回転ベータ展開の不変測度とタルスキの問題

秋山 茂樹 (筑波大・数理物質系)

1 ベータ展開

ベータ展開は $[0,1)$ の自己写像

$$T(x) = \beta x - \lfloor \beta x \rfloor$$

の軌道により定義され、二進法、十進法等の自然な拡張を与える。

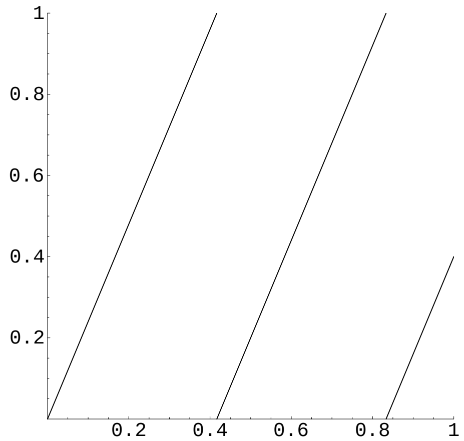


図 1: ベータ展開

ベータ展開は Renyi [15] が導入したもので、整数論とエルゴード理論の境界領域にあって今でも様々な研究が行われている。ベータ展開の基本的性質をまとめると

- Lebesgue 測度と同等な唯一の絶対連続不変測度（以下 ACIM) を持つ。
- 不変測度の密度関数は
$$\sum_{x<T^n(1)} \frac{1}{\beta^n}$$
と具体的に記述できる ([14])。ここで 1 の軌道は $1-\varepsilon$ の軌道を $\varepsilon \to +0$ としたもののこととする。

- ベータ展開に対応する記号力学系は詳しく調べられ、現在も様々な角度から研究が続いている。
- 周期軌道、純周期軌道の様子がよくわかる場合がある。

ベータ展開のエルゴード的性質を調べるには不連続点の軌道を調べる事が本質的に重要である。$T^n(1)$ と書いたら $1-\varepsilon$ の ε を正の無限小と考えた軌道とする。$c_i = \lfloor \beta T^{n-1}(1) \rfloor$ として記号列

$$d_\beta(1) = c_1 c_2 c_3 \ldots$$

を 1 の展開という。すると $c_i \in \mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, \lfloor \beta \rfloor\}$ であって

$$1 = \frac{c_1}{\beta} + \frac{c_2}{\beta^2} + \ldots$$

を満たす。さらに $T^n(1) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{n+i}\beta^{-i}$ となる。

2 対応する記号力学系

ベータ展開は実数に $\mathcal{A}$ 上の無限語を対応させる。このような無限語の有限部分語となる $\mathcal{A}^*$ の元を admissible という。$\mathcal{A}$ 上の両側無限語のなかでどの有限部分語も admissible なものの全体をベータシフトといって X_β とかく。X_β に対して右側シフト作用素 $s((a_i)) = (a_{i+1})$ が作用し、(X_β, s) は位相力学系となる。$\{T^n(1) |\ n = 1, 2, \ldots\}$ が有限集合のとき、X_β は sofic となる。もし β が Pisot 数ならば $d_\beta(1)$ は周期をもつので X_β は sofic となる [1]。さらに $d_\beta(1)$ が純周期的ならば対応する X_β は有限型となる。X_β の specification の特徴づけなど数論と力学系の間にある面白い問題がたくさん生じ、未解決問題が多い (Blanchard [5])。帰還時間や shrinking targets の問題も議論されている。 (J. Wu, B. Wang, Wuhan group). β が Pisot 数のときは純周期軌道の全体が、力学系の代数的自然拡大で完全に記述できる (c.f. Ito-Rao [8], Berthé-Siegel [4])。Ito-Sadahiro [9] は **負のベータ展開**:

$$T : x \mapsto -\beta x - \lfloor -\beta x + \beta/(1+\beta) \rfloor$$

を $[-\beta/(1+\beta), 1/(1+\beta))$ 上に定義した。

この場合も ACIM は唯一で、その密度関数は:

$$\sum_{x > T^n(-\beta/(1+\beta))} \frac{1}{(-\beta)^n}.$$

[1] Pisot 数とは 1 より大きい実代数的整数で、自分自身以外の共役の絶対値が 1 より小となるものである。

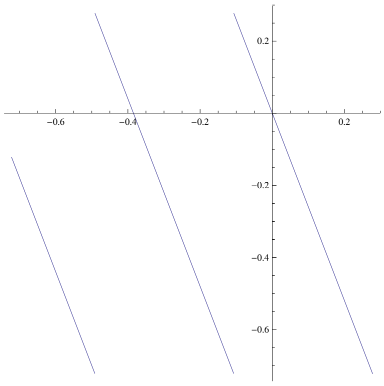


図 2: 負のベータ展開 $\beta = 2.6$

で与えられる。

この右辺は直感的にはあまり理解しにくい。Liao-Steiner [13] はこの ACIM が Lebesdgue 測度と同等になることと $\beta \geq (1+\sqrt{5})/2$ が同値であることを示した。対応する記号力学系の研究はほぼ平行に可能である。

