

ON THE KODAIRA DIMENSION OF UNITARY SHIMURA VARIETIES

京都大学・数学教室 前田 洋太
YOTA MAEDA

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE,
KYOTO UNIVERSITY

ABSTRACT. 志村多様体の小平次元は多くの人によって研究されてきた。Tai 氏は Abel 多様体のモジュライ空間, 金銅氏, Gritsenko-Hulek-Sankaran 諸氏, 馬氏は Borchers リフトを用いて, K3 曲面のモジュライ空間となる直交型志村多様体が一般型になるということを示した。一方で, Gritsenko-Hulek 両氏はとある直交型志村多様体が単織織的になるということを示した。本論文では上記の問題のユニタリ群類似に取り組む。具体的には, Borchers 形式や鏡映的保型形式を用いることによってユニタリ型志村多様体の小平次元を解析する。また, 講演者と京都大学の尾高悠志氏により得られた, ユニタリ型志村多様体がより精密に Fano や Calabi-Yau, log canonical model になるための判定法を紹介する。さらに条件を満たすエルミート格子すなわちユニタリ型志村多様体を具体的に構成する。

1. 導入

本講演ではユニタリ型志村多様体がいづ標準特異点を持つのかを議論し, その応用としてユニタリ型志村多様体が一般型になる条件及び単織織的になる条件をエルミート格子の観点から記述する。標準特異点は RST 判定法を用いて示し, 一般型の議論は [GHS07], 単織織的の議論は [GH14] を参考にする。特に Borchers lift や Gritsenko lift によって構成された直交群上の鏡映的保型形式をユニタリ群に制限して使う。ここで用いるユニタリ型エルミート対称領域の直交型エルミート対称領域への埋め込みは [Hof14] によって詳しく調べられており, この研究を引用する。

1.1. 小平次元.

定義 1.1. X を \mathbb{C} 上の正規多様体とする。 X が標準特異点を持つとは, 十分大きい整数 $r \geq 1$ と特異点解消 $\epsilon: Y \rightarrow X$ が存在して $\epsilon_*(\omega_Y^{\otimes r}) = \mathcal{O}_X(rK_X)$ が成り立つことを言う。

定義 1.2. X を \mathbb{C} 上の滑らかな多様体とし, 整数 $d \geq 0$ に対して $P_d := \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, K_X^d)$ を多重種数とする。このとき X の小平次元 $\kappa(X)$ を以下で定義する:

$$\kappa(X) := \begin{cases} 0 & (P_d = 0 \text{ for all } d) \\ \min\{k \mid \frac{P_d}{d^k} : \text{bounded}\} & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

$\kappa(X) = \dim(X)$ が成り立つとき, X は一般型であると言う。これは滑らかな多様体の間の双有理不変量になっている。 X が正規多様体で, 高々標準特異点しか持たないときには特異点解消を取って小平次元を同様に定義する。

定義 1.3. X を \mathbb{C} 上の既約な多様体とする。 X が単織織であるとは, \mathbb{C} 上の既約な多様体 Y が存在し, $\dim Y = \dim X - 1$ が成り立ちかつ支配的有理写像 $Y \times \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ が存在することを言う。

Date: July 18, 2021.

Key words and phrases. Shimura varieties, modular forms, Kodaira dimension.

補足 1.4. X が単織織的なら $\kappa(X) = -\infty$ が成り立つ. 逆は成り立つと予想されているが, 4次元以上では未解決である.

1.2. 志村多様体. ユニタリ型志村多様体及び直交型志村多様体を用いるのでそれらを定義する.

平方因子を持たない負の整数 d に対して $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ を虚二次体とし, 整数環を \mathcal{O}_F と書く. $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を符号が $(1, n)$ のエルミート格子とする. ここで n は正の整数であり,

$$\delta := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d}} & (d \equiv 1 \pmod{4}) \\ \frac{1}{2\sqrt{d}} & (d \equiv 2, 3 \pmod{4}) \end{cases}$$

としたとき

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L \rightarrow \delta \mathcal{O}_F$$

となるエルミート形式を考える.

