ ならば、

$$\|E_1(\Omega)\xi_1\|^2 = \|E_1(\Omega \cap \Omega_1)\xi_1\|^2$$

ですから、ξ_1 と E_1 が定める測度は Ω_1 上の測度です。逆に上の等式が成立するならば、$\Omega = \mathbb{R}^d$ とすることで、$\xi_1 \in \mathrm{image}(E_1(\Omega_1))$ が導かれます。

続いて、$\mathcal{H}_2$ のベクトル $V\xi_1$ と E_2 がどのような測度を定めるのか、みてみましょう。ベクトル ξ_1 が $\mathrm{image}\, E_1(\Omega_1)$ の元なので、$V\xi_1$ は $\mathrm{image}(V E_1(\Omega_1))$ の元です。Borel 部分集合 $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ と Ω_1 の距離が R より大ならば、$V\xi_1$ が定める測度が Ω_2 でとる値は、$\mathrm{image}(V E_1(\Omega_1)) \perp \mathrm{image}(E_2(\Omega_2))$ より

$$\begin{aligned} &\|E_2(\Omega_2) V\xi_1\|^2 \\ &= \langle V\xi_1, E_2(\Omega_2) V\xi_1 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

と導かれます。つまり $V\xi_1$ が定める測度の台は ξ_1 が定める測度の台と異なるかもしれないが、距離 R より大きくは動かないのです。

この性質をみたす射 V は、実は、研究を進めていく観点からすると、少々、条件が厳しすぎます。よってそれよりも弱い条件をみたす射 V について考えていきたいとおもいます。そのために、$\mathbb{R}^d$ の双対の Unitary 表現 v_1, v_2 を用います：

$$V_j(k) := \int_{x\in\mathbb{R}^d} e^{-i\langle k,x\rangle} E_j(dx), \; k\in\mathbb{R}^d.$$

定義の前に、$V_2(k)VV_1(-k)$ が $\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}_2$ への有界作用素であること、および、有界作用素の全体 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1\longrightarrow\mathcal{H}_2)$ が Banach 空間であることに留意しましょう。$\mathcal{B}(\mathcal{H}_1\longrightarrow\mathcal{H}_2)$ に値をとる関数について、連続性、微分可能性を考えることが可能です。

定義

- 写像 $\mathbb{R}^d\ni k\longmapsto V_2(k)VV_1(-k)$ が $\mathbb{C}^d$ 内の $\mathbb{R}^d$-並進不変な領域に解析接続されるとき、V が解析的な射であるという。
- 写像 $\mathbb{R}^d\ni k\longmapsto V_2(k)VV_1(-k)$ が C^∞-級であるとき、V が滑らかな射であるという。 ┘

次のことを示すことが可能です:

補題

d 次元座標つき Hilbert 空間 $(\mathcal{H}_1, E_1)$ から $(\mathcal{H}_2, E_2)$ への射 V について、

- 有限伝搬ならば解析的である。
- 解析的ならば滑らかである。 ┘

後半は自明です。前半も少しがんばると示せます。有限伝搬であるという条件はわかりやすいのですが、扱いにくいです。解析的という条件は扱いやすく、非自明(と酒匂が思っている)な定理をいくつか、導きます。滑らかさは、実は、漸近的に

有限伝搬であることを含意しています。

§3 d次元量子ウォークの定義

QWの定義として以下のものを採用するのはいかがでしょうか。

定義

$(\mathcal{H}, E)$をd次元座標つきHilbert空間とする。$(U^t)_{t\in\mathbb{Z}}$を$\mathcal{H}$上$\mathbb{Z}$のUnitary表現とする。3つ組

$$(\mathcal{H}, (U^t)_{t\in\mathbb{Z}}, E)$$

をd次元QWと呼ぶ。

┘

$\mathbb{Z}$のUnitary表現のかわりに$\mathbb{R}$の強連続Unitary表現を考えたものを連続時間QWと呼びます。

さて、近年は非UnitaryなQWも研究されています。それを考えると、Unitary表現という条件は強すぎる条件かもしれません。どのように条件を弱めたらよいのかはこれからの研究課題です。