3　回転ベータ展開

以下は筑波大博士後期課程を 2017 年 3 月に修了した Jonathan Caalim (Philippines 大 Diliman 校) との共同の仕事の紹介である。$1 < \beta \in \mathbb{R}$ と 直交群 $O(m, \mathbb{R})$ の元 M を固定する。$\mathcal{L}$ を $\mathbb{R}^m$ の格子、すなわち $\mathbb{R}$ 上一次独立な m 個のベクトルで生成される $\mathbb{Z}$ 加群とする。 $\mathcal{X}$ を $\mathcal{L}$ の一つの基本領域、すなわち $\mathbb{R}^m/\mathcal{L}$ の代表系となる連結部分集合とする。以下では一番簡単な平行多面体の基本領域を考える。このとき

$$\mathbb{R}^m = \bigcup_{d \in \mathcal{L}} (\mathcal{X} + d)$$

は $\mathbb{R}^m$ の disjoint union への分割となる。回転ベータ展開写像 $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ は $T(z) = \beta M(z) - d$ の形で定義される。ここで $d = d(z) \in \mathcal{L}$ は $\beta M(z) \in \mathcal{X} + d$ を満たす唯一の元である。

この T を反復することで $z \in \mathcal{X}$ の元は次のように展開される：

$$\begin{aligned} z &= \frac{M^{-1}(d_1)}{\beta} + \frac{M^{-1}(T(z))}{\beta} \\ &= \frac{M^{-1}(d_1)}{\beta} + \frac{M^{-2}(d_2)}{\beta^2} + \frac{M^{-2}(T^2(z))}{\beta^2} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M^{-i}(d_i)}{\beta^i} \end{aligned}$$

ここで $d_i = d(T^{i-1}(z))$ である．記号列への対応を明示するため $d_T(z) = d_1 d_2 ...$ と定義する。$d_T(z)$ を z の T による展開という。

$m = 2$, $\beta > 1$ とし M は特殊直交群 $SO(2, \mathbb{R})$ から選べばこのアルゴリズムは複素平面で自然に実現できる。ζ を絶対値 1 の複素数とし、$\xi, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}$ を $\eta_1/\eta_2 \notin \mathbb{R}$ に固定すると

$$\mathcal{X} = \{\xi + x\eta_1 + y\eta_2 \mid x \in [0, 1), y \in [0, 1)\}$$

は $\mathbb{C}$ の中の格子 $\mathcal{L} = \mathbb{Z}\eta_1 + \mathbb{Z}\eta_2$ の基本領域である。$T(z) = \beta\zeta z - d$ により

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{\beta^i \zeta^i} \in \mathbb{C}.$$

のように複素数が展開できる。ここで $d_i \in \mathcal{L}$ である。

4 研究の動機

次元を拡張するのであるから、以下のような自然な問題意識が生ずる。

- ACIM の様子は一次元とどれほど異なっているか。具体形がどの程度書き下せるか。
- 自然拡大や純周期軌道の研究などがどこまで拡張できるか。
- 記号力学系との対応関係はどのようになっているか。
- sofic な場合を特徴づけられれば自己相似タイリングの族の構成法を与える。

5 ACIM は一意的でない

Li-Yorke [12] により一次元のベータ展開では ACIM は一意である。すなわち、一次元ベータ展開の不連続点は本質的に一つしかないのでエルゴード的な ACIM は唯一となる。しかし二次元以上ではこの性質はなりたたない。

簡単な例として $\mathcal{L} = \mathbb{Z}^2$ の基本領域として $\mathcal{X} = [-1/2, 1/2)^2$ をとり M を単位行列とする。するとこの変換は

$$x \mapsto \beta x - \left\lfloor \beta x + \frac{1}{2} \right\rfloor \tag{1}$$

という一次元写像とそれ自身を直積した写像となる。

$$(x, y) \mapsto \left(\beta x - \left\lfloor \beta x + \frac{1}{2} \right\rfloor, \beta y - \left\lfloor \beta y + \frac{1}{2} \right\rfloor\right)$$