この設定の下, $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ のユニタリ群スキームを $U(L)$ で書く. このとき, $U(L)(\mathbb{R})$ に付随するエルミート対称領域 D_L を次で定義する:

$$D_L := \{w \in \mathbb{P}(L \otimes \mathbb{C}) \mid \langle w, w \rangle > 0\}.$$

これは n 次元球

$$\{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1\}$$

と同相である. ここで数論的部分群 $\Gamma \subset U(L)(\mathbb{Z})$ に対してユニタリ型志村多様体を

$$\mathcal{F}_L(\Gamma) := \Gamma \backslash D_L$$

で定義する. これは \mathbb{C} 上の n 次元準射影的多様体になる.

今回はユニタリ型エルミート対称領域を直交型エルミート対称領域に埋め込み, 直交群上の保型形式をユニタリ群上に制限して用いるので, 直交群の定義をする.

\mathbb{Z} 上の二次形式付き格子 $(M, (\cdot, \cdot))$ に対して直交群 $O^+(M)$ を取り, 対応するエルミート対称領域を以下で定める:

$$\mathcal{D}_M := \{w \in \mathbb{P}(M \otimes \mathbb{C}) \mid (w, w) = 0, (w, \bar{w}) > 0\}^+.$$

以下で, Hofmann 氏によって詳しく調べられたユニタリ群の直交群への埋め込みを説明する. 詳しくは [Hof14] を参照. 符号 $(1, n)$ のエルミート格子 $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ に対して符号 $(2, 2n)$ の二次形式付き格子 $(L_Q, (\cdot, \cdot))$ を, L_Q を底集合として L と同じものとし, これを自由 \mathbb{Z} 加群と考えたものとし, 二次形式を $(\cdot, \cdot) := \text{Tr}_{F/\mathbb{Q}} \langle \cdot, \cdot \rangle$ で定義する. これによりユニタリ群の直交群の埋め込みを得る:

$$U(1, n) \hookrightarrow O^+(2, 2n).$$

これにより対称領域の埋め込みを得る:

$$\iota : D_L \hookrightarrow \mathcal{D}_{L_Q}.$$

主結果を述べるためにいくつか用語の定義をする. $\lambda \neq 0 \in L$ に対して, D_L 及び D_{L_Q} 上の特殊因子を以下で定義する:

$$\begin{aligned} H(\lambda) &:= \{w \in D_L \mid \langle w, \lambda \rangle = 0\} \subset D_L, \\ \mathcal{H}(\lambda) &:= \{w \in \mathcal{D}_{L_Q} \mid (w, \lambda) = 0\} \subset \mathcal{D}_{L_Q}. \end{aligned}$$

このとき,

$$\iota(H(\lambda)) = \iota(D_L) \cap \mathcal{H}(\lambda) \subset \mathcal{D}_{L_Q}$$

が成り立つ. また, 二次形式付き格子 M について

$$M^\vee / M \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\ell(M)}$$

が成り立つとき、 M は 2-elementary であると言う。さらに

$$\delta(M) := \begin{cases} 0 & ((v, v) \in \mathbb{Z} \ \forall v \in M^\vee) \\ 1 & ((v, v) \notin \mathbb{Z} \ \exists v \in M^\vee) \end{cases}$$

と定める。志村多様体の分岐因子を記述するために鏡映を導入する。 $(r, r) \neq 0$ を満たす $r \in L_Q$ に付随する鏡映を

$$\sigma_r(\ell) := \ell - \frac{2(\ell, r)}{(r, r)}r \in O^+(L_Q)(\mathbb{Q}) \ (\ell \in L_Q)$$