上の定義ではUとEの関係について何も言及していません。Eは何らかのd個の観測可能量の組で同時観測可能なもの、Uは何らかの力学系に対応させることができますが、Uが観測可能量の値を大きくかえてしまうのは不自然な気がします。そこでQW$(\mathcal{H}, (U^t)_{t\in\mathbb{Z}}, E)$のRegularityを次のように定めたいと思います。

定義

Unitary 作用素 $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ が d次元座標つき Hilbert 空間 $(\mathcal{H}, E)$ から $(\mathcal{H}, E)$ への射として、有限伝搬（解析的、滑らか）であるとき、QW $(\mathcal{H}, (U^t)_{t\in\mathbb{Z}}, E)$ が有限伝搬（解析的、滑らか）であるという。 」

さて、これまでに研究されてきたQWはここで定義されたQWにあてはまるのでしょうか。次の例でみてみましょう。

例

$S : l_2\mathbb{Z} \longrightarrow l_2\mathbb{Z}$ を正方向への bilateral shift とします。$\mathcal{H}$ を $l_2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{C}^2$ で定めます。$U : l_2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{C}^2 \longrightarrow l_2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{C}^2$ を

$$U = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

で定めます。ここで α, β は $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ をみたす複素定数です。射影測度 E は次のように定めます。

$$\begin{cases} \cdot\ \mathbb{R} \supset \Omega \overset{E}{\longmapsto} E(\Omega) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ \cdot\ E(\Omega) : l_2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{C}^2 \underset{\text{onto}}{\twoheadrightarrow} l_2(\mathbb{Z}\cap\Omega)\otimes\mathbb{C}^2 . \end{cases}$$

このように定めると

$$(\mathcal{H}, (U^t)_{t\in\mathbb{Z}}, E)$$

は1次元QWを与えます。Unitary 作用素 U は $\mathbb{Z}$ 上の位置をずらしますが、その距離は高々1です。よって、このQWは有限伝搬です。ここから解析性と滑らかさも導びかれます。 」

QWの研究では極限分布の存在や非存在、また存在する場合の極限分布の計算が、特に重要な研究対象と認識されています。私たちの3つ組を用いると分布の時間的変化は次のように記述できます。

QW $(\mathcal{H}, (U^t)_{t\in\mathbb{Z}}, E)$ の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の単位ベクトル ξ を一つ選んで初期ベクトルと呼びましょう。ベクトル ξ と E は初期分布

$$\mathbb{R}^d \underset{\text{Borel}}{\supset} \Omega \longmapsto \| E(\Omega)\xi \|^2 \in \mathbb{R}$$

を定めます。これは確率測度です。$\mathbb{R}^d$ 上の射影測度 E は同時観測可能な d 個の観測可能量のスペクトル分解とみることができますが、ξ に対応する同時確率分布が上の測度です。

Unitary 表現 $(U^t)_{t\in\mathbb{Z}}$ の作用によって、ξ も次のように時間発展します：

$$\xi,\ U\xi,\ U^2\xi,\ U^3\xi,\ \cdots\cdots \quad .$$

この一つ一つの単位ベクトルが、$\mathbb{R}^d$ の確率測度を与えます。QWの数々の先行研究から、確率分布が、t に比例して広がっていくことが判明しています。よって $\mathbb{R}^d$ の部分集合を時間 t で圧縮して得られる測度

$$\mu_t(\Omega) = \| E(t\Omega)\, U^t \xi \|^2$$

を考えることが自然です。

これまでのQW研究では具体的なQWについて、

その極限分布 $\lim_{t\to\infty} \mu_t$ の存在、非存在を調べることが多かったです。私たちが本研究で提示した一般的な枠組みで、何か定理を示すことは可能なのでしょうか。極限分布の存在を示すことは、原理的に不可能です。しかし、次を示すことは可能です。