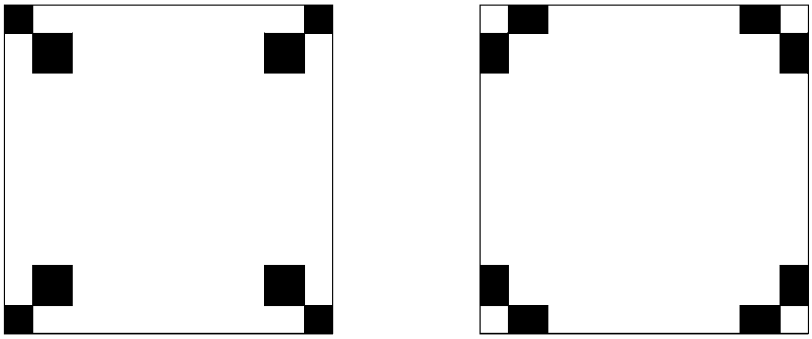


図 3: 異なる support

この写像の ACIM は $\beta \le \sqrt{2}$ のとき一意でない。図 3 は $\beta = \sqrt{2}$ の場合の二つの disjoint な ergodic ACIM の support である。これは一次元写像 (1) が弱混合的でなく固有値 -1 があるために生ずる。

もう少し複雑な例として $\zeta = \sqrt{-1}, \beta = 1.039, \eta_1 = 2.92, \eta_2 = \exp(\pi\sqrt{-1}/3)$ $\xi = 0$ とすると図 4, 5 のように二つの異なる support を持つ測度を見出すことができる。 同じ状況は β, η_1 が

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\beta + 1 + \frac{\sqrt{3}}{\beta} - \frac{\sqrt{3}}{2\beta^3} \le \eta_1 \le \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\beta} + \frac{\sqrt{3}}{2\beta^3}$$

を満たしているとき生ずる。このようなパラメータは図 6 のように連続無限に存在する。

ACIM を調べる最も強力な道具は、$\mathcal{X}$ で可積分な関数の空間に働くペロン・フロベニウス作用素 : $h \mapsto P(h)$:

$$P(h)(x) = \sum_{y \in T^{-1}(x)} \frac{h(y)}{\mathrm{Jac}(T, y)}$$

である。このような区分的拡大写像の場合は古典的で Keller, Gora-Boyarsky, 辻井, Buzzi [10, 11, 7, 16, 17, 6, 18] らにより一般的に調べられている。一次元と異なり不連続点の集合が大きいためこの扱いが複雑になる。とくに重要なのは有界変動関数の定義をうまく行って関数空間を狭めることである。Keller, Saussol に従い

$$\mathrm{osc}(f, B) = \mathrm{esssup}_{x \in B} f(x) - \mathrm{essinf}_{x \in B} f(x),$$

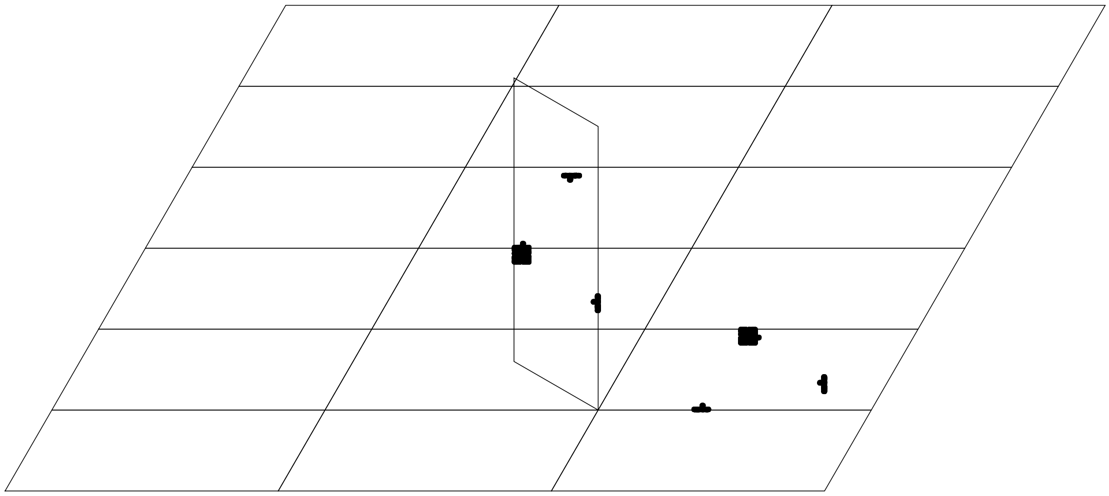
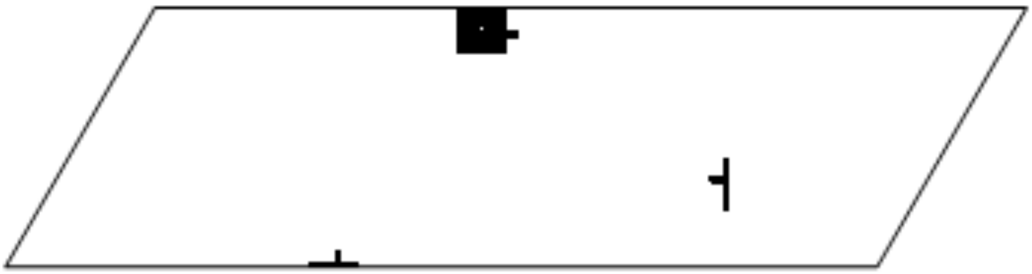
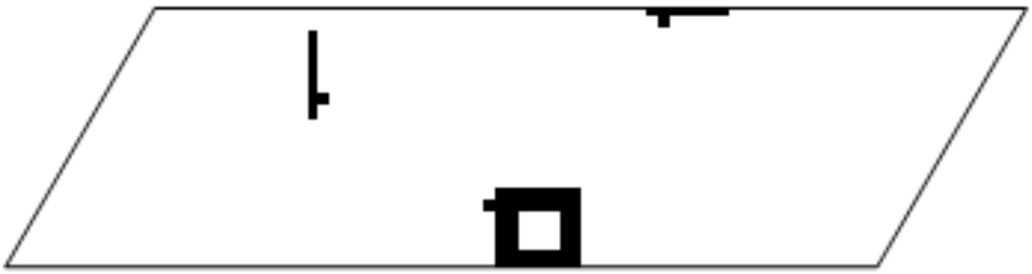


