二次元シュレーディンガー作用素の波動作用素の L^p-有界性

谷島　賢二
学習院大学理学部

1 Introduction, Main theorem

$H_0 = -\Delta$, $D(H_0) = W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$ を $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ 上の自由シュレーディンガー作用素, $V(x)$ を $x \in \mathbb{R}^d$ の実可測関数, $\langle x \rangle = (1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}$ とする.

$$\text{ある } \gamma > 1/2 \text{ に対して } \langle x \rangle^\gamma |V(x)|^{1/2}(H_0+1)^{-\frac{1}{2}} \text{ が } L^2(\mathbb{R}^d) \text{ のコンパクト作用素} \tag{1.1}$$

であれば $D(Q) = H^1(\mathbb{R}^d)$ を定義域とする $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の二次形式 $Q(u) = \int |u(x)|^2 dx + (Vu, u)$ は下に有界な閉二次形式, 等式 $(Hu, v) = Q(u, v), \forall v \in D(Q)$ によって $L^2(\mathbb{R}^d)$ の自己共役作用素, すなわちシュレーディンガー作用素 $H = -\Delta + V$ が定義される ([21]). H のスペクトル $\sigma(H)$ は絶対連続な部分 $[0, \infty)$ と離散的な点スペクトルからなり ([2]); $L^2(\mathbb{R}^d)$ は H に関する絶対連続部分空間 $L^2_{ac}(\mathbb{R}^d)$ と H の固有関数からなる閉部分空間の直和である.

仮定 (1.1) のもとで次の強極限で定義される波動作用素 $W_\pm = W_\pm(H, H_0)$ が

$$W_\pm = \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0} \tag{1.2}$$

存在し完全: Image $W_\pm = L^2_{ac}(H)$ である ([2, 18]). $W_\pm$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ の等距離作用素, $W_\pm W_\pm^* = P_{ac}(H)$ は $L^2_{ac}(H)$ への直交射影である. 従って, 任意の $\varphi \in L^2_{ac}(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$i\partial_t u(t) = Hu(t), \quad u(0) = \varphi \tag{1.3}$$

の解 $e^{-itH}\varphi$ は $t \to \pm\infty$ において自由解 $e^{-itH_0}\varphi_\pm$ に $L^2(\mathbb{R}^d)$ で漸近し:

$$e^{-itH_0}\varphi_- \quad \xleftarrow{t \to -\infty} \quad e^{-itH}\varphi \quad \xrightarrow{t \to -\infty} \quad e^{-itH_0}\varphi_+, \quad W_+\varphi_+ = W_-\varphi_- = \varphi \in \mathcal{H}_{ac}(H)\,.$$

φ が $\mathcal{H}_{ac}(H)$ 全体にわたるとき φ_+, φ_- の全体はそれぞれ $L^2(\mathbb{R}^d)$ を埋め尽くす．ユニタリ作用素 $S = W_+^* W_- : \varphi_- \to \varphi_+$ は散乱作用素と呼ばれる．

波動作用素 $W_\pm$ は intertwining property を満たす: 任意のボレル関数 $f(\lambda)$ に対して

$$f(H)P_{ac}(H) = W_\pm f(H_0) W_\pm^* \tag{1.4}$$

である．従って, $W_\pm$ が適当な性質を持てば, $f(H)P_{ac}(H)$ の様々な性質が $f(H_0)$ の対応する性質から導かれる．例えば $I \subset [1, \infty]$ が区間の時, 任意の $p \in I$ に対して $W_\pm$ が L^p-有界なら, 任意の対 $\{p, q\} \in I \times I^*$, $I^* = \{p/p-1, p \in I\}$ に対して

$$\|f(H)P_{ac}(H)\|_{\mathbf{B}(L^q, L^p)} \le C \|f(H_0)\|_{\mathbf{B}(L^q, L^p)}, \tag{1.5}$$
$$\|f(H_0)\|_{\mathbf{B}(L^p, L^q)} \le C^{-1} \|f(H)P_{ac}(H)\|_{\mathbf{B}(L^p, L^q)} \tag{1.6}$$

が f によらない定数 $C = C_{p,q}$ によって成立する．ただし $\mathbf{B}(X, Y)$ はバナッハ空間 X から Y への有界作用素のなすバナッハ空間, $\mathbf{B}(X) = \mathbf{B}(X, X)$ である．$f(H)$ は抽象的に

$$f(H) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) E_H(d\lambda) \quad （E_H(d\lambda) \text{ は } H \text{ のスペクトル測度}）$$

と定義された作用素であるが, $f(H_0)$ は Fourier multiplier, あるいは合成積

$$f(H_0)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} f(\xi^2) \hat{u}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} F(x-y) u(y) dy,$$
$$F(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} f(\xi^2) d\xi$$

であるから, $f(H)$ より遙かに取り扱いが容易で, (1.5),(1.6) のような評価は極めて有効である (例えば Schlag による review [23] を参照)．このため $W_\pm$ が $L^p(\mathbb{R}^d)$-有界であるか否かはこれまでに多くの著者によって研究されて, 様々な結果が得られている．以下に, いくつかの結果を述べよう．

1.1 Known results

簡単のためこの節では $V(x)$ は次を満たし, 詳細な仮定には頓着しないことにする:

十分に大きな $\sigma > 2$ に対して $|V(x)| \le C\langle x \rangle^{-\sigma}$ を満たす

■次の術語, 約束事を用いる ．

- 関数 $m(x)$ によるかけ算作用素 M_m をしばしば単に m と書く．

- $\mathbb{C}^+ = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \Im\lambda > 0\}$ は上半平面, $\overline{\mathbb{C}}^+ = \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$ はその閉包.
- $\lambda \in \mathbb{C}^+$ に対して $G_0(\lambda) = (H_0 - \lambda^2)^{-1}$. $G_0(\lambda)u(x) = (\mathcal{G}_\lambda * u)(x)$ で

$$\mathcal{G}_\lambda(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{ix\xi}d\xi}{\xi^2 - \lambda^2}. \tag{1.7}$$

$\mathcal{G}_\lambda(x)$ は d が奇数なら, 例えば $d = 1$ の時 $ie^{i\lambda|x|}/(2\lambda)$, $d = 3$ の時 $e^{i\lambda|x|}/(4\pi|x|)$ のように初等関数で書けるが, d が偶数だと複雑で, 例えば $d = 2$ の時には

$$\mathcal{G}_\lambda(x) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(\lambda|x|)\,, \quad （H_0^{(1)}(z) \text{ は第1種ハンケル関数}）. \tag{1.8}$$

- $\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} u(x)v(x)dx$ は複素共役なし.
- $U(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \ V(x) \geq 0, \\ -1 & \text{if } \ V(x) < 0, \end{cases} \qquad v(x) = |V(x)|^{1/2}, \quad w(x) = U(x)v(x)\,.$

$vG_0(\lambda)v$ は $\lambda \in \mathbb{C}^+$ の $\mathbf{B}(L^2)$-値正則関数; 極限吸収原理 (例えば [2, 18]) によって　閉上半面 $\overline{\mathbb{C}}^+$（$d \geq 3$）あるいは $\overline{\mathbb{C}}^+ \setminus \{0\}$（$d = 1, 2$）に連続拡張される.

$$M(\lambda) \overset{\text{def}}{=} U + vG_0(\lambda)v, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}^+ \setminus \{0\} \tag{1.9}$$

は λ^2 が H の固有値でなければ $L^2(\mathbb{R}^d)$ において可逆, 正の固有値の不存在定理 ([16, 17]) によって $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ の時, $M(\lambda)^{-1} \in \mathbf{B}(L^2(\mathbb{R}^d))$ が存在し, $\lambda \neq 0$ の連続関数である.

■レゾナンス

定義 1. $d \geq 3$ の時, $M(0)^{-1} \in \mathbf{B}(L^2)$ が存在すれば H は零において正則である, 存在しなければ特異であると言う. $1/2 < \gamma < \sigma - 1/2$ に対して $\mathcal{N} \overset{\text{def}}{=} \{u \in \langle x\rangle^\gamma L^2(\mathbb{R}^d)\colon (-\Delta + V(x))u(x) = 0\} \neq \{0\}$ と定義する.

命題 2. $d \geq 3$ とする.

(1) H が零で特異 $\overset{\text{(iff)}}{\Longleftrightarrow}$ ある $1/2 < \gamma < \sigma - 1/2$ に対して $\mathcal{N} \neq \{0\}$.
(2) $u \in \mathcal{N}$ は $|x| \to \infty$ において $u(x) = O(|x|^{2-d})$ を満たし, $\mathcal{N}$ は γ に依らない.
(3) $d \geq 5$ の時, $u \in \mathcal{N}$ は H の固有値 0 の固有関数.
(4) $j = 0, 1, \ldots$ に対して $\langle x^\alpha V, u\rangle = 0$（$|\alpha| \leq j$）を満たす $u \in \mathcal{N}$ は $u(x) = O(|x|^{1-d-j})$ を満たし H の固有値 0 の固有関数である.