で定め、 $r \in L$ であって $\langle r, r \rangle \neq 0$ を満たすものと $\xi \in \mathcal{O}_F^\times \setminus \{1\}$ に対して、付随する鏡映を

$$\tau_{r, \xi}(\ell) := \ell - (1 - \xi) \frac{\langle \ell, r \rangle}{\langle r, r \rangle} r \in U(L)(\mathbb{Q}) \ (\ell \in L)$$

で定める。

2. 主結果

まずはユニタリ型志村多様体が高々標準特異点しか持たないという結果を紹介する。本来これは多様体が一般型になるという定理に関係するが、補足 2.3 の理由により、本稿では一般型の結果については省略する。代わりに著者と尾高氏によって得られた結果 [MO21] を後に紹介する。

定理 2.1 ([Mae20a, Theorem 1.1]). $n > 4$ ならユニタリ型志村多様体 $\mathcal{F}_L(\Gamma)$ は高々標準特異点しか持たない。

補足 2.2. (1) Gritsenko-Hulek-Sankaran [GHS07] は同様の結果を $n > 9$ のとき、 $SO^+(2, n)$ に付随する直交型志村多様体に対して証明した。

(2) この結果は Behrens [Beh12] の一般化になっている。

補足 2.3. トロイダルコンパクト化上の境界で分岐因子が存在しないことは Behrens [Beh12] が証明しているが、この結果及び直交型志村多様体の場合の結果 [GHS07] には修正が必要である [Ma21b]。志村多様体が一般型であることを示すにはこの結果が必要である。直交型志村多様体の場合は馬氏が [Ma21a] において解決しているがユニタリ型志村多様体の場合には未解決であり、他にもいくつかの修正が必要となるので今回はユニタリ型志村多様体が一般型になるという定理の紹介は省略する。

補足 2.4. トロイダルコンパクト化の境界上の特異点についても同様の主張が成り立つ。

補足 2.5. 直交型志村多様体の小平次元が非負、より強く一般型になるという研究は [GHS07], [Kon99], [Ma18] などにおいて行われている。

次に小平次元が $-\infty$ になるという結果、より強く単織織的になるというタイプの結果を紹介する。

定理 2.6 ([Mae20b, Theorem 1.1]). $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を符号が $(1, 5)$ のエルミート格子とし、付随する符号 $(2, 10)$ の二次形式付き格子を $(L_Q, (\cdot, \cdot))$ とする。さらに以下を仮定する。

(1) L_Q は偶かつ 2-elementary で $\delta(L_Q) = 0$ かつ $\ell(L_Q) \leq 8$ が成り立つ。さらに $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ または $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ のときは $\ell(L_Q) \leq 6$ が成り立つ。

(2) 任意の $\ell, r \in L$ であって $\langle r, r \rangle = -1$ を満たすものに対して $2\langle \ell, r \rangle \in \mathcal{O}_F$ が成り立つ。このとき $\mathcal{F}_L(U(L)(\mathbb{Z}))$ は単織織的になる。

補足 2.7. この定理を証明するために、吉川氏によって [Yos13] において構成された鏡映的保型形式を用いる。他にも Gritsenko-Hulek 氏が構成した鏡映的保型形式を用いることで同じタイプの判定法を異なるエルミート格子についても述べるができるが本稿では紙数の都合上省略する。

定理 2.6 及び補足 2.7 における判定法及び具体的なエルミート格子の構成を通して、以下の系を得る。

系 2.8 ([Mae20b, Corollary 1.5]). 以下が成り立つ。

- (1) $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ または $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ のとき、符号 $(1, 5)$ のエルミート格子 L であって、付随するユニタリ型志村多様体 $\mathcal{F}_L(U(L)(\mathbb{Z}))$ が単織織的になるものが存在する。
- (2) $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ のとき、符号 $(1, 4)$ のエルミート格子 L であって、付随するユニタリ型志村多様体 $\mathcal{F}_L(U(L)(\mathbb{Z}))$ が単織織的になるものが存在する。
- (3) $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ または $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ のとき、符号 $(1, 3)$ のエルミート格子 L であって、付随するユニタリ型志村多様体 $\mathcal{F}_L(U(L)(\mathbb{Z}))$ が単織織的になるものが存在する。

