Maximal order of divisor functions

小樽商科大学　赤塚　広隆 (Hirotaka Akatsuka)
Otaru University of Commerce

1　導入

$\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathbb{R}_{\geq 0}$ に値を取る数論的関数とする．$\{f(n)\}$ の増大度を調べるための概念をいくつか挙げてみる．以下, g は $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ の単調増加な連続関数とする．

- g が f に対する average order であるとは, $x \to \infty$ で
$$\sum_{n \leq x} f(n) \sim \sum_{n \leq x} g(n)$$
が成り立つことと定義する．ここで, $F(x) \sim G(x)$ とは, $F(x)/G(x) \to 1(x \to \infty)$ が成り立つことと約束する．

- g が f に対する maximal order であるとは,
$$\limsup_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$
が成り立つことと定義する．

- g が f に対する minimal order であるとは,
$$\liminf_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$
が成り立つことと定義する．

上の 3 つの概念は, 数論的関数の平均的な挙動や大きくなるところ, 小さくなるところを連続関数で捕らえることを目的とするものである．Tenenbaum の本 [13, I.3 および I.5] に, いくつかの数論的関数に対し, 上記概念についての古典的な結果が解説されている．

$\kappa \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\sigma_\kappa(n) := \sum_{d|n} d^\kappa$$

とおく. 本稿では, $\sigma_\kappa(n)$ に対し, average order, maximal order, minimal order を考えてみたい. 本稿では p は常に素数を表すこととする.

2 $\sigma_\kappa(n)$ に対する average order

まず, $\sigma_\kappa(n)$ に対する average order を考える. これは標準的な議論で容易に導出でき, また, 古くから良く知られた結果であるため, 大雑把な説明に留めることにする.

簡単のため, $\kappa > 0$ とする. このとき, 簡単な計算により,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\kappa(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-\kappa)$$

となることが分かる. ここで, $\zeta(s)$ はリーマンゼータ関数である. Perron の公式を用いることで, $x \to \infty$ のとき,

$$\sum_{n \le x} \sigma_\kappa(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa+2-iT}^{\kappa+2+iT} \zeta(s)\zeta(s-\kappa)\frac{x^s}{s} ds + (\text{error})$$

となる. 積分路を左にシフトすることで,

$$\sum_{n \le x} \sigma_\kappa(n) \sim \operatorname{Res}_{s=\kappa+1} \zeta(s)\zeta(s-\kappa)\frac{x^s}{s} = \frac{\zeta(\kappa+1)}{\kappa+1} x^{\kappa+1}$$

となることが分かる. $\sum_{n \le x} n^\kappa \sim x^{\kappa+1}/(\kappa+1)$ に注意すれば, $\zeta(\kappa+1)n^{\kappa+1}$ が $\sigma_\kappa(n)$ に対する average order となることが分かる.

3 $\sigma_\kappa(n)$ に対する minimal order

引き続き $\kappa > 0$ とする.[1] このとき, $\sigma_\kappa(n)$ に対する minimal order も容易に求めることができる. まず, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ に対し, n は n の約数なので, $\sigma_\kappa(n) \ge n^\kappa$ が成り立つ. よって,

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\sigma_\kappa(n)}{n^\kappa} \ge 1 \tag{3.1}$$

[1] この仮定を置いている理由は, average order を考えているときとはやや異なることに注意する. average order を考えているときは $\kappa > 0$ と $\kappa = 0$, $\kappa < 0$ で状況が変化するので, 説明を簡潔にするために $\kappa > 0$ に限った. 一方, maximal order および minimal order を考えるとき, $\sigma_\kappa(n) = n^\kappa \sigma_{-\kappa}(n)$ に注意すると, $\kappa > 0$ の場合と $\kappa < 0$ の場合を考えるのは同等である.

が成り立つ．一方, 素数 p に対し, $\sigma_\kappa(p)/p^\kappa = 1 + p^{-\kappa} \to 1 (p \to \infty)$ なので, (3.1) の逆側の不等式も成り立つ．これらを合わせて,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sigma_\kappa(n)}{n^\kappa} = 1$$

を得る．以上により, n^κ が $\sigma_\kappa(n)$ に対する minimal order であることが分かった.