<u>定理</u>

$(\mathcal{H}, (U^t)_{t\in\mathbb{Z}}, E)$ を滑らかな d 次元 QW とする。$\xi \in \mathcal{H}$ を任意の単位ベクトルとする。このとき、$\mathbb{R}^d$ の Compact 部分集合 K で

$$\lim_{t\to\infty} \mu_t(K) = 1$$

をみたすものが存在する。

┘

ここで $\xi \in \mathcal{H}$ を任意に選べるということに注目してみましょう。$\Omega \longmapsto \|E(\Omega)\xi\|^2$ で与えられる確率測度が有界である必要はありません。さらに言えば台が $\mathbb{R}^d$ 全体であってもかまいません。QW は滑らかでさえあれば、列

$$\xi,\ U\xi,\ U^2\xi,\ \cdots\cdots$$

が定める確率測度は漸近的に有限伝搬ですが、これは QW の微分可能性に由来するものであると言えそうです。ちなみに Compact 部分集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ の半径は U と非有界自己共役作用素

$$D_j = \int_{\mathbb{R}^d} x_j\, E(dx_1 \cdots\cdots dx_d)$$

の交換子の Norm

$$\max_{1\leq j\leq d}\|[U, D_j]\|$$

の一次式で上から抑えられます。

§4. 量子ウォークの圏

QW の定義を与えましたが、各 QW はこれまでのところ「点」であり、相互の関係性についてはまだ何も述べていません。例えば2つの QW が与えられたときに、

- 2つはどれくらい似ているのか、
- 片方はもう片方の部分 QW なのではないか、

といった問いを立てることができてもよいのではないでしょうか。このような関係性を QW 研究者の直感だけに頼るのではなく、数学的な定式化を与えてみたいと思います。

これはおそらく、各 QW を対象 (Object) とし、QW 相互の関係性を射 (Morphism, arrow) とする圏 (Category) を定義することによって実現するでしょう。

QW の Category を定義すると、例えば次の2つの目標が明確なものとなります.

① QW の分類：

Category が定まれば、同型射の定義が与えられます。「2つの QW が同型である」という文に明確な定義を与えることができるようになります。

② 連続時間QWによる実現可能性・不可能性

あとでより詳しく述べるように、QW $(\mathcal{H}, (U^t)_{t\in\mathbb{Z}}, E)$ が連続時間QW $(\mathcal{H}, (U^{(t)})_{t\in\mathbb{R}}, E)$ で実現できるとき、対象すなわちObject $(\mathcal{H}, (U^t)_{t\in\mathbb{Z}}, E)$ の上に1径数自己同型射の群が与えられることが、判明します。

つまりQWの圏を定式化すると、これまで問われてこなかった問いを問うことが可能になるのです。研究を進めていきますと、1次元解析的空間一様QWの圏はかなりその構造が解明できるとわかりました。より広いクラスのQWについても同種の結果を得たいと考えているところです。

少々話が長くなってしまいました。QW間の射の定義を与えましょう。

<u>定義</u>

V がQW $(\mathcal{H}_1, (U_1^t)_{t\in\mathbb{Z}}, E_1)$ からQW $(\mathcal{H}_2, (U_2^t)_{t\in\mathbb{Z}}, E_2)$ への射であるとは、V が $\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}_2$ への線形有界作用素で

$$VU_1 = U_2V$$

をみたすことを言う。射 V のRegularity（有限伝搬，解析性，滑らかさ）を座標 E_1, E_2 で定める。」

すなわち、Intertwinerを射とみなすことにしましょう。Intertwinerが2つ与えられると、その合成を考えることができますが、再びIntertwinerとなるので、それをもって射の合成とします。QWがHilbert空間 $\mathcal{H}_1$

に作用しているとき、$\mathcal{H}_1$上の恒等写像はQW上の恒等射を与えます。

2つのQW間に滑らかな同型射があるとき、2つのQWがSimilarであると言うことにしましょう。

<u>定義</u>

$(\mathcal{H}_1, (U_1^t)_{t\in\mathbb{Z}}, E_1)$と$(\mathcal{H}_2, (U_2^t)_{t\in\mathbb{Z}}, E_2)$をQWとします。次の条件をみたす線形有界作用素$V:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$が存在するとき、2つのQWがSimilarであるという:

- $VU_1 = U_2 V$,
- Vは可逆,
- $\mathbb{R}^d \ni k \longmapsto V_2(k)\,V\,V_1(-k) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2)$が$C^\infty$-級。

┘

次に列挙する事実は比較的容易に証明できます:

- 2つのQWがSimilarならば、2つのQWの間に滑らかでUnitaryであるようなIntertwiner(射)が存在する
- 1次元解析的空間一様QWをSimilarityで分類することは、解析的かつ可逆なIntertwiner(射)の存在によって分類することと同じである。
- 2つのQWがSimilarで片方のQWが極限分布をもてば、もう片方のQWも極限分布をもつ。