補足 2.9. Gritsenko-Hulek 氏 [GH14] は同様の問題を直交型志村多様体について考察しており、上記の結果はそのユニタリ類似である。

例 2.10. $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ のとき、 $L_{U \oplus U(2)}$ を符号 $(1, 1)$ のエルミート格子であって以下の行列で定義されるものとする：

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

また、 $L_{\mathbb{D}_4}$ を符号 $(0, 2)$ のエルミート格子であって以下の行列で定義されるものとする：

$$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1+\sqrt{-2}}{2} \\ -\frac{1-\sqrt{-2}}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

このとき $(L_{U \oplus U(2)} \oplus L_{\mathbb{D}_4} \oplus L_{\mathbb{D}_4})_{\mathbb{Q}} \cong U \oplus U(2) \oplus \mathbb{D}_4(-1) \oplus \mathbb{D}_4(-1)$ が成り立っており、定理 2.6 の仮定を満たすことが分かるので、 $L := L_{U \oplus U(2)} \oplus L_{\mathbb{D}_4} \oplus L_{\mathbb{D}_4}$ に対してユニタリ型志村多様体 $\mathcal{F}_L(U(L)(\mathbb{Z}))$ は単織織的になる。

3. 標準特異点

3.1. RST 判定法. 標準特異点を示すための有力な手法である RST 判定法を紹介する。

ベクトル空間 $V := \mathbb{C}^n$ に有限群 $G \subset \mathrm{GL}(V)$ が作用している状況を考え、 $g \in G$ を位数 m の元とする。このときこの g の作用の固有値を $\xi^{a_1}, \dots, \xi^{a_n}$ と書く。ここで $0 \leq a_i < m$ に対して $\xi = \exp(2\pi\sqrt{-1}/m)$ と置く。いま、固有値が $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ を満たすとき g を準鏡映であると言い、残りの a_n が $m/2$ に一致しているとき、 g は鏡映であると言う。また、 g に対してその age を以下で定める：

$$A(g) := \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{m}.$$

定理 3.1 (Reid-Shepherd-Barron-Tai 判定法). 任意の $g \neq 1 \in G$ が準鏡映でないとする。このとき、 V/G が標準特異点を持つためには $A(g) \geq 1$ が任意の $g \neq 1$ について成り立つことが必要十分である。

3.2. ユニタリ型志村多様体上の標準特異点. 対称領域上の点 $[w] \in D_L$ を取り, $W := \mathbb{C}w \subset L \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathbb{C}$ と置く. さらに $S := (W + \overline{W})^\perp \cap L$ と $T := S^\perp \subset L$ と置くと $S_{\mathbb{C}} \cap T_{\mathbb{C}} = \{0\}$ が成り立っているので, 固有値の計算を $S_{\mathbb{C}}$ と $T_{\mathbb{C}}$ に分けて計算する.

$$G :=_{\Gamma} ([w]) := \{g \in \Gamma \mid g[w] = [w]\}.$$

志村多様体 $\mathcal{F}_L(\Gamma)$ の特異点を調べるために D_L の $[w] \in D_L$ での接空間を V と置く:

$$V := T_{[w]}D_L \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W, W^\perp).$$

このとき $L_{\mathbb{C}} = S_{\mathbb{C}} \oplus T_{\mathbb{C}}$ が成り立っていて, G の $W^\perp \cap S_{\mathbb{C}}$ への作用と $W^\perp \cap T_{\mathbb{C}}$ への作用を計算する. ここで

$$G_0 := \{g \in G \mid gw = w\}$$

と置くと, ある整数 r に対して $G/G_0 \cong (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^\times$ が成り立っていて, G/G_0 が $T_{\mathbb{C}}$ に作用している.