4　$\kappa \geq 1$ のときの $\sigma_\kappa(n)$ に対する maximal order

以降, 本稿の主題である $\sigma_\kappa(n)$ に対する maximal order について考える．まず, $\kappa \geq 1$ の場合は次のことが知られている:

定理 1 (Gronwall[4])**.** $\kappa > 1$ のとき,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma_\kappa(n)}{n^\kappa} = \zeta(\kappa)$$

が成り立つ．即ち, $\kappa > 1$ のとき, $\zeta(\kappa)n^\kappa$ は $\sigma_\kappa(n)$ に対する maximal order である.

定理 2 (Gronwall[4])**.**

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma_1(n)}{n \log\log n} = e^\gamma.$$

ここで, $\gamma = \lim_{N\to\infty}(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N)$ はオイラー定数である．つまり, $e^\gamma n \log\log n$ は $\sigma_1(n)$ に対する maximal order である.

$\kappa = 1$ を境にして maximal order の問題が難しくなることを説明するため, 上記定理の証明に少々言及したい．まず, $\sigma_\kappa(n)$ は乗法的である, つまり $\gcd(m, n) = 1$ のとき $\sigma_\kappa(mn) = \sigma_\kappa(m)\sigma_\kappa(n)$ だから,

$$\frac{\sigma_\kappa(n)}{n^\kappa} = \prod_{p^e || n} \frac{\sigma_\kappa(p^e)}{p^{\kappa e}} = \prod_{p|n}(1 - p^{-\kappa})^{-1} \prod_{p^e||n}(1 - p^{-\kappa(e+1)}). \tag{4.1}$$

$\kappa > 1$ のとき, (4.1) と $\zeta(s)$ のオイラー積表示より,

$$n^{-\kappa}\sigma_\kappa(n) \leq \zeta(\kappa)$$

が分かる．あとは $n_k^{-\kappa}\sigma_\kappa(n_k) \to \zeta(\kappa)(k \to \infty)$ となる列 $\{n_k\}$ を構成すればよい．そのためには, $k \to \infty$ のとき,

(1) $\prod_{p|n_k}(1 - p^{-\kappa})^{-1} \to \zeta(\kappa)$,

(2) $\prod_{p^e||n_k}(1-p^{-\kappa(e+1)}) \to 1$

の二つが同時に成り立つような列 $\{n_k\}$ を見つければよい．そこで, p_j を j 番目の素数とし, $n_k = (p_1p_2\cdots p_k)^{k-1}$ と定める．このとき, (1) が成り立つことは容易に分かる．また,

$$\prod_{p^e||n_k}(1-p^{-\kappa(e+1)}) = \prod_{j=1}^{k}(1-p_j^{-\kappa k})$$

より,

$$(1-2^{-\kappa k})^k \le \prod_{p^e||n_k}(1-p^{-\kappa(e+1)}) \le 1$$

である．$k\to\infty$ のとき $(1-2^{-\kappa k})^k \to 1$ だから, (2) も成り立つことが確認できる．以上より, 定理 1 が分かった．

次に, (以下の議論ではうまく行かないのだが) 定理 2 を定理 1 と同じ方法で証明を試みる．定理 1 と同様, $n_k = (p_1p_2\cdots p_k)^{k-1}$ と取ってみると, $k\to\infty$ で

$$\prod_{p^e||n_k}(1-p^{-(e+1)}) = \prod_{j=1}^{k}(1-p_j^{-k}) \to 1$$

が成り立つ．一方,

$$\prod_{p|n_k}(1-p^{-1})^{-1} = \prod_{j=1}^{k}(1-p_j^{-1})^{-1} \sim e^\gamma \log p_k$$

である．ここで, Mertens の定理

$$\prod_{p\le x}(1-p^{-1})^{-1} \sim e^\gamma \log x \tag{4.2}$$

を用いた．さらに, $k = |\{p \le p_k : p \text{ は素数 }\}|$ であることに注意し, 素数定理を用いると, $\log p_k \sim (\log\log n_k)/2$ が分かる．これらを (4.1) に適用することで,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sigma_1(n_k)}{n_k\log\log n_k} = \frac{e^\gamma}{2}$$