図 4: Non ergodic case



(a) First Component



(b) Second Component

図 5: Non unique ACIM

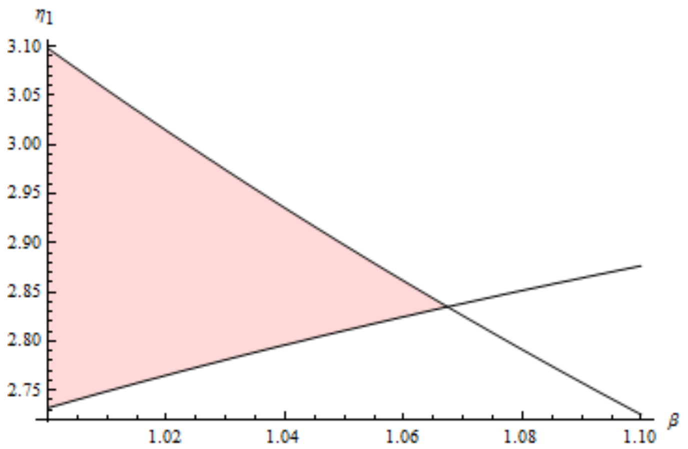


図 6: Non ergodic parameters

を球 B の周りの振動という. $\varepsilon_0 > 0$ を固定し

$$\mathrm{Var}(f) = \sup_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0} \frac{1}{\varepsilon}\int \mathrm{osc}(f, B(x,\varepsilon))dx.$$

とおく。このとき $\mathrm{Var}(f)$ が全変動の代替物で $V = \{f \in L^1 \mid \mathrm{Var}(f) + \|f\| < \infty\}$ は $\mathcal{L}^1$ 内で相対コンパクトとなる。このような空間を擬ヘルダー空間という。不連続点集合は空間次元よりも次元の低い集合で適切な仮定を満たすものとすると $n \in \mathbb{N}$, $0 < \eta < 1$ が存在して Lasota-Yorke 型の不等式:

$$\mathrm{Var}(P^n(f)) < \eta \mathrm{Var}(f) + D\|f\|$$

が成立する。この不等式がわかると

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} P^i(f), \quad N = 1, 2, \ldots$$

には収束部分列があるので $P(h) = h$ を満たす元を見出すことができる。これが ACIM の密度関数となる。非常に重要なことに擬ヘルダー空間の定義がうまく働いて ACIM μ の台は正の半径の球を含む。したがってこの系のエルゴード的な ACIM は有限個しか存在せず、その個数は

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{D}{1-\eta}\right)^2.$$

以下である。ここまでは理想的に進むのであるが、この評価は実際にはラフで、η が 1 に近いときは非常に大きくなってしまう。数論的な興味からすると ACIM が唯一となるである場合に的を絞りたい。

集合 $A \subset \mathbb{R}^m$ を平行な二つの超平面でサンドイッチできる最小幅のことを A の幅と定義し $w(A)$ と書く。相対稠密な $\mathbb{R}^m$ の部分集合 P に対してその被覆半径は

$$r(P) := \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \inf_{y\in P} \|x - y\|$$

と定める。次の性質を考える

$$(S) \qquad \forall z \in \mathcal{X} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad 2r(T^{-n}(z) + \mathcal{L}) \le \beta w(\mathcal{X})$$