補題 3.2. $g \in G$ が V に準鏡映的でない作用をしており, $n > 3$ であると仮定する. このとき $A(g) \geq 1$ が成り立つ.

Proof. $\varphi(r) > 2$ のとき, Bertrand の仮説より g の $W^\perp \cap T_{\mathbb{C}}$ への作用の固有値のみから $A(g) \geq 1$ が従う. 一方, $\varphi(r) \leq 2$ のときは有限個の r について全ての場合を計算することで補題が従う. この部分の計算に n についての仮定を用いる. \square

g が準鏡映的な作用をしている場合, すなわち分岐因子上の特異点については上記の結果を帰納的に修正すれば $n > 4$ で標準特異点となることが示せ, 定理 2.1 が従う.

トロイダルコンパクト化については紙数の都合上, 本稿では省略する.

4. 単織織性

正の整数 $n > 3$ に対して L を符号が $(2, n)$ の二次形式付き格子とする. 直交型エルミート対称領域 \mathcal{D}_L 上の保型形式 $F_k \in M_k(\Gamma, \chi)$ は零点集合が分岐因子に含まれる, すなわち以下の式を満たすときに鏡映的であるという.

$$\text{Supp}(\text{div } F_k) \subset \bigcup_{\substack{r \in L/\{\pm 1\}, r: \text{primitive} \\ \sigma_r \in \Gamma \text{ or } -\sigma_r \in \Gamma}} \mathcal{H}(r).$$

ここで $n > 3$ を仮定しているので [GHS07] より分岐因子の集合が上記の右辺と一致することが分かる. 鏡映的保型形式 F_k の任意の零点の位数が 1 のとき, 特に強鏡映的保型形式であると言う. ユニタリ型エルミート対称領域 D_L 上の保型形式についても同様に (強)鏡映的保型形式の概念を導入する.

定理 4.1 (単織織的判定法 [GH14]). n を 1 より大きい整数とする. さらに $a, k > 0$ を正の整数であって $k > a(n+1)$ を満たすと仮定する. このとき, 重さ k の鏡映的保型形式 $F_{a,k} \neq 0 \in M_k(\Gamma, \chi)$ であって, 任意の零点の位数が a 以下であると仮定する. このとき $\mathcal{F}_L(\Gamma)$ は単織織的である.

Proof. 宮岡-森氏の数値的単織織的判定法を用いる. 詳しくは [GH14] または [Mae20b] を参照. \square

補足 4.2. 単織織判定法は初め直交型志村多様体上で Gritsenko-Hulek 氏によって示されたが, 上記はそのユニタリ類似である.

(強)鏡映的保型形式の例はそれほど多くは知られていないが, 直交群上では Borchers lift や Gritsenko lift を用いて以下のような例が構成されている. 本稿ではこれらの例をユニタリ群に制限することでユニタリ型志村多様体の幾何学的性質を調べる.

- 定理 4.3. (1) ([Yos13]) M_1 を 2-elementary 二次形式付き偶格子であって符号が $(2, 10)$ かつ $\delta(M_1) = 0$ を満たすものとする. このとき重さ $w(M_1) = 2^{(16-\ell(M_1))/2} - 4$ の \mathcal{D}_{M_1} 上の強鏡映的保型形式 Ψ_{M_1} が存在する.
- (2) ([Yos13]) M_2 を符号 $(2, 8)$ の二次形式付き偶格子 $\mathbb{U} \oplus \mathbb{U} \oplus \mathbb{D}_6(-1)$ とする. このとき重さ $w(M_2) = 102$ の \mathcal{D}_{M_2} 上の強鏡映的保型形式 Ψ_{M_2} が存在する.
- (3) ([GH16]) N を符号 $(2, 6)$ の二次形式付き偶格子 $\mathbb{U} \oplus \mathbb{U}(2) \oplus \mathbb{E}_8(-2)$ とする. このとき重さ 124 の \mathcal{D}_{M_2} 上の強鏡映的保型形式 Φ_{124} が存在する.