を得る．

以上の議論では

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\sigma_1(n)}{n\log\log n} \ge \frac{e^\gamma}{2} \tag{4.3}$$

しか得られず, 上の $\{n_k\}$ では定理 2 に到達することができない．上の議論でうまく行かなかった理由は, $\log p_k$ を (n_k の大きさで測ったとき) やや小さかったからである．$\kappa > 1$ の場合, オイラー積 $\prod_p(1-p^{-\kappa})^{-1}$ が収束する．そのため,

- 式 (4.1) の最後の積が $n = n_k$ で $k \to \infty$ のとき 1 に近づき,
- 素数からなる任意の有限集合 $\mathcal{P}$ に対し $k_0 = k_0(\mathcal{P})$ が存在して, $k \geq k_0$ のとき $\mathcal{P} \subset \{p : \text{素数} : p | n_k\}$ が成り立つ

ように $\{n_k\}$ を構成すればよかった. しかし, $\kappa = 1$ を境にオイラー積が収束しなくなるため, オイラー積が (n_k の大きさで測ったときに) 多くの素数 p を走るように $\{n_k\}$ を選ぶ必要が出てくるのである.[2]

約数関数 $\sigma_\kappa(n)$ の maximal order と関連する性質は, リーマンゼータ関数の零点と結びつくことがある. 次はリーマン予想を初等的な不等式で言い換える例として有名である.

定理 3 (Robin[12])**.** $n > 5040(= 7!)$ なる任意の自然数 n に対し

$$\sigma_1(n) < e^\gamma n \log\log n \tag{4.4}$$

が成り立つことと, リーマン予想は同値である.

注意. Lagarias[6] は不等式 (4.4) をオイラー定数 γ を用いないものに置き換えることを考え, リーマン予想は,

$$\sigma_1(n) \leq H_n + \exp(H_n) \log H_n$$

が任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し成り立つことと同値であることを示した. ここで, $H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ は調和数である.

5 主結果

本節では, $1/2 \leq \kappa < 1$ のときの $\sigma_\kappa(n)$ に対する maximal order について, 証明できた結果を述べる.

定理 4. $\kappa \in (1/2, 1)$ とする. もし $\mathrm{Re}(s) > \kappa$ で $\zeta(s) \neq 0$ が成り立つならば,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma_\kappa(n)}{n^\kappa \exp[\mathrm{Li}((\log n)^{1-\kappa})]} = -\zeta(\kappa)$$

が成り立つ. ここで, $\mathrm{Li}(x)$ は次で与えられる対数積分である:

$$\mathrm{Li}(x) := \lim_{\delta \downarrow 0} \left(\int_0^{1-\delta} + \int_{1+\delta}^{x} \right) \frac{du}{\log u}.$$

[2] $\kappa = 1$ の場合, 例えば $n_k = (p_1 \cdots p_k)^{[100 \log k]}$ と変更すると, 式 (4.3) の $e^\gamma/2$ を e^γ に置き換えることができ, 定理 2 を半分示せたことになる. あとは式 (4.1) に立ち返り, 式 (4.2) を用いると $\prod_{p|n}(1 - p^{-1})^{-1} \leq e^\gamma \log\log n(1 + o(1))$ $(n \to \infty)$ を示すことができ, 定理 2 が分かる.

定理 5. リーマン予想が正しいと仮定する. この時, 次が成り立つ:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma_{1/2}(n)}{n^{1/2}\exp[\mathrm{Li}((\log n)^{1/2})]} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta(1/2).$$

上の主張について, まず歴史的な経緯を述べる. これらの結果は Ramanujan により発見されたものであり, 論文 [8] の最初の版には含まれていた結果である. しかし, [11, p.339] に書いてあるとおり, 上記結果を含む一部分は論文から削除された. その後, 削除された部分の原稿が 1980 年代に発見され, 1988 年にファクシミリ版 [9] が出版された. その後, Nicolas と Robin による注記が付されたタイプセット版 [10] が出版されている. また, [3, 10 章] には [10] に若干の修正を加えたものが掲載されている. なお, 論文 [8] に掲載された部分では, 通常の約数関数 $d(n) = |\{d \in \mathbb{Z}_{\geq 1} : d \mid n\}|$ に対する maximal order が主として扱われている. これについては, Nicolas によるサーベイ [7] を参照されたい.