定理 1 ([2]). 性質 *(S)* が成立しているとする。このとき不等式 $\beta \ge m+1$ が成り立てば *ACIM* は一意で m-次元 *Lebesgue* 測度と同等である。

条件 (S) は一次元ならば常になりたつ。二次元以上では $\mathcal{X}$ の形があまり歪んでいないことを意味している。この証明には Bang [3] による Tarski の plank 問題への肯定的解決の結果を用いる。$m=2$ の場合にはさらに正確な結果が得られる。

$\theta = \theta(\mathcal{X}) \in (0, \pi/2]$ を η_1 と η_2 のなす角とする。

$$B_1(\theta(\mathcal{X})) := \begin{cases} 2 & \text{if } \frac{1}{2} < \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 1 + \frac{2}{1+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} & \text{if } \sin(\theta) < \sqrt{5} - 2 \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{16}\cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$B_2(\theta(\mathcal{X})) := \begin{cases} 1 + \frac{1}{\sin(\theta)\cos(\theta/2)} & \text{if } \frac{\pi}{3} < \theta \\ 1 + \frac{2}{1+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

また $\theta \in [\pi/2, \pi)$ では $B_i(\theta) = B_i(\pi - \theta)$ $(i = 1, 2)$ と定める。すると次がなりたつ。

定理 2. $\beta > B_1$ ならば $(\mathcal{X}, T)$ の *ACIM* μ は唯一である。さらに $\beta > B_2$ ならば μ は二次元 *Lebesgue* 測度と同等である。

この結果は [1] の特に $\theta(\mathcal{X})$ が小な場合の改良を与えている。$B_1 \le B_2$ は 図 5 で確かめられる。

6 Tarski の plank 問題

定理 1 の証明は最初次元 $m \le 3$ で得られた。高次元に拡張する際に高次元球に関する次の命題に帰着されることに気が付いた。

補題 3. 単位球を m 個の平面で切った分割を考えるとどこかの cell の中に 半径 $1/(m+1)$ の球が含まれる。

この $1/(m+1)$ は最善である。簡単に証明できそうに思ったのだがいくら考えてもできなかった。オーストリアの Admont で行われた集会でこの問題を聴衆に聞いたところ P. Grabner 氏がポスドクの Wöden Kusner 氏に伝えてくれた。彼はこの手の問題はよく知っているはずだというのである。

実際 Kusner 氏は直ちに答えを教えてくれた。この問題をずっと一般化した問題を A.Tarski が提示し、その後 Bang が証明していたのである。

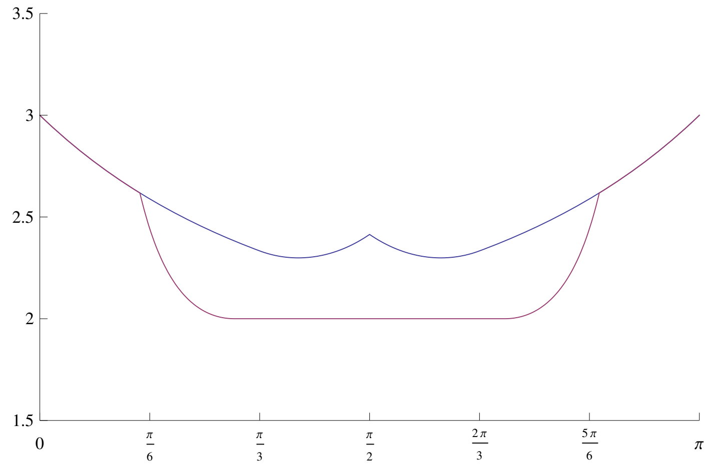


図 7: B_1 と B_2 の比較

定理 4. 凸体 X が $X=\bigcup_{i=1}^n X_i$ に分割されているとき $w(X)\le\sum_{i=1}^n w(X_i)$ が成立する。

この命題から上記を導くのはやさしい。Bang の証明は大変おもしろいアイデアを用いており読者に一読をお勧めしたい。

7　定理 1 の証明のアイデア

半径 r の球 $B(x,r)$ が $\mathcal{X}$ に存在し $T^{-n}(z)$ の元を含まないとする。これをレベル n での大きさ r の穴という。もし $0<c<1$ なる定数 c が存在して点 $T^{-n}(z)$ の穴の最大半径が r であるとき、$T^{-n-1}(z)$ の穴の半径が cr 以下となることが任意の z に関して示せれば、異なるエルゴード的 ACIM の support 間に無視できない測度の行き来があることになるのでそのような ACIM はただ一つということが示される。この問題の幾何学的意味を双対的に考えると球 $B(x,r)$ を β 倍に拡大し合同変換した像 B' はいくつかの $\partial(\mathcal{X})+\mathcal{L}$ により分割されるが、この B' の分割された cell の中に含まれるような最大の球の大きさを調べる問題に帰着する。言い換えると球を m 個の超平面で切ったとき、その cell のいずれかに $1/(m+1)$ の大きさの球が入ることを言えばよい。(たかだか m 個で済むというのが仮定 (S) である。) この問題は Tarski の幅の加法性問題の双対問題であり Bang の肯定的解決により任意次元で解くことができる。