定理 4.4 ([Mae20b, Theorem 5.1]). (L, \langle, \rangle) を符号 $(1, 5)$ のエルミート格子とし, $(L_Q, (,))$ を付随する符号 $(2, 10)$ の二次形式付き格子とする. さらに以下が成り立つと仮定する.

- (1) L_Q は偶かつ 2-elementary で $\delta(L_Q) = 0$ かつ $\ell(L_Q) \leq 8$ が成り立つ. さらに $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ または $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ のときは $\ell(L_Q) \leq 6$ が成り立つ.
- (2) 任意の $\ell, r \in L$ であって $\langle r, r \rangle = -1$ を満たすものに対して $2\langle \ell, r \rangle \in \mathcal{O}_F$ が成り立つ. このとき $\mathcal{F}_L(\mathbb{U}(L)(\mathbb{Z}))$ は単織織的になる.

Proof. L_Q は $\delta(L_Q) = 0$ を満たす 2-elementary 偶格子であるので \mathcal{D}_{L_Q} 上の強鏡映的保型形式 Ψ_{L_Q} が存在する. なお, この保型形式は $\mathcal{O}^+(L_Q)$ に対して保型的である. さらに構成より零点集合が (-2) ベクトルに付随する特殊因子に一致することが分かる:

$$\operatorname{div}(\Psi_{L_Q}) = \bigcup_{\Delta_{L_Q}/\pm 1} \mathcal{H}(r).$$

ここで Δ_{L_Q} は L_Q 内の (-2) ベクトルの集合. また, $\Xi := \{r \in L \mid \langle r, r \rangle = -1\}$ と置くと $F \neq \mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ のとき

$$\operatorname{div}(\iota^* \Psi_{L_Q}) = \bigcup_{r \in \Xi/\pm 1} H(r)$$

が成り立っており, さらに仮定より任意の $r \in \xi$ を任意の $\ell \in L$ に対して $2\langle \ell, r \rangle \in \mathcal{O}_F$ を得る. 従って, $r \in \xi$ に対して

$$\frac{2\langle \ell, r \rangle}{\langle r, r \rangle} \in \mathcal{O}_F$$

が成り立っており, これは $\iota^* \Psi_{L_Q}$ の零点因子が写像 $\pi_{\mathbb{U}(L)}: D_L \rightarrow \mathbb{U}(L)(\mathbb{Z}) \backslash D_L$ の分岐因子に含まれていることを意味する. 故に保型形式 $\iota^* \Psi_{L_Q}$ は D_L 上の強鏡映的保型形式であり, 仮定より重さが 12 以上であることが分かるので, 単織織的判定法よりユニタリ型志村多様体 $\mathcal{F}_L(\mathbb{U}(L))$ は単織織であることが分かる.

$F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ もしくは $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ の場合には $\iota^* \Psi_{L_Q}$ は強鏡映的保型形式ではなくなるが, 定理の仮定より単織織的判定法を満たす鏡映的保型形式となることが確かめられる. \square

以下に単織織になることが同様に確かめられるエルミート格子に付随する二次形式付き格子を列挙する.

単織織ユニタリ型志村多様体に付随する二次形式

Quadratic lattices of sign (2,10)	$\ell(L_Q)$	$\delta(L_Q)$	F
$U \oplus U(2) \oplus E_8(-2)$	10	0	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$
$U \oplus U \oplus E_8(-2)$	8	0	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$
$U \oplus U(2) \oplus D_4(-1) \oplus D_4(-1)$	6	0	$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$
$U \oplus U \oplus D_4(-1) \oplus D_4(-1)$	4	0	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$
$U \oplus U \oplus D_8(-1)$	2	0	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$
$U \oplus U \oplus E_8(-1)$	0	0	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$

Quadratic lattices of sign (2,8)	F
$U \oplus U \oplus D_6(-1)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$

Quadratic lattices of sign (2,6)	F
$U \oplus U \oplus D_4(-1)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$
$U \oplus U(2) \oplus D_4(-1)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$
$U(2) \oplus U(2) \oplus D_4(-1)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$

5. FANO/CALABI-YAU/LOG CANONICAL MODEL 判定法

本講演に関連した内容として、講演者と尾高悠志氏によるその後の発展を紹介する [MO21].