上で述べたとおり, 定理 4 および定理 5 は Ramanujan により見出されていたものである. しかし, 文中に現れる積分の積分区間が明記していなかったりして, 論文の議論を追うのが (少なくとも本稿の筆者にとっては) 困難である. また, リーマン予想を仮定して得られた結果と考えられているようであるが, 何を仮定して得られた結果であるか, ということは [10] には明記されていない. そのため, 証明できることを整理して紹介させていただいている次第である.

次に, 定理 4 と定理 5 に関連する数学的な事柄について説明する. $\log\sigma_\kappa(n)$ に対する maximal order については, $0 < \kappa < 1$ に対し,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\sigma_\kappa(n)/n^\kappa)}{(\log n)^{1-\kappa}/\log\log n} = \frac{1}{1-\kappa}$$

が成り立つことが知られている (Gronwall[4, p.122]). Gronwall の結果は, $n \to \infty$ のとき

$$\log\frac{\sigma_\kappa(n)}{n^\kappa} \leq \frac{1}{1-\kappa}\frac{(\log n)^{1-\kappa}}{\log\log n} + o\left(\frac{(\log n)^{1-\kappa}}{\log\log n}\right) \tag{5.1}$$

が成り立ち, さらに $n = n_k$ のとき上の不等式が等式となるような無限列 $\{n_k\}$ がある, ということを言っている. 一方, 定理 4 で対数を取ってみると, $1/2 < \kappa < 1$ のとき,

$$\log\frac{\sigma_\kappa(n)}{n^\kappa} \leq \mathrm{Li}((\log n)^{1-\kappa}) + \log(-\zeta(\kappa)) + o(1)$$

が成り立ち, さらに不等式が等式となる列 $\{n_k\}$ があると言っている. $\mathrm{Li}(x) \sim x/\log x$ に注意すると, 定理 4(および定理 5) は, Gronwall の結果 (5.1) の誤差の部分を, 条件付きではあるものの, 定数項まで分かるように精密にしたもの, ということができる.

6 定理 4, 定理 5 の証明の概略

証明は, 大きく分けて次の二つからなる:

(1) $\sigma_\kappa(n)/n^\kappa$ が大きくなるような列 $\{n_k\}$ を構成する.

(2) (1) で構成した列について, $k \to \infty$ のときの $\sigma_\kappa(n_k)/n_k^\kappa$ の挙動を調べる.

まず, (1) から説明する. まず, Ramanujan[8] により導入された, 約数関数 $d(n) = |\{d \in \mathbb{Z}_{\geq 1} : d \mid n\}|$ についての二つの概念を復習する.

定義 1 (highly composite number)**.** $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が highly composite number であるとは, $1 \leq n < N$ なる任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $d(n) < d(N)$ が成り立つことと定義する.

定義 2 (superior highly composite number)**.** $\varepsilon > 0$ とする. $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ がパラメータ ε に対する superior highly composite number であるとは, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し,

$$\frac{d(n)}{n^\varepsilon} \leq \frac{d(N)}{N^\varepsilon}$$

が成り立つことと定義する.