$u \in \mathcal{N} \setminus L^2(\mathbb{R}^d)$ は H の**閾値レゾナンス**と呼ばれる.

定義 3. $d = 1, 2$ の時, $\mathcal{N}_\infty = \{u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)\colon (-\Delta + V(x))u(x) = 0\}$ と定義する.

(1) $\mathcal{N}_\infty = \{0\}$ のとき H は零において正則, $\mathcal{N}_\infty \neq \{0\}$ のとき特異であるという.

$d=2$ の時, $u \in \mathcal{N}_\infty$ は定数 c, b_1, b_2 とある $\varepsilon > 0$ に対して次を満たす：

$$u(x) = c + \frac{b_1 x_1 + b_2 x_2}{|x|^2} + O(|x|^{-1-\varepsilon}), \quad (|x| \to \infty). \tag{1.10}$$

(2) $u \in \mathcal{N}_\infty \setminus \{0\}$ は $c \neq 0$ の時 **s 波レゾナンス**, $c = 0$, $(b_1, b_2) \neq (0,0)$ の時 **p 波レゾナンス**と言われる. $c = b_1 = b_2 = 0$ なら $u \in \mathcal{N}$ は H の固有値 0 の固有関数.

■既知の結果　$d=1$ では, 問題は殆ど完全に解決されている.

定理 4. $d=1$ の時, $W_\pm$ は $1<p<\infty$ に対して $L^p(\mathbb{R}^1)$ の有界作用素, $p=1,\infty$ の時は一般には非有界 ([27, 10, 6]). 散乱行列が $S(0) = S_\infty = 1$ を満たす時には $p=1,\infty$ の時も L^p-有界 ([28]).

定理 5. H が 0 で正則とする.

(1) $d=2$ の時, $W_\pm$ は $1<p<\infty$ に対して $L^p(\mathbb{R}^2)$-有界である ([31, 14]). （しかし $p=1$, $p=\infty$ において $L^p(\mathbb{R}^2)$-有界か否か不明である.）

(2) $d \geq 3$ の時, $W_\pm$ は $1 \leq p \leq \infty$ に対して $L^p(\mathbb{R}^d)$-有界 ([29, 30, 3]).

Becianu-Schlag[3] は波動作用素の構造を論じて L^p 有界性以上の結果を含んでいる. H がゼロで特異でも $\mathbf{d=2,4}$ **を除けば**「ほぼ」完全に解決されている。

定理 6. H がゼロで特異とする.

(1) $d \geq 5$ の時. • $W_\pm$ は $1 \leq p < d/2$ の p に対して $L^p(\mathbb{R}^2)$-有界;
- $1 \leq p < d$ に対して $L^p(\mathbb{R}^2)$-有界である $\overset{\text{iff}}{\Leftrightarrow}$ $\forall u \in \mathcal{N}$, $\langle V, u \rangle = 0$;
- $1 \leq p < \infty$ に対して $L^p(\mathbb{R}^2)$-有界 $\overset{\text{iff}}{\Leftrightarrow}$ $\forall u \in \mathcal{N}, |\forall \alpha| \leq 1$, $\langle x^\alpha V, u \rangle = 0$;
- $\forall u \in \mathcal{N}, |\forall \alpha| \leq 2$, $\langle x^\alpha V, u \rangle = 0$ なら $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ でも有界

(2) $d=3$ の時. • $W_\pm$ は $1<p<3$ に対して $L^p(\mathbb{R}^3)$ 有界.
- $1 \leq p < 3$ に対して $L^p(\mathbb{R}^3)$-有界 $\overset{\text{iff}}{\Leftrightarrow}$ $\forall u \in \mathcal{N}$, $\langle V, u \rangle = 0$;
- $1 \leq p < \infty$ に対して $L^p(\mathbb{R}^3)$-有界 $\overset{\text{iff}}{\Leftrightarrow}$ $\forall u \in \mathcal{N}$, $|\alpha| \leq 1$, $\langle x^\alpha V, u \rangle = 0$;
- $1 \leq p \leq \infty$ に対して $L^\infty(\mathbb{R}^3)$-有界 $\overset{\text{iff}}{\Leftrightarrow}$ $\langle x^\alpha V, u \rangle = 0$, $|\alpha| \leq 2$ ([34]).

しかしながら $d=2,4$ においては次の部分的な結果が知られているのみである:

定理 7. H はゼロにおいて特異であるとする：

(1) $d=2$ とする．$\mathcal{N}_\infty$ がゼロ固有関数のみからなるか，あるいは s-波レゾナンスのみからなる時，$W_\pm$ は任意の $1<p<\infty$ に対して $L^p(\mathbb{R}^2)$-有界である ([7]).

(2) $d=4$ とする．$\forall u\in\mathcal{N}$, $\langle V,u\rangle=0$ なら $W_\pm$ は $1\le p\le 4$ に対して $L^p(\mathbb{R}^4)$-有界，$|\forall\alpha|\le 1$, $\langle x^\alpha V,u\rangle=0$ なら $1\le p<\infty$ に対して $L^p(\mathbb{R}^4)$-有界 ([11, 15]).

定理 7(2) では $\mathcal{N}$ は固有値のみからなると仮定されている．$d=4$ で零レゾナンスが存在するとき，L^p-有界性の問題は全く未解決である．

1.2 Main Theorem

この講演では定理 7 の $d=2$ の場合の未解決部分を埋めるが $p=1,\infty$ での有界性・非有界性の問題は未解決のまま残される．

定理 8. $\langle x\rangle^2 V\in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)$ かつ $\langle x\rangle^\gamma|V(x)|\in L^1(\mathbb{R}^2)$, $\exists\gamma>8$ とする．この時，
- $W_\pm$ が $L^p(\mathbb{R}^2)$-有界，$1<\forall p<\infty \overset{\text{iff}}{\Leftrightarrow} H$ に p 波レゾナンスが存在しない．
- p 波レゾナンスが存在 $\overset{\text{iff}}{\Leftrightarrow}$ $1<p\le 2$ に対して $W_\pm\in\mathbf{B}(L^p(\mathbb{R}^2))$, $2<p<\infty$ に対して $W_\pm\notin\mathbf{B}(L^p(\mathbb{R}^2))$.

定理 8 の類似が点相互作用をもつ 2 次元シュレーディンガー作用素に対して得られている ([4], [5], [35])．定理 8 の証明の主要なアイデアは [4] および [35] からの借用である．

2 証明のあらすじ

定理 7 の新しい証明も述べる．W_+ に対して証明する．複素共役 $\mathcal{C}u(x)=\overline{u(x)}$ によって $W_-=\mathcal{C}W_+\mathcal{C}^{-1}$ だからである．

2.1 More terminology

フーリエ変換ならびに逆フーリエ変換は

$$\hat{u}(\xi)=\mathcal{F}u(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-ix\xi}u(x)dx,\quad \check{u}(\xi)=(\mathcal{F}^{-1}u)(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}e^{ix\xi}u(x)dx;$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ は急減少関数の空間，$\mathcal{D}_*=\{u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)\mid \hat{u}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})\}$; $\mathcal{D}_*$ は $L^p(\mathbb{R}^2)$, $1\le p<\infty$ において稠密; $\|u\|_p=\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$; $\tau_y u(x)=u(x-y)$ は平行移動; $\lambda>0$ のボレル関数 $f(\lambda)$ に対して $f(|D|)$ は Fourier multiplier:

$$f(|D|)u(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}e^{ix\xi}f(|\xi|)\hat{u}(\xi)d\xi;$$

$|\lambda| \le 1/2$ の時, $\chi(\lambda) = 1$, $|\lambda| \ge 1$ の時 $\chi(\lambda) = 0$ を満たす関数 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を一つ取って固定する．この $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $a > 0$ に対して

$$\chi_{\le a}(\lambda) = \chi(\lambda/a), \quad \chi_{>a}(\lambda) = 1 - \chi_{\le a}(\lambda) \tag{2.1}$$

と定義し, $W_+ = W_+\chi_{>2a}(|D|) + W_+\chi_{\le 2a}(|D|)$ と W_+ を高エネルギー部分と低エネルギー部分に分解する．複素数 $z \in \mathbb{C}$ は実になることがあることを強調する時は λ と書く．

