確率的なアウトプット需要と資本価格の下における，2種類の変更費用を考慮した資本ストックの規模変更について*

同志社大学・商学研究科　辻村元男†

Motoh Tsujimura

Graduate School of Commerce, Doshisha University

概 要

1　はじめに

企業は企業価値を高めるために，多様な戦略を取り得る。その１つとして，資本への投資は重要な役割を果たしている（参考文献)。企業の資本への投資について考えるためには，いくつかの要因が影響している。取り分け，不確実性と資本投資の不可逆性が，企業が資本投資を考える際に大きな影響を与えている (Dixit and Pindyck, 1994)。本研究は，企業はアウトプットの需要と資本価格に対する不確実性に直面しており，その下で需要に応じて資本ストックの水準を変更する問題を考察する。企業の資本投資の分析では，多くの場合，資本への投資費用は全額埋没費用である場合について考察している。これに対して，本研究は，資本を他の企業あるいは中古市場に売却ができる場合について考察する。すなわち，資本投資は完全に不可逆ではなく部分的に不可逆である場合を考察する (Abel and Eberly, 1996; De Angelis and Ferrari, 2014; Federico and Pham, 2014)。資本ストックの水準を変更する際には，資本の購入額あるいは売却額に加えて，資本の変更水準とは独立な費用を考慮する (Abel and Eberly, 1998; Federico et al., 2019)。こうした事業環境下で，企業がいつ・どれだけ資本ストックの規模を変更すれば良いかについて考察する。

考察する企業の問題は，確率インパルス制御問題として定式化され，準変分不等式を用いて問題を解く。関連する研究として，先ず，Abel and Eberly (1998) と Federico et al. (2019) を取り上げる。彼らは完全な不可逆性を仮定し，資本ストックの規模を拡張する問題を考察している。費用構造としては，拡張規模に比例した費用と独立した費用を考慮している。本研究では，Abel and Eberly (1998) の投資規模とは独立した費用の定式化を参考にしている。次に，部分的な不可逆性を仮定した資本投資の問題を分析した研究として，Abel and Eberly (1996)， Guo and Pham (2005)，Federico and Pham (2014) などがある。これらの研究は，投資の費用として，規模に比例した費用のみを考慮しており，企業の問題を特異確立制御問題として定式化して分析している。これらの研究は，アウトプットの需要に対するリスクあるいは曖昧性を考慮しているが，資本価

*本研究は JSPS 科研費 JP21K01573 の助成に加え,『京都大学数理解析研究所「共同利用・共同研究拠点事業』の支援を受けた。

†連絡先：602-8580 京都市上京区今出川通烏丸東入

E-mail address: mtsujimu@mail.doshisha.ac.jp

格は一定と仮定している。これらの先行研究の成果を踏まえ，本研究は，部分的な不可逆性，規模に比例した費用と独立した費用，アウトプットの需要と資本価格に対するリスクを考慮し，企業の資本ストックの変更問題を考察する。

2　企業の問題

企業はアウトプットの需要 X に応じて，資本ストック K の水準を変更する。アウトプットの需要 X は，次の幾何ブラウン運動に従っているとしよう。

$$\mathrm{d}X_t = \mu_X X_t \mathrm{d}t + \sigma_X X_t \mathrm{d}W_t^X, \quad X_{0^-} = x > 0. \tag{2.1}$$

ただし，$\mu_X > 0$，$\sigma_X > 0$ は定数であり，W_t^X は標準ブラウン運動である。企業は必要に応じて，資本ストックの水準を何度でも変更できる場合を考える。i 番目の変更規模を $\hat{\xi}_i$（$i = 0, 1, \cdots$）とし，その時刻を τ_i とする。減耗率を $\delta \in (0, 1)$ とすると，資本ストックのダイナミックスは,

$$\begin{cases} \mathrm{d}K_t = -\delta K_t \mathrm{d}t, & \tau_i \le t < \tau_{i+1}, \\ K_{\tau_i} = K_{\tau_i^-} + \hat{\xi}_i, & \\ K_{0^-} = k > 0 & \end{cases} \tag{2.2}$$