N が適当な $\varepsilon > 0$ をパラメータとする superior highly composite number であるとき, N は highly composite number であることはすぐに分かる. また, highly composite number は約数関数 $d(n)$ を大きくするような n の候補となるものということは理解しやすい. 一方, 明示的に求めやすいのは superior highly composite number の方である. 実際, $\varepsilon > 0$ を固定したとき $n^{-\varepsilon} d(n) \to 0 (n \to \infty)$ であることに注意すると, パラメータ ε に対する superior highly composite number は存在する. また, $d(n)$ は乗法的であることから,

$$\frac{d(n)}{n^\varepsilon} = \prod_{p^e || n} \frac{d(p^e)}{p^{e\varepsilon}} = \prod_{p^e || n} \frac{e+1}{p^{e\varepsilon}}$$

である. よって, 素数 p を固定したとき, $(e+1)/p^{e\varepsilon}$ を最大にする $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を決めればよく, これは容易に求めることができる. 以上を踏まえると, $d(n)$ が大きくなるような列を明示的に構成するとき, superior highly composite number は有用であると考えられる.

$\sigma_\kappa(n)/n^\kappa$ が大きくなるような列の候補を構成するため, superior highly composite number の方を一般化して用いることとする:

定義 3 (κ-superior highly composite number)**.** $\kappa > 0$, $\varepsilon > 0$ とする．$N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ がパラメータ ε に対する κ-superior highly composite number であるとは, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し,

$$\frac{\sigma_\kappa(n)}{n^{\kappa(1+\varepsilon)}} \leq \frac{\sigma_\kappa(N)}{N^{\kappa(1+\varepsilon)}}$$

が成り立つことと定義する.

この概念は本質的に Ramanujan[10, §**59**] により導入され, [10] では generalised superior highly composite number と呼ばれている．また, Alaoglu–Erdős[2, §3] は 1-superior highly composite number を collosally abundant number と呼び, 考察を行っている.

前に説明した superior highly composite number を明示的に決める方法と同様に考えることで, 次のように κ-superior highly composite number を明示的に決めることができる.

補題 4. $\kappa > 0$, $\varepsilon > 0$ とする．$\lambda_p(\varepsilon) = \lambda_p^{[\kappa]}(\varepsilon)$ を

$$\lambda_p(\varepsilon) = \log\left(\frac{p^{\kappa(1+\varepsilon)} - 1}{p^\kappa(p^{\kappa\varepsilon} - 1)}\right) \Big/ \log(p^\kappa) \tag{6.1}$$

で定める．このとき,

$$N = \prod_p p^{E_p}$$

がパラメータ ε に対する κ-superior highly composite number であるための必要十分条件は, 各素数 p に対し次を満たすことである:

- $\lambda_p(\varepsilon) \notin \mathbb{Z}$ の場合, $E_p = [\lambda_p(\varepsilon)]$ が成り立つ.
- $\lambda_p(\varepsilon) \in \mathbb{Z}$ の場合, $E_p = \lambda_p(\varepsilon)$ または $E_p = \lambda_p(\varepsilon) - 1$ が成り立つ.

次に, 本節の冒頭で述べた (2) について説明する．以下, $\lambda_p(\varepsilon)$ を式 (6.1) で定め,

$$M = M(\varepsilon; \kappa) = \prod_p p^{[\lambda_p(\varepsilon)]}$$

とおく．このとき, $\varepsilon \downarrow 0$ を考えることで, κ-superior highly composite number からなる列を作ることができる．これを $\sigma_\kappa(n)/n^\kappa$ に代入して多少の考察を行うと, $1/2 < \kappa < 1$ の場合は $\varepsilon \downarrow 0$ のとき

$$\frac{\sigma_\kappa(M)}{M^\kappa} = (1 + o(1)) \prod_{p \leq x} (1 - p^{-\kappa})^{-1},$$

$\kappa = 1/2$ の場合は

$$\frac{\sigma_{1/2}(M)}{M^{1/2}} = (1+o(1))\prod_{p\le x}(1-p^{-1/2})^{-1}\prod_{y<p\le x}(1-p^{-1}) \tag{6.2}$$

の型の漸近式を得る．ここで x と y の正確な定義は省略するが, κ と ε により決まる数で, $\varepsilon \downarrow 0$ のとき漸近式

$$\log M = \theta(x^{1/\kappa}) + O(x^{1/(2\kappa)}), \qquad y \sim \sqrt{2x},$$

ただし $\theta(X) = \sum_{p\le X}\log p$, を満たすものである．これに Mertens の定理 (4.2) および筆者による下記の結果 [1, Corollary 4.5, Proposition 5.1] を適用することにより,[3] 定理 4 および定理 5 が得られる．