QWの分類に重点を置いて、解説しましたが、QW間の射を考えることの利点はこれにとどまりません。

定義

「QW $(\mathcal{H}, (U^t)_{t\in\mathbb{Z}}, E)$ が滑らかな連続時間QW

$$(\mathcal{H}, (U^{(t)})_{t\in\mathbb{R}}, E)$$

で実現されるとは、$\mathbb{R}$ の強連続 Unitary 表現 $(U^{(t)})_{t\in\mathbb{R}}$ が存在して、

$\begin{cases} \circ\ U^{(1)} = U \text{ をみたし、} \\ \circ\ \text{すべての } t\in\mathbb{R} \text{ について、} U^{(t)} \text{ は滑らかであること。」} \end{cases}$

すべての $t\in\mathbb{R}$ について

$$UU^{(t)} = U^{(t+1)} = U^{(t)}U$$

が成り立ちますから、$U^{(t)}$ は QW $(\mathcal{H}, (U^t)_{t\in\mathbb{Z}}, E)$ 上の自己同型射を与えます。つまり、QW が連続時間QWで実現するならば、そのQWの上に一径数の自己同型射の群が与えられるのです。

この節では一つ一つのQWを別々にとらえるのではなく、Intertwiner を射 (Morphism, arrow) とする関係性で結びつけられていることを強調しました。QWの圏の構造が解明されれば、QWの分類が可能になるだけでなく、連続時間QWによる実現可能性の判定もできるようになります。

はたしてQWの圏の構造を解明することなどできるのだろうかとお考えの方もいらっしゃるかもしれません。一般のQWについては確かに難かしすぎる課題かもしれませんが、QWのあるクラスを指定すると、その部分圏については、比較的容易に解明することができる

かもしれません。例えば、1次元解析的空間一様QWの圏については、その構造が判明しました。研究を進めていきたいところですが、高次元化はおそらく可能、空間一様という条件はもしかしたら外せるかもしれないという感触です。しかし解析性は外せないのではないだろうかと考えています。Taylor展開の可能性や，Lauren展開といった離散的構造と解析性は同値ですが、この離散性が分類可能性と原理的に結びついているような気がします。

§5 空間一様量子ウォークの定義

ある力学系が空間一様であるとは、ざっくばらんに言えば、平行移動させてから作用させたものと、作用させてから平行移動させたものが一致することをいいます。それは次の定義の条件④で定式化されます。

定義

4つ組 $(\mathcal{H}, (U^t)_{t\in\mathbb{Z}}, E, \rho)$ が空間一様 d 次元QWであるとは次の5条件が成り立つこと：

① $(\mathcal{H}, (U^t)_{t\in\mathbb{Z}}, E)$ は d 次元QW，

② $\rho = (\rho(x))_{x\in\mathbb{Z}^d}$ は $\mathbb{Z}^d$ のUnitary表現，

③ 任意のBorel部分集合 $\mathbb{R}^d \supset \Omega$ について，

$$\rho(x)^{-1} E(\Omega) \rho(x) = E(\Omega + x),$$

④ すべての $x \in \mathbb{Z}^d$ について、$U\rho(x) = \rho(x) U$，

⑤ 自由度 $n = \dim \operatorname{image} E([0,1)^d)$ が有限。 ⌟

空間一様QWは以下に示すような、少々具体的なQWとSimilarです。

<u>定理</u>

d次元解析的空間一様QWはみな、空間一様QW

$$(l_2\mathbb{Z}^d \otimes \mathbb{C}^n, (U^t)_{t\in\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}^d\text{による}E, \mathbb{Z}^d\text{の正則表現})$$

とSimilar

」

解析的QWとSimilarなQWも解析的です。

空間一様QWの研究では逆Fourier変換が用いられます。私たちの新しい枠組みでどのように記述されるのかみてみましょう。Fourier変換

$$L^2\mathbb{T}^d \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow l_2\mathbb{Z}^d \otimes \mathbb{C}^n$$