8　記号力学系との関連

$\mathcal{A}:=\{d(z)\mid z\in\mathcal{X}\}$ とおく。$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ を $\mathcal{A}$ 上の両側無限語全体、$\mathcal{A}^*$ を有限語の全体とする。有限語 $w\in\mathcal{A}^*$ が admissible とは w がある $z\in\mathcal{X}\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}T^n(\partial(\mathcal{X}))$ に

対応する無限語 $d_T(z)$ の部分語として現れることとする。z を制限する理由は以下で述べる。さて

$$\mathcal{X}_T := \left\{ w = (w_i) \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \middle| \, w_i w_{i+1} \dots w_j \text{ is admissible } \right\}.$$

とおけば対応する記号力学系 $(\mathcal{X}_T, s)$ が定まる。もちろん s はシフト作用素 $s((w_i)) = (w_{i+1})$ とする。$(\mathcal{X}_T, s)$ (または単に $(\mathcal{X}, T)$) が sofic とは、辺に対して $\mathcal{A}$ のラベルが与えられた有限有向グラフ G が存在してすべての $w \in \mathcal{X}_T$ に対してある G 上の両側無限路のラベルが対応することである。このとき

補題 5. $(\mathcal{X}, T)$ が *sofic* となるのは $\bigcup_{n=1}^{\infty} T^n(\partial(\mathcal{X}))$ が有限個の線分の合併集合となることである。

$\mathcal{X}_T$ の定義で $\mathcal{X} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(\partial(\mathcal{X}))$ に考慮を制限する理由は、もし $\mathcal{X}$ で定義した場合には

補題 6. $(\mathcal{X}, T)$ が *sofic* となるのは $(T^n(\partial(\mathcal{X})))_{n=1,2,\dots}$ が集合列として周期的になることである。

となって判定条件が複雑になってしまうからである。高次元での不連続点の形状に関する技術的問題が生じるのを避けるため考慮する点を制限したのである。一次元ではこれらの定義は同じである。筆者はこの定義が一般には異なるかどうかわからない。

さてこの補題から $(\mathcal{X}, T)$ が sofic になるためには ζ の偏角は π の有理数倍でなければならない。ζ を 1 の q-乗根とし $\xi, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{Q}(\zeta, \beta)$ と $\eta_1/\eta_2 \notin \mathbb{R}$ を仮定しよう。

定理 7. ζ を *1* の q-乗根とし β を *Pisot* 数、$\eta_1, \eta_2, \xi \in \mathbb{Q}(\zeta, \beta)$ とする。このとき. もし $\cos(2\pi/q) \in \mathbb{Q}(\beta)$ ならば $(\mathcal{X}, T)$ は *sofic* である。

系 8. ζ が *1* の *3, 4* または *6* 乗根ならば、任意の *Pisot* 数 β に対して $(\mathcal{X}, T)$ は *sofic* となる。

系 9. どのような自然数 q に対しても *Pisot* 数 β で、上記の条件を満たすものが存在する。したがって回折像が q-回対称性をもつ多角形による平面上の自己相似タイリングが存在する。

条件 $\cos(2\pi/q) \notin \mathbb{Q}(\beta)$ が成立しない場合には β が Pisot であっても sofic でない例が多く存在する。

定理 10. $\xi = 0$, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = \zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/5)$ とする。もし $\beta > 2.90332$ で $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\beta)$ ならば $(\mathcal{X}, T)$ は *sofic* でない。

たとえば $\beta = 3, 4, 5 \dots$ でもこのシステムは sofic でない。

9　まとめ

	唯一	ルベグ同等性	密度の明示	sofic の十分条件
ベータ展開	恒真	恒真	可能	β: Pisot
負のベータ	恒真	$\beta \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	可能	β: Pisot
回転ベータ	$\beta > B_1$	$\beta > B_2$	不明	Pisot & $\cos(2\pi/q) \in \mathbb{Q}(\beta)$

10　問題と例

- B_1 と B_2 を改良せよ。最善にはまだ遠い印象である。
- ACIM のできるだけ大きいクラスで密度関数を明示せよ。

例 11. $\xi = 0$, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = \zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$, $\beta = 1 + \sqrt{2}$. の場合、9 個の cell に分かれる。図 8 参照。