2.2 波動作用素の定常表現

証明には W_+ の定常表現を用いる (例えば [18] 参照):

$$W_+u(x) = u(x) - \Omega_+u(x), \tag{2.2}$$

$$\Omega_+u(x) = \int_0^\infty (G_0(-\lambda)vM(\lambda)^{-1}v\Pi(\lambda)u)(x)\lambda d\lambda\,. \tag{2.3}$$

ここで $\lambda > 0$ に対して $\Pi(\lambda)u(x)$ は $-\Delta$ のスペクトル測度で

$$\begin{aligned}\Pi(\lambda)u(x) &= (i\pi)^{-1}(G_0(\lambda) - G_0(-\lambda))u(x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1} e^{i\lambda\omega x}\hat{u}(\lambda\omega)d\omega \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1}(\mathcal{F}\tau_{-x}u)(\lambda\omega)d\omega\,.\end{aligned} \tag{2.4}$$

$\Pi(0)u(x)$ は (2.4) で $\lambda = 0$ とおいて定義する．こうすると $f \in C([0,\infty))$ に対して

$$f(\lambda)\Pi(\lambda)u = \Pi(\lambda)f(|D|)u, \quad \forall\lambda \ge 0\,. \tag{2.5}$$

(2.2), (2.2) から

$$\Omega_{\mathrm{high},2a}u = \int_0^\infty G_0(-\lambda)vM(\lambda)^{-1}v\Pi(\lambda)u\chi_{>2a}(\lambda)\lambda d\lambda\,, \tag{2.6}$$

$$\Omega_{\mathrm{low},2a}u = \int_0^\infty G_0(-\lambda)vM(\lambda)^{-1}v\Pi(\lambda)u\chi_{\le 2a}(\lambda)\lambda d\lambda \tag{2.7}$$

と定義すれば $W_+\chi_{>2a}(|D|) = \chi_{>2a}(|D|) + \Omega_{\mathrm{high},2a}$, $W_+\chi_{\le 2a}(|D|) = \chi_{\le 2a}(|D|) + \Omega_{\mathrm{low},2a}$. $\chi_{>2a}(|D|), \chi_{\le 2a}(|D|) \in \mathbf{B}(L^p)$, $1 \le \forall p \le \infty$ だから, $\Omega_{\mathrm{high},2a}$, $\Omega_{\mathrm{low},2a}$ を評価すれば十分である．

2.3 ハンケル関数と積分作用素 K

$\mathcal{H}(\lambda)=(i/4)H_0^{(1)}(\lambda)$ の級数展開ならびに積分表示 ([1],p.358, p. 360) はよく知られている:

$$\mathcal{H}(\lambda)=g(\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\Big(\frac{\lambda^2}{4}\Big)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\Big)\frac{(-1)^{k-1}(\frac{1}{4}\lambda^2)^k}{(k!)^2} \tag{2.8}$$

$$=\frac{e^{i\lambda}}{2^{\frac{3}{2}}\pi}\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}-i\lambda\right)^{-\frac{1}{2}}dt \tag{2.9}$$

ここで $z^{\frac{1}{2}}$ は $z>0$ のとき $z^{\frac{1}{2}}>0$ となる分枝; γ を Euler 定数, $\log z$ は主枝として

$$g(\lambda)=-\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{\lambda}{2}\right)+\frac{i}{4}-\frac{\gamma}{2\pi}\,. \tag{2.10}$$

級数展開 (2.8) から $\lambda|x|\to 0$ の時, 任意の $\delta>0$ に対して

$$\mathcal{G}_\lambda(x)=g(\lambda)+N_0(x)+O((\lambda|x|)^{2-\delta}),\quad N_0(x)=-\frac{1}{2\pi}\log|x|\,. \tag{2.11}$$

積分表示 (2.9) から $\lambda\geq 1$ の時, 位数 $-1/2$ のシンボル $\omega(\lambda)$ が存在して

$$\mathcal{H}(\lambda)=e^{i\lambda}\omega(\lambda),\quad \omega\in S^{-\frac{1}{2}}(|\lambda|>1). \tag{2.12}$$

従って, $|\mathcal{G}_\lambda(x)|\leq C\begin{cases}\langle\log\lambda|x|\rangle, & |\lambda|x||\leq 1,\\ \langle\lambda|x|\rangle^{-1/2}, & |\lambda|x||\geq 1\end{cases}$, これから得られる次の評価

$$\int_\alpha^\beta|\mathcal{G}_\lambda(x)|d\lambda\leq C_{\alpha,\beta}(|x|^{-\frac{1}{2}}+|x|^{-1}),\quad x\in\mathbb{R}^2 \tag{2.13}$$

は積分順序を変更するのににしばしば用いられる. 積分作用素

$$Ku(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\mathcal{G}_{-\lambda}(x)\lambda\left(\int_{\mathbb{S}^1}(\mathcal{F}u)(\lambda\omega)d\omega\right)d\lambda \tag{2.14}$$

は命題 11 の証明に重要な役割を果たす.

$$Ku(x)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{-1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{u(y)dy}{x^2-y^2-i\varepsilon} \tag{2.15}$$

とも表され, $Ku(x)$ は球対称関数, 任意の $1<p<\infty$ に対して $L^p(\mathbb{R}^2)$-有界である.

$$(\tau_yK\tau_{-z}u)(x)=\int_0^\infty\mathcal{G}_{-\lambda}(x-y)\Pi(\lambda)u(z)\lambda d\lambda \tag{2.16}$$

が成立する（(2.6), (2.7) と比較）.

2.4 積分評価

$L^2(\mathbb{R}^2)$ の Hilbert-Schmidt 作用素のなすヒルベルト空間を $\mathcal{H}_2$, $T \in L^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ を積分核にもつ積分作用素全体の空間を $\mathcal{L}_1$ と書く．$\mathcal{L}_1$ はノルム $\|T\|_{\mathcal{L}_1} = \|T\|_{L^1(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)}$ によってバナッハ空間である.

定義 9. (1) X が good operator $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $X \in \mathbf{B}(L^p(\mathbb{R}^2))$, $1 < \forall p < \infty$.

(2) $f \in C^2((0,\infty))$ が good multiplier $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $|f^{(j)}(\lambda)| \le C_j \lambda^{-j}$, $j = 0, 1, 2$. この時, $f(|D|)$ は good operator (Mikhlin の定理 [25]).

(3) $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ は good multipliers の空間. $\|f\|_{\mathcal{M},p} = \|f(|D|)\|_{\mathbf{B}(L^p)}$, $1 < p < \infty$.

(4) f が good multiplier for small $\lambda > 0$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\chi_{\le a}(\lambda)f(\lambda)$ は good multiplier ($\forall a > 0$).

(5) $k = 0, 1, \dots$, $h(\lambda) > 0$ とする.

(5.a) $\lambda \to 0$ の時 $T(\lambda) \in \mathcal{O}^{(k)}_{\mathcal{L}_1}(h)$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $T(\lambda, x, y)$ は λ に関して C^k 級（a.e. (x,y)），同時に $\mathcal{L}_1$-値 C^k 級関数で, $\|\partial_\lambda^j T(\lambda)\|_{\mathcal{L}_1} \le C|h(\lambda)|\lambda^{-j}$ $(0 \le j \le k, \lambda \to 0)$.

(5.b) $\lambda \to \infty$ の時, $T(\lambda) \in \mathcal{O}^{(k)}_{\mathcal{L}_1}(h)$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ (5.a) が $\lambda \to \infty$ として成立する.

(6) $T(\lambda) \in \mathcal{O}_2(h)$ $(\lambda \to 0$ or $\lambda \to \infty)$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ (5) が $k = 2$, $L^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$, $\mathcal{L}_1 \to \mathcal{H}_2$ と置き換えて成立.

$T(\lambda) \in \mathcal{O}_2(h)$, $v, w \in L^2(\mathbb{R}^2)$ なら $vT(\lambda)v \in \mathcal{O}^{(2)}_{\mathcal{L}_1}(h)$. $\mathcal{O}^{(k)}_{\mathcal{L}_1}(h)$ あるいは $\mathcal{O}_2(h)$ に属する作用素をしばしば $\mathcal{O}^{(k)}_{\mathcal{L}_1}(h)$ あるいは $\mathcal{O}_2(h)$ と書く.

定義 10. (2.3) において $vM(\lambda)^{-1}v$ を作用素 T あるいは作用素値関数 $T(\lambda)$ でおきかえて得られる作用素を $W(T)$, $\mathcal{W}(T(\lambda))$ と書く:

$$W(T)u(x) = \int_0^\infty (G_0(-\lambda)T\Pi(\lambda)u)(x)\lambda d\lambda,\ u \in \mathcal{D}_*\,, \tag{2.17}$$

$$\mathcal{W}(T(\lambda))u(x) = \int_0^\infty (G_0(-\lambda)T(\lambda)\Pi(\lambda)u)(x)\lambda d\lambda,\ u \in \mathcal{D}_*\,. \tag{2.18}$$

$W(T)$（あるいは $\mathcal{W}(T(\lambda))$）が good operator となるとき, T（あるいは $T(\lambda)$）は good producer であると言う．good producer for small $\lambda > 0$ (large λ）を同様に定義する.