を$\mathcal{F}$と書くことにしましょう。これを用いて上の定理にあるQWを変換します。Hilbert空間$l_2\mathbb{Z}^d\otimes\mathbb{C}^n$は$\mathcal{F}^{-1}$で$L^2\mathbb{T}^d\otimes\mathbb{C}^d$に変換され、Unitary作用素$U$は

$$\hat{U} = \mathcal{F}^{-1}U\mathcal{F}$$

に変換されます。$\mathbb{Z}^d$によって与えられる$l_2\mathbb{Z}^d\otimes\mathbb{C}^n$上の射影測度$E$は、$\mathbb{T}^d$上の微分作用素

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial k_1}, \cdots\cdots, \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial k_d}$$

の同時スペクトル分解$\hat{E}$に変換されます。$\mathbb{Z}^d$の右正則表現ρは$L^2\mathbb{T}^d\otimes\mathbb{C}^n$に作用する$\mathbb{Z}^d$の表現に変換されますが、これは$\mathbb{Z}^d$が与える$\mathbb{T}^d$上のCharacter

による掛け算表現に一致します。

一つ強調しておきたいことがあります。新たに4つ組 $\hat{U}$

$(L^2\mathbb{T}^d\otimes\mathbb{C}^n, (\hat{U}^t)_{t\in\mathbb{Z}}, \hat{E}, \mathbb{Z}^d$ の掛け算表現$)$

を得ますが、これも空間一様QWだということです。これまでのQW研究では、逆Fourier変換は研究の途中にあらわれるものであって、QWであるとは思われていなかったのではないかと思います。私たちがここで準備した枠組みでは、逆Fourier変換 $\hat{U}$ も立派なQWということになります。

Unitary作用素 $\hat{U}$ は $\mathcal{B}(L^2\mathbb{T}^d)$ の元を n 行 n 列に並べた行列とみることができますが、

- U が空間一様ならば、$\hat{U}$ の各成分は $L^\infty\mathbb{T}^d$ の元による掛け算作用素でさらに、
- U が滑らかならば、$\hat{U}$ の各成分は $\mathbb{T}^d$ 上の C^∞-級関数による掛け算作用素、
- U が解析的ならば $\hat{U}$ の各成分は $\mathbb{T}^d$ 上の解析関数による掛け算作用素

です。この逆Fourier変換を用いると次の定理を示すことが可能です。

<u>定理</u>

d 次元解析的空間一様QWは極限分布をもつ。 」

ここで証明することはできませんが、その要点について説明させて下さい。

まず問題を1次元の場合に帰着します。解析的QW

は漸近的に有限伝搬であることを踏まえると、確率分布の特性関数(Fourier変換)が収束することを示せば十分だとわかります。Fourier変換の収束をいうには、実はd次元の空間$\mathbb{T}^d$を「直線」に射影して議論してよいのです。これが1次元の場合に帰着される理由です。

　続いて、1次元解析的空間一様QW Uが極限分布をもつことを示す必要があります。Uの逆Fourier変換$\hat{U}$は解析的な写像

$$\hat{U} : \mathbb{T}^1 \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$$

を与えます。$\hat{U}$の像がUnitary行列であることを踏まえて次を示すことができます。

<u>命題</u>

「$\hat{U}$をUnitary行列を像とする解析的写像

$$\hat{U} : \mathbb{T}^1 \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$$

とする。$\mathbb{T}^1$内のすべての区間Iに対して、n個の解析関数

$$\lambda_j : I \longrightarrow \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

とn個の解析的写像

$$w_j : I \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad 1 \leq j \leq n$$

が存在して次をみたす：すべての$k \in I$について、$\{w_1(k), \cdots, w_n(k)\}$は$\mathbb{C}^n$の完全正規直交系で、さらにすべての$j$について、$\hat{U}(k)w_j(k) = \lambda_j(k)w_j(k)$。」

つまり、固有ベクトルから成る完全正規直交系の切断(Section)がとれるのです。一つ用語を定義します。

定義

上の命題にある解析関数 $\lambda_j : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{T}$ を1次元解析的空間一様QWUの固有値関数と呼ぶ。」

