

PointLine における線分比と軌跡に関する教材について

明治大学総合数理学部 斎藤 雄斗

明治大学総合数理学部 阿原 一志

Yuto Saito, Kazushi Ahara

School of Interdisciplinary Mathematical Sciences, Meiji University

1 はじめに – PointLine の説明

PointLine というソフトウェアは動的幾何学ソフトの一種である，動的幾何学ソフトは Dynamic Geometry Software などと呼ばれ，作図をコンピューターの画面上でできるだけでなく，作図した図形を後からマウストラッグなどによって変形することが許されているソフトウェアの総称である．有名なものとしては GeoGebra などが挙げられる．本稿で取り上げる PointLine というソフトウェアは「作図手順の概念がない作図ソフト」というキャッチフレーズで 2018 年に第二著者がリリースしたフリーソフトウェアである．また，第二著者によって 2018 年 8 月の本研究集会にて紹介を行い，昨年度は第一著者が「PointLine における角度の実装と実例」[1]というタイトルにて発表を行っている．PointLine の最大の特徴は，点や線分，円などの幾何要素がモジュールによって紐づけられており，それらが双方向的に作用することで連続的に図形を描画しているという点にある．

本稿は PointLine の教育的利用の面からいくつかの考察を行い，第一著者が新しく実装した線分比モジュール，軌跡モードについて説明する．

2 PointLine の目的と特長

数学教育の場面において作図に動的幾何学ソフト，特に PointLine を用いることのメリットは大きく 3 つ挙げられる．これについては，「PointLine における角度の実装と実例」の中で詳しく触れている．[1]ひとつめは複雑な図形を正確かつ手軽に作成できる点である．このメリットは教員による作図のための利用に対して期待される．ふたつめは動的に図が変形し，作図を観察することが可能な点である．このメリットによって，図形の一般性を理解するための利用が期待される．三つめは作図の成立する条件を与えて図を構築することが可能な点である．このメリットは PointLine 特有の機能であり，図形の性質についての理解を深めることが出来るということが期待される．本稿にあたり，この「図形の性質についての理解を深めるための利用」に焦点を当て，これに関する開発と教材例の作成を行った．

3 線分比と軌跡に関する仕様

本稿では PointLine に「線分比」と「角度」に関する実装を行ったことを報告する。図 1 ではふたつのアイコンが示されている。左のアイコンは以前から存在する、ふたつの線分の長さを等しくする「等長」モードのアイコンである。このアイコンの機能を拡張し、これまで 1 : 1 限定であった 2 線分の比を任意の比に書き換え、固定することが可能になった。右のアイコンは「長さ」と比」モードのアイコンである。このモードでは選択した二直線の長さの比を取得し、近似した整数比で表すことが可能になっている。以上のふたつのモードは、線分比を固定するか否かを選択することで切り替えることが可能になっている。



図 1：線分比に関するアイコン

このふたつのアイコンに対応している機能を線分比モードと呼ぶことにする。この線分比モードの実装によって新しくできるようになった機能を紹介する。ひとつめは、比を条件に含む作図が可能になったことである。また、比を条件に含む点の集合を定義的に描くことが可能になったため、ふたつめとして理解の促進につながるものが利点として挙げられるだろう。そして、その図形を可視化することを目的とし、軌跡モードの実装を行った。

図 2 では、「軌跡」モードのアイコンが示されている。このモードはその名の通り、選択した点の軌跡を描くことが可能である。現在は軌跡を点で表示している。この機能によって、直線と円を組み合わせることで作図を行う PointLine において、二次曲線の作図が可能になった。これに関して、後述の使用例で紹介する。



図 2：軌跡モードのアイコン

4 線分比モード・軌跡モードの使用例の提案

ここでは、線分比モードおよび軌跡モードを用いた作図を紹介する。具体的には垂

直二等分線の作図，三角形の相似条件の理解を促進する教材例，三角比の理解を促進する教材例，放物線，楕円などの二次曲線の作図，アポロニウスの円の作図を紹介する。

4.1 垂直二等分線の作図

PointLine では，作図手順がたとえ分からなくても図に必要な条件が分かれば作図をすることが可能である。例えば，「2点から等しい距離にある点の集合の作図」を考えると，「2点からの距離が等しい」という条件をもとに，図3のような垂直二等分線の作図を行うのが一般的である。対して PointLine であれば，与えられた条件の通り2点からの距離を等しくすることで，つまり，2直線の長さを等しくすることで解を得ることが可能である。「2直線を等長にする」モジュールと，後述の「軌跡を描く」モードによって軌跡を表示することで，図4のように，条件に合う点の存在範囲を可視化することができる。このような特長を持つ PointLine では，直観的な作業手順により図を構築することができ，「とりあえず図が欲しい」というニーズに対して平易な手順でこれにこたえることが可能である。