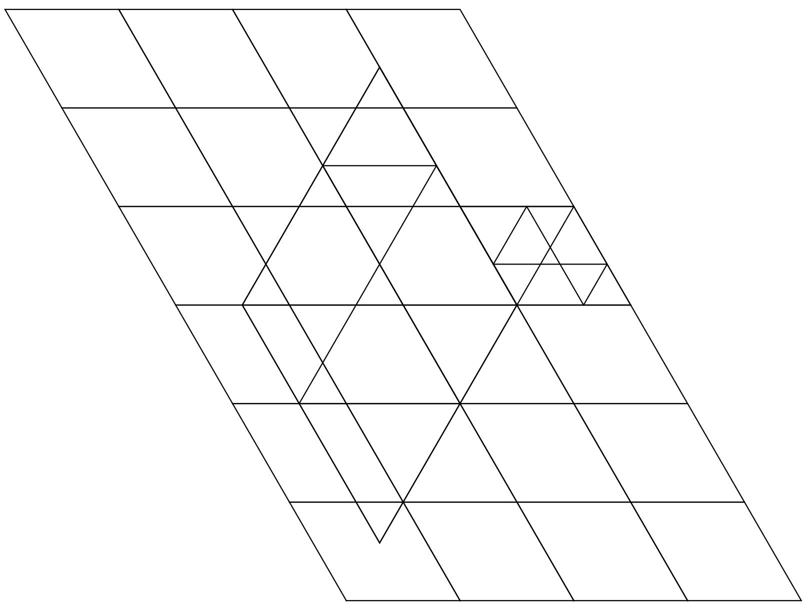


図 8: 3-fold sofic case

例 12. $\xi = 0$, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = \zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/5)$, $\beta = (1 + \sqrt{5})/2$. cell は 40 個ある。図 9 を見よ。

例 13. $\xi = 0$, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = \zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/7)$ $\beta = 1 + 2\cos(2\pi/7) \approx 2.24698$. $r(\mathcal{L}) = 1/(2\cos(\pi/7))$, $w(\mathcal{X}) = \sin(2\pi/7)$ なので $\beta > B_1 \approx 2.00272$ より ACIM は定理 2 から唯一となる。$\beta < B_2 \approx 2.41964$ なので Lebesgue 測度との同等性は直ちにはわからない。定理 7 によりこのシステムは sofic であり、図 10 は 224 本

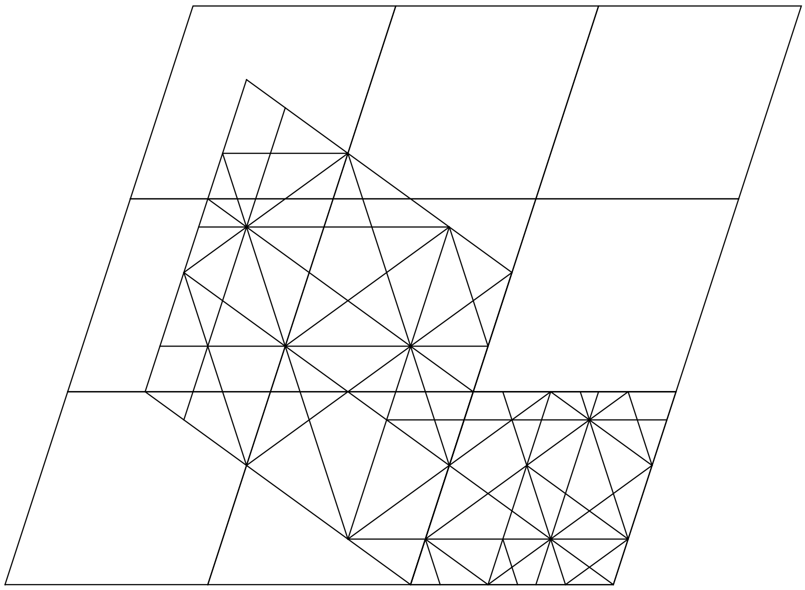


図 9: 5-fold sofic case

の不連続な線により 3292 個の cell に分かれている。この場合の密度関数は非負行列に関するペロン・フロベニウスの定理から（行列のサイズが大きいので計算上の問題はあるが原理的には）導くことが可能である。対応する行列が原始的なので ACIM は Lebesgue 測度と同等な階段関数となる。

参考文献

[1] S. Akiyama and J. Caalim, *Rotational beta expansion: Ergodicity and Soficness*, J, Math. Soc. Japan **69** (2016), no. 1, 1–19.