次の補題は定理 8 の証明に重要である．(5), (6), (7) の証明は長い（[36] を参照）．1 次元作用素 $f \mapsto v(x)\int_{\mathbb{R}^2} w(y)f(y)dy$ を $v \otimes w$ あるいは $|v\rangle\langle w|$ と書く.

命題 11. $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $T \in \mathcal{L}_1$ とする．任意の $1 < p < \infty$ に対して

(1) $\|W(M_F)u\|_p \le C\|F\|_1\|u\|_p\,.$

(2) $\|\mathcal{W}(f(\lambda)M_F)u\|_p \le C\|f\|_{\mathcal{M},p}\|F\|_1\|u\|_p$.

(3) $\|W(T)u\|_p \le C\|T\|_{\mathcal{L}_1}\|u\|_p$.

(4) $\|\mathcal{W}(f(\lambda)T)u\|_p \le C\|f\|_{\mathcal{M},p}\|T\|_{\mathcal{L}_1}\|u\|_p$.

(5) $T(\lambda) \in \mathcal{O}^{(2)}_{\mathcal{L}_1}(\lambda^{1+\varepsilon})$ $(\lambda \to 0, \varepsilon > 0)$ なら $\forall a > 0$, $\chi_{\le 2a}(\lambda)T(\lambda)$ は good producer.

(6) $T(\lambda) \in \mathcal{O}^{(2)}_{\mathcal{L}_1}(\lambda^{-\varepsilon})$ $(\lambda \to \infty, \varepsilon > 0)$ なら $\forall a > 0$ $\chi_{>2a}(\lambda)T(\lambda)$ は good producer.

(7) $k \in \mathbb{N}$, $\varphi, \psi \in L^1(\mathbb{R}^2)$ に対して $I^{\psi,\varphi}_{k,a}(\lambda) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f(\lambda)\chi_{\le 2a}(\lambda)(\log\lambda)^k(\psi \otimes \varphi)$ とする. $\langle x\rangle\varphi \in L^1(\mathbb{R}^2)$ で $\int_{\mathbb{R}^2}\varphi dx = 0$, あるいは $\langle x\rangle\psi \in L^1(\mathbb{R}^2)$ で $\int_{\mathbb{R}^2}\psi dx = 0$ なら $I^{\psi,\varphi}_{k,a}(\lambda)$ は good producer で, それぞれの場合に次が成立する：

$$\|\mathcal{W}(I^{\psi,\varphi}_{k,a}(\lambda))u\|_p \le C_p\|f\|_{\mathcal{M},p}\|\langle x\rangle\varphi\|_1\|\psi\|_1\|u\|_p, \tag{2.19}$$

$$\|\mathcal{W}(I^{\psi,\varphi}_{k,a}(\lambda))u\|_p \le C_p\|f\|_{\mathcal{M},p}\|\varphi\|_1\|\langle x\rangle\psi\|_1\|u\|_p. \tag{2.20}$$

2.5 高エネルギー部分 $W_+\chi_{>2a}(|D|)$ の評価

定理 12. $\langle x\rangle^2 V \in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)$ とする. $\forall a > 0$, $W_+\chi_{>2a}(|D|) \in \mathbf{B}(L^p(\mathbb{R}^2))$, $1 < \forall p < \infty$.

証明. $(1 + vG_0(\lambda)w)^{-1}$ を展開して得られる

$$M(\lambda)^{-1} = \sum_{j=0}^{4}(-1)^j U(vG_0(\lambda)w)^j - U(vG_0(\lambda)w)^5(1 + vG_0(\lambda)w)^{-1}. \tag{2.21}$$

を (2.6) に代入して $\Omega_{\mathrm{high},2a} = \sum_{j=0}^{5}(-1)^j\Omega_{h,j}$ と分解する.

(A) $\Omega_{h,0}$ は命題 11 (1) によって L^p-有界.

(B) $\Omega_{h,1}$ の評価：$VG_0(\lambda)Vu(x)$ をかけ算と, multiplier と平行移動の積の重ね合わせとして

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(x)\mathcal{H}(\lambda|y|)V(x-y)u(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^2} M_{V^{(2)}_y}\mathcal{H}(|y|\lambda)(\tau_y u)(x)dy \tag{2.22}$$

と書く. $V^{(2)}_y(x) = V(x)V(x-y)$ である. (2.22) を (2.6) に代入すると

$$-\Omega_{h,1}u(x) = \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{G}_{-\lambda}(x-y)V^{(2)}_z(y)\mathcal{H}(\lambda|z|)(\Pi(\lambda)\tau_z u)(y)dzdy\right)\lambda\chi_{>2a}(\lambda)d\lambda.$$

最初に $d\lambda$ で積分して, (2.5) を用いて $\mathcal{H}(|y|\lambda)\Pi(\lambda) = \Pi(\lambda)\mathcal{H}(|y||D|)$ とすると

$$\begin{aligned}\Omega_{h,1}u(x) &= -\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_0^\infty (G_0(-\lambda)V_y^{(2)}\Pi(\lambda)\mathcal{H}(|y||D|)\chi_{>2a}(|D|)\tau_y u)(x)\lambda d\lambda\right)dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^2}(W(M_{V_y^{(2)}})\mathcal{H}(|y||D|)\chi_{>2a}(|D|)\tau_y u)(x)dy. \qquad (2.23)\end{aligned}$$

(2.12) によって, $\lambda > a$ の時 $\mathcal{H}(\lambda) = e^{i\lambda}\omega(\lambda)$, $\omega \in S^{-\frac{1}{2}}$. 従って, 斉次フーリエ積分作用素の理論 ([20, 26]) とハンケル関数の性質 (2.11) から

$$\|\mathcal{H}(|y||D|)\chi_{>2a}(|D|)\|_{\mathbf{B}(L^p(\mathbb{R}^2))} \le C_p(1 + |\log|y||). \qquad (2.24)$$

(2.24) を命題 11 (1) と合わせて (2.23) に適用すれば

$$\|\Omega_{h,1}\|_{\mathbf{B}(L^p)} \le C_p \int_{\mathbb{R}^2}|V(x)V(x-y)|(1+|\log|y||)dxdy < \infty.$$

(C) (2.22) に用いた議論を繰り返すと

$$vU(-vG_0(\lambda)w)^n v = (-1)^n \iint_{\mathbb{R}^{2n}} M_{V^{(n+1)}_{y_1,\dots,y_n}}\left(\prod_{j=1}^n \mathcal{H}(\lambda|y_j|)\right)\tau_{y_1+\cdots+y_n}\,dy_1\dots dy_n,$$

$V^{(n+1)}_{y_1,\dots,y_n}(x) = V(x)V(x-y_1)\cdots V(x-y_1-\cdots-y_n.)$. ふたたび (2.5) を用いて

$$\Omega_{h,n}u = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} W(M_{V^{(n+1)}_{y_1,\dots,y_n}})\chi_{>2a}(|D|)\prod_{j=1}^n \mathcal{H}(|y_j||D|)\tau_{y_1+\cdots+y_n}udy_1\dots dy_n.$$

これから, $\Omega_{h,n} \in \mathbf{B}(L^p)$ が得られるのは (B) と同様である. $\square$

(D) $\Omega_{h,5}$ **の評価** 古典的な積分評価を用いると $j = 0, 1, 2$ に対して

$$\|\partial_\lambda^j vG_0(\lambda)w\|_{\mathcal{H}_2} \le C\lambda^{-1/2} \quad (\lambda \to \infty),$$

すなわち $VG_0(\lambda)V \in \mathcal{O}^{(2)}_{\mathcal{L}_1}(\lambda^{-\frac{1}{2}})$ である. ゆえに, 命題 11 によって $\Omega_{h,5} \in \mathbf{B}(L^p)$. (A)–(D) を併せて定理 12 が得られる.

3 低エネルギー評価

低エネルギー部分 $\Omega_{\mathrm{low},2a}$ の評価が議論の主要部分である.

$$N_0u(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\log|x-y|u(y)dy\,,\quad G_1u(x) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2}|x-y|^2u(y)dy\,,$$
$$G_2u(x) = \frac{1}{8\pi}\int_{\mathbb{R}^2}|x-y|^2\log\left(\frac{e}{|x-y|}\right)u(y)dy\,.$$

射影作用素 P, Q と作用素 T_0 を次で定義する：

$$P = (v/\|v\|_2) \otimes (v/\|v\|_2), \quad Q = 1 - P, \quad T_0 = U + vN_0 v.$$

ハンケル関数の展開式 (2.8) から次が得られる ([8, 7]): $g_1(\lambda) \overset{\mathrm{def}}{=} g(\lambda)\|V\|_1$ である.