と与えられる。資本 1 単位当たりの価格を P_t とする。本研究では，資本投資の部分的な不可逆性を仮定しており，企業は資本を他の企業に，あるいは中古市場で売却できる。売却価格を $(1-\lambda)P_t > 0$ とする。 ただし，$\lambda \in (0, 1)$ は不可逆性の程度を表わすパラメータである。資本 1 単位の価格は，次の幾何ブラウン運動に従っているとする。

$$\mathrm{d}P_t = \mu_P P_t \mathrm{d}t + \sigma_P P_t \mathrm{d}W_t^P, \quad P_{0^-} = p > 0. \tag{2.3}$$

ただし，$\mu_P > 0$，$\sigma_P > 0$ は定数であり，W_t^P は標準ブラウン運動である。W_t^X と W_t^P は相関しており，$\rho \mathrm{d}t = \mathrm{d}\langle W^X, W^P \rangle_t$ とする。

資本規模を変更する時には，変更規模に比例した購入額あるいは売却額に加え，変更規模とは独立な費用がかかる場合を考察する。以降，前者を比例費用，後者を固定費用と呼ぶ。固定費用は，Abel and Eberly (1998) と同様に，アウトプット需要 X との比率で表わす。費用関数 $\hat{C}$ は，次のようになる。

$$\hat{C}(X_{\tau_i}, \hat{\xi}_i, P_{\tau_i}) = \begin{cases} cX_{\tau_i} + P_{\tau_i}\hat{\xi}_i, & \hat{\xi}_i > 0, \\ cX_{\tau_i} + (1-\lambda)P_{\tau_i}\hat{\xi}_i, & \hat{\xi}_i < 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

ただし，$c > 0$ である。

企業の利益関数 $\hat{\pi}$ は Cobb–Douglas 型を仮定し,

$$\hat{\pi}(K_t, X_t) = K_t^{\alpha} X_t^{1-\alpha} \tag{2.5}$$

とする。ただし，$\alpha \in (0,1)$ である。規模の変更が将来にわたってなされない場合，企業の利益の期待割引現在価値は，

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt}\hat{\pi}(K_t, X_t)\mathrm{d}t\right] = Bk^\alpha x^{1-\alpha} < \infty \tag{2.6}$$

となる。ただし，$r > 0$ は割引率を表わし，B は次で与えられる。

$$B := \frac{1}{(r-\mu_X) + (\delta + \mu_X)\alpha - \frac{1}{2}\sigma_X^2\alpha(\alpha-1)} > 0. \tag{2.7}$$

資本ストックの規模変更とその費用を考慮すると，企業の期待割引純利益 $\hat{J}(k, x, p; \hat{v})$ は，次で与えられる。

$$\hat{J}(k, x, p; \hat{v}) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt}\hat{\pi}(K_t, X_t)\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^\infty \mathrm{e}^{-r\tau_i}\hat{C}(X_{\tau_i}, P_{\tau_i}, \hat{\xi}_i)\mathbf{1}_{\{\tau_i<\infty\}}\right]. \tag{2.8}$$

ただし，$\hat{v}$ は資本規模変更政策を表わし，変更規模と変更タイミングの組みで与えられる。

$$\hat{v} := \{(\tau_i, \hat{\xi}_i)\}_{i\geq 0}. \tag{2.9}$$

これ以降，取り扱いの簡単化のため，変数変換 $Y_t := K_t/X_t$ をして，変数の数を減らす。 変数変換によって，以下を書き直す：$\hat{\pi}(k, x) = k^\alpha x^{1-\alpha} = y^\alpha x = \pi(y)x$; $\hat{\xi}_i/x =: \xi_i$; $cx/x = c$; $\hat{J}(k, x, p) = x\hat{J}\left(\frac{k}{x}, 1, p\right) = xJ(y, p)$。これらの再定義によって，企業の期待割引純利益 J は，

$$J(y, p; v) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt}\pi(Y_t)\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^\infty \mathrm{e}^{-r\tau_i}C(P_{\tau_i}, \xi_i)\mathbf{1}_{\{\tau_i<\infty\}}\right] \tag{2.10}$$