G を \mathbb{Q} 上の単純代数群とし、 $SL(2)$ とは同種でないとする。 G を $G(\mathbb{R})$ の単位元を含む連結成分とし、極大コンパクト部分群 K をとる。このとき対応するエルミート対称領域は $D := G/K$ であり、数論的部分群 $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ による商 $X := \Gamma \backslash D$ を志村多様体と呼ぶ。さらにその佐武-Baily-Borel コンパクト化を $\overline{X}^{\text{SBB}}$ と書く [BB66]。このとき $D \rightarrow \Gamma \backslash D$ の分岐因子を B_i で書き、分岐指数を d_i と書く。 $\overline{X}^{\text{SBB}}$ 上の保型線束を

$$L := K_{\overline{X}} + \sum_i \frac{d_i - 1}{d_i} \overline{B}_i^{\text{SBB}} \in \text{Pic}(\overline{X}^{\text{SBB}}) \otimes \mathbb{Q}$$

とする。

次に、以下で重要となってくる特殊な鏡映的保型形式を導入する。

定義 5.1.

$$\mathcal{O}_X(N(aL - \sum_i \frac{d_i - 1}{d_i} B_i)) \left(:= L^{\otimes aN} - \sum_i \frac{N(d_i - 1)}{d_i} B_i \right)$$

のどこでも消えない正則な切断のことを特殊鏡映的保型形式と呼ぶ。ここで $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ は整数で $a \in \mathbb{Q}_{>0}$ は有理数であって $aN, N/d_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ を満たしているとする。

保型形式が特殊鏡映的保型形式であるとは鏡映的保型形式が分岐因子全てで消えており、その位数が分岐指数が等しい分岐因子上で一定であるということである。この特殊な保型形式の存在の下で、志村多様体について小平次元よりもさらに精密な双有理幾何学的性質が分かる。

定理 5.2 ([MO21, Theorem 1,3]). 特殊鏡映的保型形式の存在の下で, $\overline{X}^{\text{SBB}}$ は以下のいずれかになる.

- (1) $a > 1$ ならば Fano 多様体.
- (2) $a = 1$ ならば Calabi-Yau 多様体.
- (3) $a < 1$ ならログ標準モデル.

この定理は特別な場合に上記の小平次元の計算を精密している.

例 5.3. $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ 上のエルミート格子 $\Lambda_{U \oplus U}$, $\Lambda_{E_8}(-1)$ をそれぞれ

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{-1} & -\sqrt{-1} & 1 \\ \sqrt{-1} & 2 & 1 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -\sqrt{-1} & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

で定義される行列とする. このとき $\Lambda_{U \oplus U} \oplus \Lambda_{E_8}(-1)$ に付随する対称領域上には特殊鏡映的保型形式が存在しており, 定理の a を計算すると $a > 1$ が見つかるのでしたがって対応するユニタリ型志村多様体の佐武-Baily-Borel コンパクト化は Fano になることが分かる.

一方, $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ 上のエルミート格子 $\Lambda'_{U \oplus U}$, $\Lambda'_{E_8}(-1)$ をそれぞれ

$$\frac{1}{2\sqrt{-2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{-2} + 1 & \frac{1}{2}\sqrt{-2} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2}\sqrt{-2} & 1 - \sqrt{-2} \\ 1 - \sqrt{-2} & -\frac{1}{2}\sqrt{-2} & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{-2} & \sqrt{-2} + 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

で定義される行列とする. このとき $\Lambda'_{U \oplus U} \oplus \Lambda'_{E_8}(-1)$ に対して同様の計算を行うと $a < 1$ が見つかるのでしたがって対応するユニタリ型志村多様体の佐武-Baily-Borel コンパクト化はログ標準モデルになることが分かる.