補題 13. (1) $\langle x\rangle^{\gamma} V \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $\gamma > 4$ の時.

$$M(\lambda) = g_1(\lambda)P + T_0 + M_0(\lambda), \quad M_0(\lambda) = \mathcal{O}_2(g(\lambda)\lambda^2) \quad (\lambda \to 0) \tag{3.1}$$

(2) $\langle x\rangle^{\sigma} V \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $\sigma > 8$ とすれば. ,

$$M_0(\lambda) = -g(\lambda)\lambda^2 vG_1 v - \lambda^2 vG_2 v + \mathcal{O}_2(\lambda^4\langle\log\lambda\rangle)\,, (\lambda \to 0) \tag{3.2}$$

3.1 ゼロにおける特異性の分類とレゾナンス

定義 14 ([13])**.** H が 0 で正則（特異） $\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ $QT_0Q|_{QL^2(\mathbb{R}^2)}$ が $QL^2(\mathbb{R}^2)$ で可逆（非可逆）. H が 0 で特異の時, S_1 は $QL^2(\mathbb{R}^2)$ における $\mathrm{Ker}_{\,\mathrm{QL^2(\mathbb{R}^2)}}\mathrm{QT_0Q}$ への射影.

(1) 0 での特異性が第 1 種 $\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ $T_1 \overset{\mathrm{def}}{=} S_1QT_0PT_0QS_1|_{S_1L^2}$ が正則.

(2) 0 での特異性が第 2 種 $\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ T_1 が非正則かつ $T_2 \overset{\mathrm{def}}{=} S_2(vG_1v)S_2|_{S_2L^2(\mathbb{R}^2)}$ が正則. ただし, S_2 は $S_1L^2(\mathbb{R}^2)$ における $\mathrm{Ker}\,\mathrm{T_1}$ への直交射影.

(3) 0 での特異性が第 3 種 $\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ T_2 が非正則. $\mathrm{Ker}\,\mathrm{T_2}|_{\mathrm{S_2L^2(\mathbb{R}^2)}}$ への射影を S_3 と書く.

補題 15. $\langle x\rangle^{1+\varepsilon} V \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $\varepsilon > 0$ とする.

- $\mathcal{N}_\infty \neq \{0\} \overset{\mathrm{iff}}{\Leftrightarrow} H$ は 0 で特異. この時, $S_1L^2(\mathbb{R}^2) = \{wu\colon u \in \mathcal{N}_\infty\}$; $\mathcal{N}_\infty \ni u \mapsto \zeta = wu \in S_1L^2(\mathbb{R}^2)$ は同型; 逆写像は $u = N_0 v\zeta - \|v\|^{-2}\langle PT_0S_1\zeta, v\rangle$.
- $u \in \mathcal{N}_\infty$ の時, $\langle V, u\rangle = 0$; $c = \|v\|_2^{-2}\langle PT_0S_1wu, v\rangle$ とおくと $|x| \to \infty$ で

$$u(x) = c + \sum_{j=1}^{2} \frac{x_j}{|x|^2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} y_j V(y)u(y)dy\right) + O(|x|^{-1-\varepsilon}). \tag{3.3}$$

(1) 0 で第 1 種特異 $\overset{\mathrm{iff}}{\Leftrightarrow}$ $u \in \mathcal{N}_\infty$ は s 波レゾナンス. この時, $\mathrm{rank}\,T_1 = \dim \mathcal{N}_\infty = 1$.

(2) 0 で第 *2* 種特異 $\overset{\mathrm{iff}}{\Leftrightarrow}$ $u \in \mathcal{N}_\infty$ は s *or* p 波レゾナンス. $1 \le \mathrm{rank}\,S_2 = \mathrm{rank}\,T_2 \le 2$.
- $\mathcal{N}_\infty$ は p 波レゾナンスのみからなる $\overset{\mathrm{iff}}{\Leftrightarrow}$ $T_1 = 0$.
- $T_1 \neq 0$ の時, $u \in \mathcal{N}_\infty$ が p 波（s 波） $\overset{\mathrm{iff}}{\Leftrightarrow}$ $wu \in S_2L^2(\mathbb{R}^2)$ $(wu \notin S_2L^2(\mathbb{R}^2))$.

(3) 0 で第 *3* 種特異 $\overset{\mathrm{iff}}{\Leftrightarrow}$ 0 は H の固有値. $u \in \mathcal{N}_\infty$ は $wu \in S_3L^2(\mathbb{R}^2)$ なら固有関数, $wu \in S_2L^2(\mathbb{R}^2) \setminus S_3L^2(\mathbb{R}^2)$ なら p 波, $wu \in S_1L^2(\mathbb{R}^2) \setminus S_2L^2(\mathbb{R}^2)$ なら s 波レゾナンス

3.2 Feshbach formula と Jensen-Nenciu の補題

$M(\lambda)^{-1}$ を $\lambda \to 0$ で調べる．道具は Feshbach formula と Jensen-Nenciu の補題.

補題 16 (Feshbach formula)**.** バナッハ空間の直和 $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2$ 上の作用素行列：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (a_{11},\, a_{22} \text{ は閉},\, a_{12},\, a_{21} \text{ は有界作用素}).$$

$\exists a_{22}^{-1} \in \mathbf{B}(\mathcal{Y}_2)$ とする．この時, $\exists A^{-1}\mathbf{B}(\mathcal{Y}) \overset{\text{iff}}{\Leftrightarrow} \exists d = (a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21})^{-1} \in \mathbf{B}(\mathcal{Y}_1)$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -da_{12}a_{22}^{-1} \\ -a_{22}^{-1}a_{21}d & a_{22}^{-1}a_{21}da_{12}a_{22}^{-1} + a_{22}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

補題 17 (Jensen-Nenciu)**.** A はヒルベルト空間 $\mathcal{X}$ の閉作用素, S は射影で $(A+S)^{-1} \in \mathbf{B}(\mathcal{X})$ が存在とする．この時, A が有界な逆をもつ $\overset{\text{iff}}{\Leftrightarrow}$ $B = S - S(A+S)^{-1}S$ が $S\mathcal{X}$ において有界な逆をもつ．この時,

$$A^{-1} = (A+S)^{-1} + (A+S)^{-1}SB^{-1}S(A+S)^{-1}. \tag{3.5}$$

3.3 ゼロで正則な場合

H は 0 で正則とする．この時, $Q(QT_0Q)^{-1}Q \in \mathcal{B} \overset{\text{def}}{=} \{M_m + T\colon m \in L^\infty(\mathbb{R}^2), T \in \mathcal{H}_2\}$ である ([22])．$g_1(\lambda) + T_0$ を $L^2(\mathbb{R}^2) = PL^2(\mathbb{R}^2) \oplus QL^2(\mathbb{R}^2)$ の作用素行列に書いて Feshbach formula を用いると, L を有限次元作用素, c_1 を定数として

$$(g_1(\lambda)P + T_0)^{-1} = h(\lambda)L + Q(QT_Q)^{-1}Q, \quad h(\lambda) = (g_1(\lambda) + c_1).$$

(3.1) から

$$M(\lambda) = (g_1(\lambda)P + T_0)^{-1}(1 + M_0(\lambda)(g_1(\lambda)P + T_0)^{-1})^{-1}. \tag{3.6}$$

第二項を展開すれば $M(\lambda)^{-1} = (g(\lambda) + c)^{-1}L + \mathcal{B} + \mathcal{O}_2(g\lambda^2)$ $(\lambda \to 0)$．これに命題 11 を用いて次の定理が得られる.

定理 18. $\langle x \rangle^\gamma V(x) \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $\gamma > 4$ とする．H が 0 で正則の時, W_+ は $L^p(\mathbb{R}^2)$-有界, $1 < p < \infty$ である.

定理 18 の上の証明は [31] のより格段に簡単である.

3.4 ゼロで特異な場合

H が 0 で特異な場合に $\lambda \to 0$ で $M(\lambda)^{-1}$ を調べるのに必要な等式を用意する.

定義 19. $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$ を $S_1 L^2(\mathbb{R}^2)$ の正規直交系とする. QS_1Q と S_1 を同一視し $S_1 = \zeta_1 \otimes \zeta_1 + \cdots + \zeta_n \otimes \zeta_n$ を $L^2(\mathbb{R}^2)$ の直交射影とも見なす.