ささいなことを気にしないで解説すると、QWの逆Fourier変換 $\hat{U}$ は固有値関数 λ_j による掛け算作用素なのです。元のQWUの極限分布は、射影測度Eが与える位置の極限分布です。位置という観測可能量の逆Fourier変換は $\mathbb{T}^1$ 上の微分作用素 $\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{d}{dk}$ です。

逆Fourier変換して得られるQW $\hat{U}$ の「$\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{d}{dk}$ についての極限分布」を考えることになるのですが、これはすなわち、固有値関数 $\lambda_j \in \mathbb{T} \subset \mathbb{C}$ の偏角の微分

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{d}{dk}(\log \lambda_j) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\lambda_j'(k)}{\lambda_j(k)}$$

によって与えられることが、判明します。

以上が極限分布の存在定理の概要です。なぜここまで紙面を割いているのかといいますと、先行研究に誤りがあるためです。よく引用されているある論文では、固有値関数 λ_j が一価関数であるとの思いこみがみうけられます。それ以前に固有値関数 λ_j の存在を自明視しています。彼らの論文の最大の問題点は彼らが何をQWと呼んでいるのか明示されていません。ですから「酒句のいうように固有値関数が多価関数である例」

が作れるのかもしれないが、私たちはそれをQWと呼ばない」という、逃げ口上が可能になっているのです。

§6 1次元解析的空間一様量子ウォークの分類

上の命題によって、1次元解析的空間一様QWを分類することが可能です。分類のために圏と関手を用意しましょう。

定義 (2つの圏)

- $\mathcal{QW}^1$: 1次元解析的空間一様QW全体と滑らかな非零射.
- $\mathcal{A}(\mathbb{T}^1)$: $\mathbb{T}^1$ を定義域とし、絶対値1の複素数を値とする多価解析関数全体の圏. (n 個の一価解析関数も n 価の解析関数とみなす)。定義域の回転による関数の平行移動を射と定める。 」

$\mathcal{A}(\mathbb{T}^1)$ によって $\mathcal{QW}^1$ の対象 (Objects) を分類することが可能です。そのために2つ関手を定めます。

定義 ($\mathcal{E}\mathcal{V} : \mathcal{QW}^1 \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{T}^1)$)

1次元解析的空間一様QW U に U の固有値関数を対応させる。 」

QW間にIntertwinerがあると、固有値関数間の平行移動が与えられます。これが $\mathcal{E}\mathcal{V}$ による射の対応です。

定義 (モデルQW $\mathcal{MQ} : \mathcal{A}(\mathbb{T}^1) \longrightarrow \mathcal{QW}^1$ の概要)

λ が $\mathbb{T}^1$ 上の n 個の一価解析関数 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ のときはそのモデルQW $\mathcal{MQ}(\lambda)$ を掛け算作用素 $M[\lambda_j] \in \mathcal{B}(L^2\mathbb{T}^1)$ の直和

$$M[\lambda_1] \oplus \cdots \oplus M[\lambda_n] \in \mathcal{B}(L^2\mathbb{T}^1 \otimes \mathbb{C}^n)$$

で定める。多価関数のときには一区夫して定義する。」

関手 $\mathcal{EV}$ は私たちが「分類」と呼ぶもの、そのものであることが次で示されます。

<u>定理</u>

- $\mathcal{EV} \circ \mathcal{MQ} : \mathcal{A}(\mathbb{T}^1) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{T}^1)$ は恒等関手。
- すべての1次元解析的空間一様QW Uについて、$\mathcal{MQ} \circ \mathcal{EV}(U)$ と U は Similar.」

この定理から2つのQW $U_1, U_2 \in \mathcal{QW}^1$ について、以下の2条件が同値であることが導かれます。

- U_1とU_2が Similar
- $\mathcal{EV}(U_1)$ と $\mathcal{EV}(U_2)$、つまり固有値関数が、定義域の平行移動で互いにうつりあう。

さて、連続時間QWによる実現可能性はある種の一径数同己同型射の存在にいいかえられる訳ですが、上の定理は圏 $\mathcal{QW}^1$ の構造を解明しているので、この点についても何か結果が得られそうです。

<u>系</u>

1次元解析的空間一様QW Uが連続時間QWで実現されるための必要十分条件は、固有値関数 $\mathcal{EV}(U)$の全ての連結成分の回転数が0であることである。」

この系をもって本稿を閉じたいと思います。