補題 5. $1/2 \le \kappa < 1$ とし, $\mathrm{Re}(s) > \kappa$ に対し $\zeta(s) \neq 0$ が成り立つと仮定する．このとき, $X \to \infty$ で次が成り立つ:

$$\prod_{p\le X}(1-p^{-\kappa})^{-1} \sim -\zeta(\kappa)\exp[\mathrm{Li}(\theta(X)^{1-\kappa})] \times \begin{cases} 1 & 1/2<\kappa<1 \text{ のとき,} \\ \sqrt{2} & \kappa = 1/2 \text{ のとき.} \end{cases}$$

以上で証明の概略について説明を終える．なお, 定理 4 と定理 5 では $1/\sqrt{2}$ だけずれているが, それは以下の理由から生ずるものである．補題 5 により式 (6.2) の右辺の一つ目の積については $\sqrt{2}$ が余分に現れ, Mertens の定理により右辺の二つ目の積から $1/2$ が現れる．合わせると $1/\sqrt{2}$ だけずれる, ということである．なお, 式 (6.2) の第二の積は, 式 (4.1) の $\prod_{p^e \| n}(1-p^{-\kappa(e+1)})$ から現れることに注意する．この項は $\kappa > 1/2$ では無視できた部分であり, $\kappa = 1/2$ で状況が変化していると見ることができる．

謝辞

本稿は, 京都大学数理解析研究所で行われた研究集会「解析的整数論の諸問題と展望」での講演に基づくものです．研究集会の代表者の石川秀明氏および副代表者の藤田育嗣氏には, 講演の機会をいただいたことに深く感謝申し上げます．

[3] $1/2 < \kappa < 1$ の場合, 論文 [1] に該当する式はないが, [1, Corollary 4.5] と Grosswald による素数定理の誤差項と零点分布の関係に関する結果 [5, Théorème 1] を組み合わせることで分かる．

参考文献

[1] H. Akatsuka, The Euler product of the Riemann zeta-function in the critical strip, Kodai Math. J. **40** (2017) 79–101.

[2] L. Alaoglu and P. Erdős, On highly composite and similar numbers, Trans. Amer. Math. Soc. **56** (1944) 448–469.

[3] G. E. Andrews and B. C. Berndt, Ramanujan's lost notebook. Part III, Springer, New York, 2012.

[4] T. H. Gronwall, Some asymptotic expressions in the theory of numbers, Trans. Amer. Math. Soc. **14** (1913) 113–122.

[5] E. Grosswald, Sur l'ordre de grandeur des différences $\psi(x) - x$ et $\pi(x) - lix$, C. R. Acad. Sci. Paris **260** (1965) 3813–3815.

[6] J. Lagarias, An elementary problem equivalent to the Riemann hypothesis, Amer. Math. Monthly **109** (2002) 534–543.

[7] J. L. Nicolas, On highly composite numbers, in "Ramanujan revisited (Urbana-Champaign, Ill., 1987)" (1988) 215–244.

[8] S. Ramanujan, Highly composite numbers, Proc. London Math. Soc. (2) **14** (1915) 347–409.

[9] S. Ramanujan, The lost notebook and other unpublished papers. With an introduction by George E. Andrews. Springer-Verlag, Berlin; Narosa Publishing House, New Delhi, 1988.

[10] S. Ramanujan, Highly composite numbers. Annotated and with a forward by J.-L. Nicolas and G. Robin, Ramanujan J. **1** (1997) 119–153.

[11] S. Ramanujan, Collected papers of Srinivasa Ramanujan. Edited by G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyar and B. M. Wilson. Third printing of the 1927 original. With a new preface and commentary by Bruce C. Berndt. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2000.

[12] G. Robin, Grandes valeurs de la fonction somme desdiviseurs et hypothèse de Riemann, J. Math. Pure Appl. **63** (1984) 187–213.

[13] G. Tenenbaum, Introduction to analytic and probabilistic number theory. Third edition. Graduate Studies in Mathematics 163, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.