[2] ———, *Invariant measure of rotational beta expansion and a problem of Tarski*, Discrete and Computational Geometry **57** (2017), no. 2, 357–370.

[3] T. Bang, *A solution of the "plank problem"*, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 990–993.

[4] V. Berthé and A. Siegel, *Purely periodic β-expansions in the Pisot non-unit case*, J. Number Theory **127** (2007), no. 2, 153–172.

[5] F. Blanchard, *β-expansions and symbolic dynamics*, Theoret. Comput. Sci. **65** (1989), no. 2, 131–141.

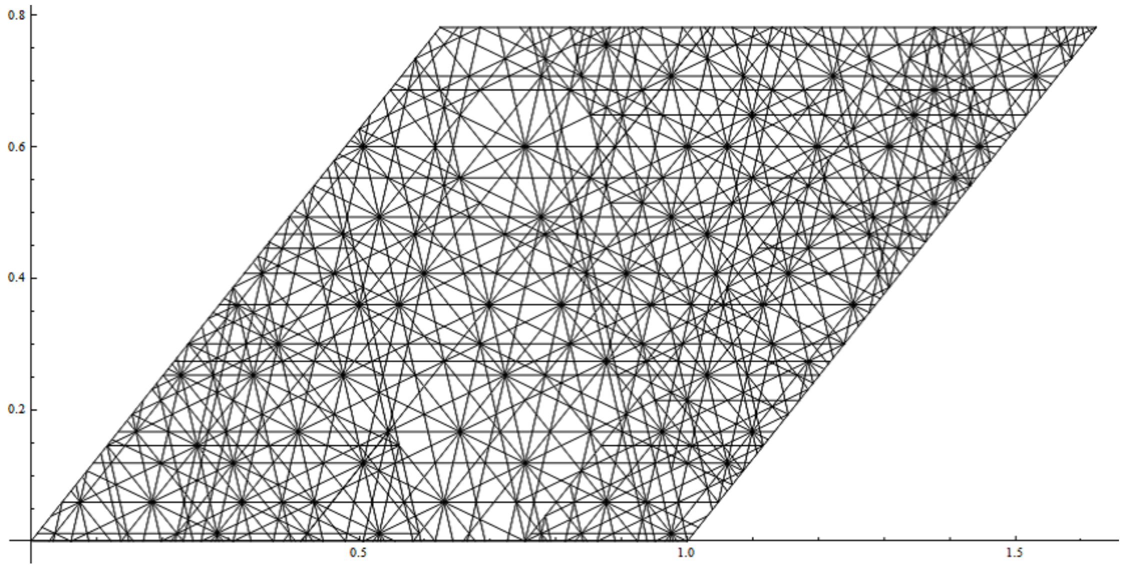


図 10: Sofic 7-fold rotation

[6] J. Buzzi and G. Keller, *Zeta functions and transfer operators for multidimensional piecewise affine and expanding maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems **21** (2001), no. 3, 689–716.

[7] P. Góra and A. Boyarsky, *Absolutely continuous invariant measures for piecewise expanding C^2 transformation in $\mathbf{R}^N$*, Israel J. Math. **67** (1989), no. 3, 272–286.

[8] Sh. Ito and H. Rao, *Purely periodic β-expansions with Pisot unit base*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no. 4, 953–964.

[9] Sh. Ito and T. Sadahiro, *Beta-expansions with negative bases*, Integers **9** (2009), A22, 239–259.

[10] G. Keller, *Ergodicité et mesures invariantes pour les transformations dilatantes par morceaux d'une région bornée du plan*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **289** (1979), no. 12, A625–A627.

[11] ______, *Generalized bounded variation and applications to piecewise monotonic transformations*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **69** (1985), no. 3, 461–478.

[12] T.Y. Li and J. A. Yorke, *Ergodic transformations from an interval into itself*, Trans. Amer. Math. Soc. **235** (1978), 183–192.

[13] L. Liao and W. Steiner, *Dynamical properties of the negative beta-transformation*, Ergodic Theory Dynam. Systems **32** (2012), no. 5, 1673–1690.

[14] W. Parry, *On the β-expansions of real numbers*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **11** (1960), 401–416.

[15] A. Rényi, *Representations for real numbers and their ergodic properties*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **8** (1957), 477–493.

[16] B. Saussol, *Absolutely continuous invariant measures for multidimensional expanding maps*, Israel J. Math. **116** (2000), 223–248.

[17] M. Tsujii, *Absolutely continuous invariant measures for piecewise real-analytic expanding maps on the plane*, Comm. Math. Phys. **208** (2000), no. 3, 605–622.

[18] ———, *Absolutely continuous invariant measures for expanding piecewise linear maps*, Invent. Math. **143** (2001), no. 2, 349–373.