S_1 の定義により, $(QT_0Q + S_1)|_{QL^2(\mathbb{R}^2)}$ は可逆, $D_0 \overset{\text{def}}{=} ((QT_0Q + S_1)|_{QL^2(\mathbb{R}^2)})^{-1} \in \mathcal{B}$ である ([22]). 補題 16 を $L^2(\mathbb{R}^2) = PL^2(\mathbb{R}^2) \oplus QL^2(\mathbb{R}^2)$ において用いて次が得られる.

補題 20. $g_1(\lambda)P + T_0 + S_1$ は $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上で可逆で, c_2 を定数として

$$N(\lambda) \overset{\text{def}}{=} (g_1(\lambda)P + T_0 + S_1)^{-1} = h_1(\lambda)L_1 + QD_0Q, \tag{3.7}$$
$$h_1(\lambda) = (g_1(\lambda) + c_2)^{-1} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2). \tag{3.8}$$

ただし L_1 は λ に依らない $\operatorname{rank} L_1 \le 2$ の作用素である.

命題 11 によって $vN(\lambda)v$ は good producer である. (3.1), (3.2) を (3.6) に様に書いて展開して次の補題が得られる：

補題 21. $\lambda > 0$ が十分小さい時, $M(\lambda) + S_1$ は可逆で

$$\mathcal{A}_0(\lambda) \overset{\text{def}}{=} (M(\lambda) + S_1)^{-1} = N(\lambda) + \mathcal{O}_2(g(\lambda)\lambda^2), \quad \lambda \to 0. \tag{3.9}$$

さらに $\langle x \rangle^\gamma V \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $\gamma > 8$ なら $\lambda \to 0$ の時,

$$\mathcal{A}_0(\lambda) = N(\lambda) + \lambda^2 g(\lambda) N(\lambda) \mathcal{R}_1(\lambda) N(\lambda) + \mathcal{O}_2(\lambda^4 g(\lambda)^2), \tag{3.10}$$
$$\mathcal{R}_1(\lambda) \overset{\text{def}}{=} v(G_1 + g(\lambda)^{-1} G_2)v. \tag{3.11}$$

(3.9) に命題 11 を用いれば, $v\mathcal{A}_0(\lambda)v$ は good producer for small $\lambda > 0$ である. 補題 17 を用いて $M(\lambda)^{-1}$ を調べるのに補題 21 を基礎にする. $S_1 L^2(\mathbb{R}^2)$ 上の作用素 $B_1(\lambda)$ を

$$B_1(\lambda) \overset{\text{def}}{=} S_1 - S_1 \mathcal{A}_0(\lambda) S_1, \quad T_1 = S_1 Q T_0 P T_0 Q S_1. \tag{3.12}$$

補題 22. $\lambda \to 0$ の時, $S_1 L^2(\mathbb{R}^2)$ 上で

$$B_1(\lambda) = -h_1(\lambda)(T_1 - \lambda^2 X(\lambda)), \quad X(\lambda) \in \mathcal{O}_2(g(\lambda)^2). \tag{3.13}$$

さらに $\langle x\rangle^\gamma V\in L^1(\mathbb{R}^2)$, $\gamma>8$ であれば, (3.13) の右辺の $X(\lambda)$ は次を満たす：

$$\begin{aligned}X(\lambda)=-S_1h_1(\lambda)^{-1}g(\lambda)\big(&\mathcal{R}_1(\lambda)+h_1(\lambda)(L_1\mathcal{R}_1(\lambda)+\mathcal{R}_1(\lambda)L_1)\\&+h_1(\lambda)^2L_1\mathcal{R}_1(\lambda)L_1+\mathcal{O}_2(g(\lambda)\lambda^2)\big)S_1.\end{aligned}\tag{3.14}$$

もし $S_1L^2(\mathbb{R}^2)$ 上で $B_1(\lambda)^{-1}$ が存在すれば補題 17 によって

$$M(\lambda)^{-1}=\mathcal{A}_0(\lambda)+\mathcal{A}_1(\lambda),\ \mathcal{A}_1(\lambda)\overset{\text{def}}{=}\mathcal{A}_0(\lambda)S_1B_1(\lambda)^{-1}S_1\mathcal{A}_0(\lambda).\tag{3.15}$$

3.5　第１種特異性の場合

次の定理 23 は Erdoğan, Goldberg and Green ([7]) によって得られているが, 以下の証明は [7] の証明より遙かに簡単である. $\zeta\in S_1L^2(\mathbb{R}^2)$ はモーメント条件

$$\int_{\mathbb{R}^2}v(x)\zeta(x)=0,\tag{3.16}$$

を満たすことを思い出しておく.

定理 23. $\langle x\rangle^\gamma V(x)\in L^1(\mathbb{R}^2)$, $\gamma>4$ とする. H の 0 での特異性が第１種であれば, W_+ は $L^p(\mathbb{R}^2)$-有界, $1<p<\infty$ である.

証明. この時, $\operatorname{rank}T=\operatorname{rank}S_1=1$ である. $T_1=c\zeta\otimes\zeta$ と書ける. (3.13) によって $S_1L^2(\mathbb{R}^2)$ 上で $B_1(\lambda)^{-1}$ が存在して $B_1(\lambda)^{-1}=-(g_1(\lambda)+c_2)(T_1-\lambda^2X(\lambda))^{-1}$. これと (3.7) などを (3.15) に代入すると, good producer for small $\lambda>0$ を modulo にして

$$vM(\lambda)^{-1}v\equiv-c_1\log\lambda(v\zeta\otimes\zeta v).$$

ζ はモーメント条件 (3.16) を満たすから命題 11(7) によって定理 23 が得られる. □

3.6　第 2 種特異性の場合

以下, $\langle x\rangle^\gamma V\in L^1(\mathbb{R}^2)$, $\gamma>8$ を仮定する. H がゼロにおいて第 2 種特異性をもつ場合, W_+ が $1<p\le 2$ では L^p-有界, $2<p<\infty$ では非有界となることの証明のあらすじを一部を割愛して述べよう.

この時, $1\le\operatorname{rank}T_2=\operatorname{rank}S_2\le 2$ であるが, $\operatorname{rank}S_2=2$ と仮定する. $\operatorname{rank}S_2=1$ の場合はより容易である. $S_2L^2(\mathbb{R}^2)$ の正規直交基底 $\{\zeta_1,\zeta_2\}$ を $T_2=S_2(vG_1v)S_2$ の固有

関数 $T_2\zeta_j = -\kappa_j^2\zeta_j$, $\kappa_j > 0$, $j = 1, 2$ として取る．$\varphi \in S_2L^2(\mathbb{R}^2)$ の時

$$(vG_1v\varphi, \varphi) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} |x-y|^2(v\varphi)(x)(v\overline{\varphi})(y)dy = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left|\int_{\mathbb{R}^2} x_jv\varphi(x)dx\right|^2 \tag{3.17}$$

で，これは rank の関係から零にはなれないことに注意．この時，$\tilde{\mathcal{R}}_1(\lambda) = S_2v(G_1 + g(\lambda)^{-1}G_2)vS_2|_{S_2L^2(\mathbb{R}^2)}$ の基底 $\{\zeta_1, \zeta_2\}$ に関する表現行列 $C(\xi) = (c_{jk}(\lambda))$ に対して

$$c_{jk}(\lambda) = -\kappa_j^2\delta_{jk} + \mathcal{O}_2(g(\lambda)^{-1}), \quad j, k = 1, 2.$$

が成立．$C(\lambda)^{-1} = (d_{jk}(\lambda))$ とすれば $d_{jk}(\lambda) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ である．T_1 が非正則な時，$(T_1 - \lambda^2X(\lambda))^{-1}$ の $\lambda \to 0$ における挙動を補題 17 を (3.14) を援用して解析する．すこし面倒な線形代数と次数計算ののちに（[36], 5.6.1 節参照），$\Omega_{\mathrm{low},2a}$ は L^p-有界作用素を modulo にして

$$-\sum_{j,k=1}^{2}\int_0^\infty g(\lambda)^{-1}\lambda^{-2}d_{jk}(\lambda)(G_0(-\lambda)v\zeta_j)(x)\langle\zeta_kv, \Pi(\lambda)u\rangle\lambda\chi_{\le 2a}(\lambda)d\lambda, \tag{3.18}$$

で与えられることが分かる．(3.18) の被積分関数は $\lambda = 0$ において強い特異性 $g(\lambda)^{-1}\lambda^{-2}$ をもつことに注意．(3.16) によって $\langle\zeta_kv, 1\rangle = 0$, $k = 1, 2$ が成立することに注意して (3.18) の $\Pi(\lambda)u(z)$ を

$$\Pi(\lambda)u(z) - \Pi(\lambda)u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1}(e^{i\lambda z\omega x} - 1)\hat{u}(\lambda\omega)d\omega$$