補足 5.4. [MO21] においては志村多様体の佐武-Baily-Borel コンパクト化のカスプの連結性についても論じているが, 本講演の主題からは離れるのでここでは紹介しない.

謝辞

このような講演の機会を与えてくださり, また研究集会を運営して下さった山内卓也先生, 森本和輝先生に感謝いたします. なお, 本研究は国立研究開発法人科学技術振興機構 (JST) の ACT-X (JPMJAX200P) の助成を受けています.

参考文献

- [AMRT] A.Ash, D.Mumford, M.Rapoport, Y.-S. Tai, *Smooth Compactification of Locally Symmetric Varieties*, Cambridge Mathematical Library.
- [BB66] W.Baily, A.Borel, *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains*, Annals of Mathematics, 2, 84 (3): 442-528.
- [Beh12] N.Behrens, *Singularities of ball quotients*, Geom. Dedicata 159 (2012), 389-407.
- [Bor98] R.Borcherds, *Automorphic forms with singularities on Grassmannians*, Invent. Math. 132 (1998).
- [GHS07] V.Gritsenko, K.Hulek, G.Sankaran, *The Kodaira dimension of the moduli spaces of K3 surfaces*, Invent. math. 169 (2007), 519-567.
- [Gri10] V.Gritsenko, *Reflexive modular forms in algebraic geometry*, arXiv:1012.4155.
- [GH14] V.Gritsenko, K.Hulek, *Uniruledness of orthogonal modular varieties*, J. Alg. Geom. 23 (2014), 711-725.

- [GH16] V.Gritsenko, K.Hulek, *Moduli of polarized Enriques surfaces*, in *K3 surfaces and their moduli*, 55-72, Progr. Math., 315, 2016.
- [Hof14] E.Hofmann, *Borcherds products on unitary groups*, Math. Ann. 358 (2014), no. 3-4, 799-832.
- [KM98] J.Kollár, S.Mori, *Birational Geometry of Algebraic Varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 134, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [Kon99] S.Kondo., *On the Kodaira dimension of the moduli spaces of K3 surfaces. II*, Compositio. Math. 116 (1999), no. 2, 111-117.
- [Kon02] S.Kondo, *The moduli space of Enriques surfaces and Borcherds products*, J. Alg. Geom. 11 (2002), 601-627.
- [Ma18] S.Ma, *On the Kodaira dimension of orthogonal modular varieties*, Invent. Math. (2018), pp. 859-911.
- [Ma21a] S.Ma, *Irregular cusps of orthogonal modular varieties*, arXiv:2101.02950.
- [Ma21b] S.Ma, *Boundary branch divisor of toroidal compactification*, arXiv:2104.01933
- [Mae20a] Y.Maeda, *The singularities and Kodaira dimension of unitary Shimura varieties*, arXiv:2008.08095.
- [Mae20b] Y.Maeda, *Uniruledness of unitary Shimura varieties associated with Hermitian forms of signatures (1, 3), (1, 4) and (1, 5)*, arXiv:2008.13106, Master thesis (Department of Mathematics, Kyoto university).
- [MO21] Y.Maeda, Y.Odaka, *Fano Shimura varieties with mostly branched cusps*, arXiv:2105.08254.
- [Mum77] D.Mumford, *Hirzebruch's proportionality principle in the non-compact case*, Invent Math. 42 (1977), 239-277.
- [Yos13] K.Yoshikawa, *K3 surfaces with involution, equivalent analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space, II: A structure theorem for $r(M) > 10$* , J. Reine Angew. Math. 677 (2013).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE, KYOTO UNIVERSITY, KYOTO 606-8502, JAPAN

Email address: y.maeda@math.kyoto-u.ac.jp