と書き直される。ただし，$v := \{(\tau_i, \xi_i)\}_{i\geq 0}$ は，再定義された資本規模変更政策である。

以上より，企業の問題は期待割引純利益を最大とするように，資本規模変更政策を選択することであり，次のように与えられる。

$$V(y, p) = \sup_{v\in\mathcal{V}} J(y, p; v) = J(y, p; v^*). \tag{2.11}$$

ただし，V は価値観数を，$\mathcal{V}$ は許容資本規模変更政策の集合を，v^* は最適な資本規模変更政策を表わす。

3 企業の問題の準変分不等式

前節で与えられた企業の問題 (2.11) を，準変分不等式（Quasi-variational Inequalities: QVI）を用いて解く。

企業の問題 (2.11) に対する準変分不等式は，以下の 3 つの関係によって与えられる。

$$\mathcal{L}V(y, p) + \pi(y) \leq 0; \tag{3.1}$$

$$V(y, p) \geq \mathcal{M}V(y, p); \tag{3.2}$$

$$[\mathcal{L}V(y,p)+\pi(y)][\mathcal{M}V(y,p)-V(y,p)]=0. \tag{3.3}$$

ただし，$\mathcal{L}$ は無限小作用素を表わし，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(y,p):=&-(\delta+\mu_X)yV_Y(y,p)+(\mu_P+\rho\sigma_X\sigma_P)pV_P-\rho\sigma_X\sigma_P ypV_{YP}(y,p)\\&+\frac{1}{2}\sigma_X^2y^2V_{YY}(y,p)+\frac{1}{2}\sigma_P^2V_{PP}(y,p)-(r-\mu_X)V(y,p)\end{aligned} \tag{3.4}$$

と与えられる。$\mathcal{M}$ は資本規模変更作用素を表わし，

$$\mathcal{M}V(y,p):=\sup_{\xi\in\mathbb{R},y+\xi\in\mathbb{R}_{++}}\{V(y+\xi,p)-C(p,\xi)\} \tag{3.5}$$

と与えられる。定義より，$\mathcal{M}V(y,p)$ は，今すぐ費用 $C(p,\xi)$ をかけて，資本規模を規模 ξ で変更することを表わす。全ての状態 (y,p) で資本規模を変更することが最適ではなく，次の不等式が成り立つ。

$$V(y)\geq\mathcal{M}V(y). \tag{3.6}$$

準変分不等式 (3.1)–(3.3) から，領域 (y,p) は，3 つの領域，資本規模を変更しない領域 $\mathcal{H}$，規模を拡張する領域 $\mathcal{E}$，規模を縮小する領域 $\mathcal{R}$ に分けられる。先ず，資本規模を変更しない領域 $\mathcal{H}$ は,

$$\mathcal{H}:=\{(y,p);V(y,p)>\mathcal{M}V(y,p)\text{ and }\mathcal{L}V(y,p)+\pi(y)=0\} \tag{3.7}$$

と与えられる。次に，拡張する領域 $\mathcal{E}$ は,

$$\mathcal{E}:=\{(y,p);V(y,p)=\mathcal{M}V(y,p)\text{ and }\mathcal{L}V(y,p)+\pi(y)<0,\xi>0\} \tag{3.8}$$

と与えられる。最後に，縮小する領域 $\mathcal{R}$ は,

$$\mathcal{R}:=\{(y,p);V(y,p)=\mathcal{M}V(y,p)\text{ and }\mathcal{L}V(y,p)+\pi(y)<0,\xi<0\} \tag{3.9}$$

と与えられる。

V が準変分不等式の解だとすると，次の (3.10)–(3.12) を満たす政策 $\tilde{v}=\{\tilde{\tau}_i,\tilde{\xi}_i\}_{i\geq 0}$ を QVI 政策と呼ぶ。

$$(\tilde{\tau}_0,\tilde{\xi}_0)=(0,0); \tag{3.10}$$

$$\tilde{\tau}_i=\inf\{t\geq\tilde{\tau}_{i-1};(Y_t,P_t)\notin\mathcal{H}\}; \tag{3.11}$$

$$\tilde{\xi}_i=\arg\max_{\xi}\left\{\phi\left(Y_{\tilde{\tau}_i^-}+\xi_i,P_{\tau_i^-}\right)-C\left(P_{\tau_i^-},\xi_i\right);\xi_i\in\mathbb{R},Y_{\tilde{\tau}_i^-}+\xi_i\in\mathbb{R}_{++}\right\}. \tag{3.12}$$

QVI 政策が最適な資本規模変更政策 v^* であることは verification 定理によって示される (Cadenillas and Zapatero, 1999)。