で置き換え，$e^{i\lambda z\omega x}$ を 2 次までテーラー展開して右辺を good part $\tilde{g}(\lambda, z)$ と bad part $\tilde{b}(\lambda, z)$ の和に分解する: $\Pi(\lambda)u(z) = \tilde{g}(\lambda, z) + \tilde{b}(\lambda, z)$,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\lambda, z) &= \frac{-\lambda^2}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1}\left(\int_0^1(1-\theta)(z\omega)^2e^{i\lambda z\omega\theta}d\theta\right)\hat{u}(\lambda\omega)d\omega \qquad (3.19)\\ &= \sum_{j,k=1}^{2} z_jz_k\lambda^2\int_0^1(1-\theta)\left(\frac{-1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1}\mathcal{F}(\tau_{-\theta z}R_jR_ku)(\lambda\omega)d\omega\right)d\theta.\end{aligned}$$

$$\tilde{b}(\lambda, z) = \frac{i\lambda}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1}(z\omega)\hat{u}(\lambda\omega)d\omega = \frac{i\lambda}{2\pi}\sum_{l=1}^{2} z_l\int_{\mathbb{S}^1}\mathcal{F}(R_lu)(\lambda\omega)d\omega. \tag{3.20}$$

ここで $R_ju(x) = \mathcal{F}^{-1}(\xi_j/|\xi|\hat{u})(x)$, $j = 1, 2$ は u の Riesz 変換である．(3.18) の $\Pi(\lambda)u(z)$ を $\tilde{g}(\lambda, z)$, $\tilde{b}(\lambda, z)$ でおきかえて得られる関数を $\tilde{\Omega}_{(g)}u(x)$, $\tilde{\Omega}_{(b)}u(x)$ とする．

(1) $\tilde{\Omega}_{(g)}u(x)$ は good operator である．これを見るには, まず特異性 λ^{-2} を $\tilde{g}(\lambda, z)$ の因子 λ^2 によって cancel し, $\mu_{jk}(\lambda)$=$\tilde{g}(\lambda)^{-1}d_{jk}(\lambda)\chi_{\leq 2a}(\lambda) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ とおいて $\tilde{\Omega}_{(g)}u(x)$ を

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Omega}_{(g)}^{(j,k)}u(x) = &\sum_{l,m=1}^{2}\int_0^1(1-\theta)d\theta\int_{\mathbb{R}^4}dydz\, v(y)\zeta_j(y)v(z)\zeta_k(z)z_l z_m \\
&\times\left\{\int_0^\infty \mu_{jk}(\lambda)\mathcal{G}_{-\lambda}(x-y)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1}\mathcal{F}(\tau_{-\theta z}R_l R_m u)(\lambda\omega)d\omega\right)\lambda d\lambda\right\}.
\end{aligned}
$$

の $j,k=1,2$ に関する和と書く．第 2 行は (2.5) と K の定義 (2.14) によって

$$
\begin{aligned}
&\left\|\tau_y\int_0^\infty \mathcal{G}_{-\lambda}(x)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1}\mathcal{F}(\mu_{jk}(|D|)\tau_{-\theta z}R_l R_m u)(\lambda\omega)d\omega\right)\lambda d\lambda\right\|_p \\
&\qquad = \|(\tau_y K\mu_{jk}(|D|)\tau_{-\theta z}R_l R_m u)(x)\|_p \leq C\|u\|_p, \quad 1<p<\infty \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

と評価される．ゆえにミンコウスキーの不等式によって $\|\tilde{\Omega}_{(g)}^{(j,k)}u\| \leq C\|v\zeta_j\|_1\|\langle z\rangle^2 v\zeta_k\|_1\|u\|_p \leq C\|u\|_p$. p-波レゾナンスに対しては $\langle x\rangle^2 v\zeta \in L^1(\mathbb{R}^2)$ だからである．
(2) $\tilde{b}(\lambda, z)$ は一次の項 λ しか含まないため $\tilde{\Omega}_{(b)}$ は $1<p\leq 2$ に対してしか $L^p(\mathbb{R}^2)$-有界にならず, $2<p<\infty$ に対しては $L^p(\mathbb{R}^2)$-非有界である．この $\tilde{\Omega}_{(b)}$ の $L^p(\mathbb{R}^2)$-有界性（$1<p\leq 2$）の証明は面倒で長く, ここにあらすじを書くスペースはない（[36], 5.6.3 節参照）．$\tilde{\Omega}_{(b)} \notin \mathbf{B}(L^p)$, $2<p<\infty$ を証明しよう．$\chi_{>4a}(|D|)\tilde{\Omega}_{(b)} \notin \mathbf{B}(L^p)$ を示せばよい. $\chi_{>4a}(|D|)$ は good operator だからである．$\chi_{>4a}(|D|)\tilde{\Omega}_{(b)}u(x)$ を

$$
-\sum_{j,k=1}^{2}\int_0^\infty \lambda^{-2}\mu_{jk}(\lambda)(\chi_{>4a}(|D|)\mathcal{G}_{-\lambda}*v\zeta_j)(x)\langle\zeta_k v, \tilde{b}(\lambda,z)u\rangle\lambda d\lambda \qquad (3.22)
$$

と書く．$\mu(\xi)=\chi_{>4a}(|\xi|)|\xi|^{-2}$ と定義する．Fourier 変換すれば直ちに

$$
\chi_{>4a}(|D|)\mathcal{G}_{-\lambda}(x) = (2\pi)^{-1}\hat{\mu}(x) + \lambda^2\mu(|D|)\mathcal{G}_{-\lambda}(x).
$$

右辺第 2 項 $\lambda^2\mu(|D|)\mathcal{G}_{-\lambda}(x)$ を (3.22) の $\chi_{>4a}(|D|)\mathcal{G}_{-\lambda}(x)$ に代入したものは λ^2 が λ^{-2} を cancel して good operator となる．$(2\pi)^{-1}\hat{\mu}(x)$ を代入した作用素を Z と書こう．Z が $L^p(\mathbb{R}^2)$-非有界, $2<p<\infty$ であることを示す．$(2\pi)^{-1}\hat{\mu}(x)$ が λ によらないことから $a_j(x)$=$(2\pi)^{-1}(\hat{\mu}*v\zeta_j)(x) \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $j=1,2$, $1<p<\infty$ と定義するとき

$$
Zu(x) = -\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\left(\sum_{k=1}^{2}\int_0^\infty \lambda^{-2}\mu_{jk}(\lambda)\langle\zeta_k v, \tilde{b}(z,\lambda)\rangle\lambda d\lambda\right). \qquad (3.23)
$$

$a_1, a_2 \in L^p(\mathbb{R}^2)$ は $a > 0$ が十分小さいとき線形独立である．この様に $a > 0$ を取る．(3.23) の $(\cdots)$ を $\ell_j(u)$ と書くと

$$Zu(x) = -\sum_{j=1}^{2} a_j(x)\ell_j(u)$$

Parseval の等式によって

$$\ell_j(u) = \frac{i}{2\pi}\sum_{k,l=1}^{2}\langle z_l v, \zeta_k\rangle \int_{\mathbb{R}^2} u(x)\mathcal{F}(\mu_{jk}(|\xi|)\xi_l|\xi|^{-2})(x)dx. \tag{3.24}$$

ゆえに Z が L^p 上有界なら, Hahn-Banach の定理によって ℓ_1, ℓ_2 は L^p 上の有界線形汎関数; Riesz の定理によって $1 < q = p/(p-1) < 2$ に対して

$$\sum_{k,l=1}^{2}\langle z_l v|\zeta_k\rangle\mathcal{F}(\mu_{jk}(|\xi|)\xi_l|\xi|^{-2}) \in L^q(\mathbb{R}^2), \quad j = 1, 2;$$

Hausdorff-Young の不等式によって

$$\sum_{k=1}^{2} d_{jk}(|\xi|)\sum_{l=1}^{2}\langle z_l v|\zeta_k\rangle\chi_{\leq 2a}(\xi)\xi_l g(|\xi|)^{-1}|\xi|^{-2} \in L^p(\mathbb{R}^2);$$

$C(|\xi|) = D(|\xi|)^{-1}$ は $|\xi| \leq 2a$ のとき有界だから,

$$\frac{\chi_{\leq 2a}(|\xi|)}{g(|\xi|)|\xi|^2}\begin{pmatrix}\langle z_1 v|\zeta_1\rangle\xi_1 + \langle z_1 v|\zeta_2\rangle\xi_2 \\ \langle z_2 v|\zeta_1\rangle\xi_1 + \langle z_2 v|\zeta_2\rangle\xi_2\end{pmatrix} \in L^p(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2);$$