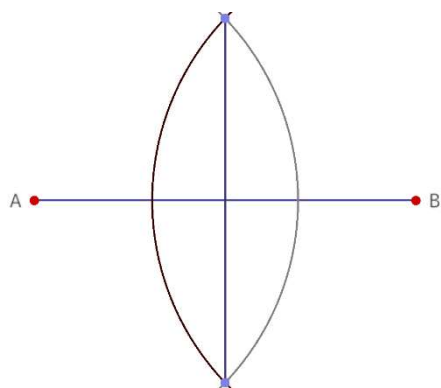


図3：垂直二等分線の作図

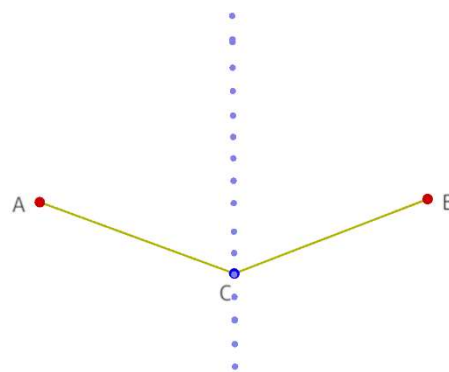


図4：PointLineで行った作図

4.2 三角形の相似条件の理解を促進する教材例

三角形の相似条件には三辺比相等，二辺比夾角相等，二角相等があるということはお存じのことと思う。今回はその中でも，二角相等について，条件の通り作図をすることで相似になることを確認できる教材を紹介する。

まず，三角形 ABC と三角形 DEF のふたつの任意の三角形を用意する。そのふたつの三角形の中からそれぞれ二角ずつ指定し，角度モードで角度を取得する。その後，それぞれの三角形の対応する角を，角の二等分線モードを用いて等しくする。図5では，それぞれ角 ABC と角 DEF，角 ACB と角 DFE を等しくした。これによって，三

角形のふたつの角がそれぞれ等しいという状態を作ることができた。この状態でふたつの三角形が相似であるということを、線分比を取得することで確認する。先述の長さの比モードで、対応する辺である線分 AB と線分 DE, 線分 BC と線分 EF, 線分 CA と線分 FD の線分比を取得する。これによって3つの線分比がすべて等しくなることを確認することができる。また、この線分比は実質的に相似比を求めているのと同義になる。こうすることで、2つの角を等しくすると2つの図形が相似になることが理解できる。

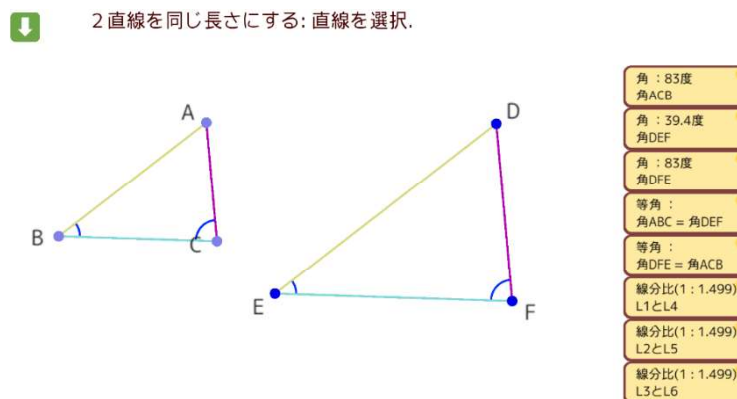


図 5 : 相似な図形の作図

4.3 三角比の基本の理解を促進する教材例

次に、三角比を理解するための導入として用いることが期待される教材を紹介する。三角比とは、三角形における角の大きさと線分の長さの比の関係を表す値と説明することが出来るだろう。ここでは、一例として $\sin 60^\circ$ が $1/2$ であることを確認することで、三角比がどのようなものであるかの理解の促進を狙う。

そのために、ふたつの方法を用いて三角比の可視化を図る。一つ目は、線分の長さの比を固定し、角度を取得する方法である。そして二つ目は、角度を固定し、線分の長さの比を取得する方法である。この二つの方法で作図した図形が等しくなることを確認する。

まず、一つ目の作図を行う。任意の三角形 ABC を用意し、線分 AB と線分 BC の線分比を等長モードの線分比固定の機能によって $2:1$ に固定する。そして、角 ACB が直角になるよう、直交モードによって整える。この状態での角 ABC の大きさを角度モードによって取得すると、 60° になっていることが確認できる。次に、二つ目の作図を行う。先ほどと同様に任意の三角形 ABC を用意し、角 ACB が直角になるよう、直交モードによって整える。その後、角度モードを用いて角 ABC を 60° に固定する。この状態で線分 AB と線分 BC の長さの比を、長さの比モードを用いて取得すると $2:1$ になっていることが確認できる。以上ふたつの作図を見比べると、同じ形