ここで注意することは，準変分不等式の解は一般的に，任意の y に対して，C^2 級ではないことである。準変分不等式の解は，規模を拡張しない領域では，y について C^2 であるが，拡張あるいは縮小する領域においては C^1 となっている。この不規則性は，Crandall and Lions (1983) によって導入された粘性解を用いて対処される。

準変分不等式から，規模拡張を特徴付ける閾値 (y_E, y_e, p_E) と，規模縮小を特徴付ける閾値 (y_r, y_R, p_R) の 6 つの閾値によって，最適な資本規模変更政策 $v^* = (\tau^*, \xi^*)$ は特徴付けられると推測される。ただし，$0 < y_E < y_e < y_r < y_R < \infty$ である。具体的には，以下のように v^* は特徴付けられると推測する。

$$\tau_i^* := \inf \left\{ t > \tau_{i-1}^*; \{Y_{t^-} \notin (y_E, y_R)\} \cap \{\{P_{t^-} \leq p_E\} \cup \{P_{t^-} \geq p_R\}\} \right\}; \tag{3.13}$$

$$\xi_i^* := Y_{\tau_i} - Y_{\tau_i^-} = \begin{cases} y_e - y_E, & Y_{\tau_i^-} = y_E, \\ y_r - y_R, & Y_{\tau_i^-} = y_R. \end{cases} \tag{3.14}$$

(3.13)–(3.14) より，3 つの領域は次のように与えられる。

$$\mathcal{H} := \{(y,p); \{y_E < y < y_R\} \cap \{\{p > p_E\} \cup \{p < p_R\}\}\} \tag{3.15}$$

$$\mathcal{E} := \{(y,p); \{y \leq y_E\} \cap \{p \leq p_E\}\} \tag{3.16}$$

$$\mathcal{R} := \{(y,p); \{y \geq y_R\} \cap \{p \geq p_R\}\}. \tag{3.17}$$

以上より，6 つの閾値を求めれば最適な資本規模変更政策 v^* が求まる。これらの閾値は解析的に求めることはできず，数値計算によって求めなければならない。

4　おわりに

本研究では，アウトプットの需要と資本価格が確率的に変動する時，企業がいつ・どれだけ資本規模を変更すればいよか，という問題に対して，最適な資本規模変更政策が求まる式を提示した。提示した式を解析的に解くことはできず，数値計算によって解を求めなければならい。例えば，Chen and Forsyth (2008) のように有限差分法を使い解くことが考えられる。また，本研究では，QVI 政策が最適な資本規模変更政策 v^* であること示す verification 定理や，そこで問題となる不規則性を解決する粘性解についての議論を行っていない。これらは残された課題として，今後に取り組むべき事項である。

参考文献

Abel, A.B., Eberly, J.C., 1996. Optimal investment with costly reversibility. The Review of Economic Studies 63, 581–593.

Abel, A.B., Eberly, J.C., 1998. The mix and scale of factors with irreversibility and fixed costs of investment, in: Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, Elsevier. pp. 101–135.

Cadenillas, A., Zapatero, F., 1999. Optimal central bank intervention in the foreign exchange market. Journal of Economic theory 87, 218–242.

Chen, Z., Forsyth, P.A., 2008. A numerical scheme for the impulse control formulation for pricing variable annuities with a guaranteed minimum withdrawal benefit (gmwb). Numerische Mathematik 109, 535–569.

Crandall, M.G., Lions, P.L., 1983. Viscosity solutions of hamilton-jacobi equations. Transactions of the American mathematical society 277, 1–42.

De Angelis, T., Ferrari, G., 2014. A stochastic partially reversible investment problem on a finite time-horizon: Free-boundary analysis. Stochastic Processes and their Applications 124, 4080–4119.

Dixit, A.K., Pindyck, R.S., 1994. Investment under Uncertainty. Princeton University Press, Princeton, NJ.

Federico, S., Pham, H., 2014. Characterization of the optimal boundaries in reversible investment problems. SIAM Journal on Control and Optimization 52, 2180–2223.

Federico, S., Rosestolato, M., Tacconi, E., 2019. Irreversible investment with fixed adjustment costs: a stochastic impulse control approach. Mathematics and Financial Economics 13, 579–616.

Guo, X., Pham, H., 2005. Optimal partially reversible investment with entry decision and general production function. Stochastic Processes and their Applications 115, 705–736.