ゆえに $\langle z_l v|\zeta_k\rangle = 0$, $1 \leq j, k \leq 2$ でなければならない．しかし, これは T_2 が正則であることに矛盾する ((3.17) 参照). $2 < p < \infty$ の時, $Z \notin \mathbf{B}(L^p)$ である．

3.7 第３種特異性の場合

この時, 必然的に $T_3 = S_3 G_2 S_3$ は正則で, Feshbach formula を用いると $S_2 L^2(\mathbb{R}^2)$ 上

$$(S_2\tilde{\mathcal{R}}_1 S_2)^{-1} = g(\lambda)S_3 T_3^{-1} S_3 + L_4(\lambda), \quad L_4(\lambda) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$$

$\zeta \in S_3 L^2(\mathbb{R}^2)$ は (3.16) とともに extra で次を満たす：

$$\int_{\mathbb{R}^2} x_1\zeta(x)v(x)dx = \int_{\mathbb{R}^2} x_2\zeta(x)v(x)dx = 0. \tag{3.25}$$

第３種の場合も $\Omega_{\mathrm{low},2a}$ は L^p 有界な作用素と (3.18) の和である．(3.18) の $(d_{jk}(\lambda))$ を $g(\lambda)S_3 T_3^{-1} S_3$ の表現行列でおきかえて得られる作用素は good operator である．この

時, $\zeta \in S_3L^2(\mathbb{R}^2)$ が (3.25) を満たすことから $\langle \zeta v, \Pi(\lambda)u\rangle = \langle \zeta v, \tilde{g}(\lambda,\cdot)\rangle$ が bad part なしで成立し, $\tilde{g}(\lambda,x)$ の因子 λ^2 が $\lambda^{-2}g(\lambda)^{-1}$ の λ^{-2} を cancel 残された $g(\lambda)^{-1}$ が $g(\lambda)S_3T_3^{-1}S_3$ の特異性 $g(\lambda)$ を cancel するからである．もし $S_3 = S_2$ なら（この時, p 波レゾナンスは不存在）, $L_4(\lambda) = 0$ で $\Omega_{\mathrm{low},2a} \in \mathbf{B}(L^p)$, $1 < p < \infty$ である．$S_2 \neq S_3$ なら, $L_4(\lambda) \neq 0$ であるが $L_4(\lambda)$ は 3.6 節の $\tilde{\mathcal{R}}_1(\lambda)^{-1}$ と同様な構造をもち, 3.6 節の議論を繰り返せば $L_4(\lambda)$ が生成する作用素は $1 < p \leq 2$ では L^p-有界, $2 < p < \infty$ では L^p-非有界であることが示される（詳しくは [36], 5.7 節参照）.

References

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, National Bureau of Standards Appl. Math. Series **55** (1964) U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.

[2] S. Agmon, *Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **2** (1975), 151–218.

[3] M. Becianu and W. Schlag, *Structure formulas for wave operators.* Amer. J. Math. **142** (2020), no. 3, 751-807.

[4] H. D. Cornean, A. Michelangeli and K. Yajima, *Two dimensional Schrödinger operators with point interactions, Threshold expansions and L^p-boundedness of wave operators*, Reviews in Math. Phys. **31**, No. 4 (2019) 1950012.

[5] ibid., *Errata: Two dimensional Schrödinger operators with point interactions, Threshold expansions and L^p-boundedness of wave operators*, Reviews in Math. Phys. **32**, no. 4 (2020) 2092001 (5 pages).

[6] P. D'Ancona and L. Fanelli, *L^p-boundedness of the wave operator for the one dimensional Schrödinger operator.* Comm. Math. Phys. **268** (2006), no. 2, 415-438.

[7] M. B. Erdoğan, M. Goldberg and W. R. Green, *On the L^p boundedness of wave operators for two-dimensional Schrödinger operators with threshold obstructions.* J. Funct. Anal. **274** (2018), 2139-2161.

[8] M. B. Erdoğan and W. R. Green, *Dispersive estimates for Schrödinger operators in dimension two with obstructions at zero energy.* Trans. Amer. Math. Soc. **365** (2013), 6403-6440.

[9] D. Finco and K. Yajima, *The L^p boundedness of wave operators for*

Schrödinger operators with threshold singularities. II. Even dimensional case. J. Math. Sci. Univ. Tokyo **13** (2006), no. 3, 277-346.

[10] A. Galtbayar and K. Yajima, *The L^p-continuity of wave operators for one dimensional Schrödinger operators.* J. Math. Sci. Univ. Tokyo **7** (2000), no. 2, 221-240.

[11] M. Goldberg and W. Green, *On the L^p-boundedness of wave operators for four-dimensional Schrödinger operators with a threshold eigenvalue*, Ann. H. Poincaré, **18** (2017), 1269-1288.

[12] ibid., *The L^p boundedness of wave operators for Schrödinger operators with threshold singularities.* Adv. Math. **303** (2016), 360-389.

[13] A. Jensen and G. Nenciu, *A unified approach to resolvent expansions at thresholds.* Reviews in Mathematical Physics, **13**, No. 6 (2001) 717-754.

[14] A. Jensen and K. Yajima, *A remal on the L^p-boundedness of wave operators for two dimensional Schrödinger operators.* Commun. Math. Phys. **225** (2002), no. 3, 633-637.

[15] A. Jensen and K. Yajima, *On L^p boundedness of wave operators for 4-dimensional Schrödinger operators with threshold singularities.* Proc. Lond. Math. Soc. (3) **96** (2008), no. 1, 136-162.

[16] T. Kato, Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient. Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), 403-425.

[17] H. Koch and D. Tataru, *Carleman estimates and absence of embedded eigenvalues.* Comm. Math. Phys. **267** (2006), no. 2, 419-449.

[18] S. T. Kuroda, *Introduction to Scattering Theory*, Lecture Notes, Matematisk Institut, Aarhus University (1978).

[19] M. Loss and E. Lieb, *Analysis.* Graduate Studies in Mathematics 14, AMS (199), Providence, RI USA.

[20] J. C. Peral, *L^p estimate for the wave equation.* J. Funct. Anal. **36**, 114–145 (1980).

[21] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics II, Fourier analysis, Selfadjointness.* Academic Press, New York (1975).

[22] W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrödinger operators in dimension two*, Comm. Math. Phys. **257** (2005), 87-117.

[23] ibid., *Dispersive estimates for Schrödinger operators: a survey.* Mathematical

aspects of nonlinear dispersive equations, 255-285, Ann. of Math. Stud., **163**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007.

[24] A. Seeger, C. D. Sogge and E. M. Stein, *Regularity properties of Fourier integral operators*, Ann. of Math. (2) **134**, 231-251 (1991).

[25] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and oscillatory Integrals* , Princeton U. Press, Princeton, N. J. (1993).

[26] T. Tao, *The weak-type* $(1,1)$ *of Fourier integral operators of order* $-(n-1)/2$, J. Aust. Math. Soc. **76** (2004), no. 1, 1-21 (2004).

[27] R. Weder, *The* $W^{k,p}$*-continuity of the Schrödinger wave operators on the line.* Comm. Math. Phys. **208** (1999), no. 2, 507-520.

[28] R. Weder, *The* L^p *boundedness of the wave operators for matrix Schrödinger equations* arXiv:1912.12793 (2021).

[29] K. Yajima, *The* $W^{k,p}$*-continuity of wave operators for Schrödinger operators.* J. Math. Soc. Japan **47** (1995), no. 3, 551-581.

[30] ibid., *The* $W^{k,p}$*-continuity of wave operators for Schrödinger operators. III. Even-dimensional cases* $m \geq 4$. J. Math. Sci. Univ. Tokyo **2** (1995), no. 2, 311-346.

[31] ibid., L^p *boundedness of wave operators for two dimensional Schrödinger operators.* Comm. Math. Phys. **208** (1999), no. 1, 125-152.

[32] ibid., *The* L^p *boundedness of wave operators for Schrödinger operators with threshold singularities. I. The odd dimensional case.* J. Math. Sci. Univ. Tokyo **13** (2006), no. 1, 43-93.

[33] ibid., *Remarks on* L^p*-boundedness of wave operators for Schrödinger operators with threshold singularities*, Doc. Math.,**21**, 391–443 (2016).

[34] ibid., L^1 *and* L^∞*-boundedness of wave operators for three dimensional Schrödinger operators with threshold singularities.* Tokyo J. Math. **41** (2018), no. 2, 385-406.

[35] ibid., L^p*-boundedness of wave operators for 2D Schrödinger operators with point interactions*, preprint. arXiv:2006.09636. (published in Annaes H. Poincarè)

[36] ibid., *The* L^p*-boundedness of wave operators for two dimensional Schrödinger operators with threshold singularities*, arxiv:2008.07906 (to be published in J. Math. Soc. Japan)