が再現されていることが分かる。このような形で、三角比において角度と線分比が相互に関わっていることが確認でき、三角比に対する理解が深まることが期待される。

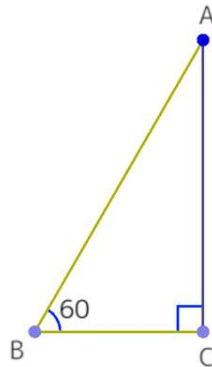


図 6：三角比の作図

4.4 放物線の作図

次に、軌跡モードを用いた教材例を紹介する。まずは、放物線の作図を紹介する。高校数学において、放物線とは1点と1本の直線からの距離が等しい点の集合であると表現されている。PointLine では、その条件を満たす作図を、与えられた条件の通りに作図することで放物線を描くことが出来る。

最初に、基準となる点 A と線分 BC を描き、固定する。これは、基準となる点や直線が、PointLine の機能によって他のモジュールに作用し、図が崩壊してしまうことを防ぐためである。続けて点 D を取り、点 A との間に線分 AD を繋ぐ。更に点 D から線分 DE を描き、点 E を線分 BC の上に載せる。更に、直交モードを用いて線分 DE と線分 BC が直交させる。こうすることで、点 A からの距離を線分 AD、線分 BC からの距離を線分 DE として表すことが出来た。その後、等長モードによって線分 AD と線分 DE の長さを等しくする。これにより、点 D は点 A と線分 BC から等しい距離にある点になる。これはすなわち、点 D は放物線上の点であると考えることが出来る。最後に点 D の軌跡を、軌跡モードを用いて、断続的に描画することで、図7のような放物線を疑似的に描くことができる。

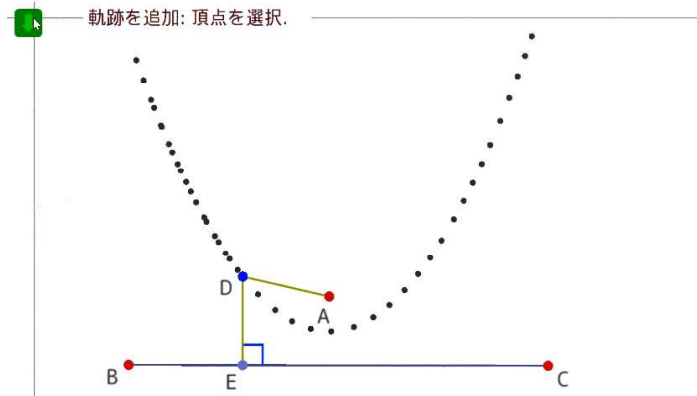


図 7：放物線の作図

4.5 楕円の作図

続けて、楕円の作図を紹介する。先述と同様に、高校数学において楕円とは2定点からの距離の和が一定となる点の集合と表現される。先述の放物線と同様に、楕円も与えられた条件の通りに作図を行う。今回は、PointLine 上で「距離の和」を表現するために、少し工夫が必要になる。

まず、楕円の焦点となる基準の点 A と点 B を用意し、座標を固定する。点 C を取り、線分 AC と線分 BC を引く。そして、新たに点 D と点 E を固定点として用意し、線分 AC と線分 BC の和を表すための一定の線分 DE を引く。線分 DE 上に点 F を取り、線分 DE に重ねるように線分 DF と線分 EF を引く。この状態で線分 DF と線分 EF の和が線分 DE(一定)になっている。最後に等長モードを用いて線分 AB と線分 DF、線分 BC と線分 EF の長さをそれぞれ等しくする。こうすることで線分 AB と線分 BC の和は線分 DE の長さと同じになり、条件を再現することが出来る。この状態において、点 C は条件を満たす点であるため、楕円上の点であると推測できる。最後に軌跡モードを用いて点 C の可動範囲の軌跡を描くことで、断続的に楕円上の点を描画し、疑似的に楕円を描くことが出来る。

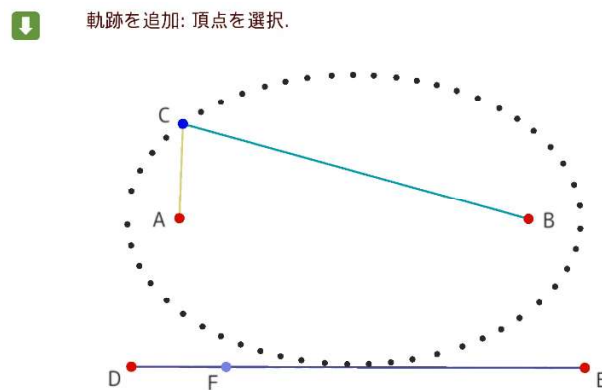


図 8：楕円の作図

4.6 アポロニウスの円の作図

最後に、アポロニウスの円の作図を紹介する。アポロニウスの円とは、2 定点からの距離が $m:n$ となる点の集合を描くことで表れる図形である。この条件に含まれる 2 定点からの距離の比を、線分の長さの比を固定することで再現する。

まずふたつの固定点 A と B を用意する。点 A から線分 AC、点 B から線分 BC を引き、この 2 線分の長さの比を固定する。まず等長モードを用いて線分の長さの比を等しくする。その後プリファレンスから線分の長さの比を変更することで、任意の比の値を入力することが出来る。図 9 は 2 線分の比を $3:1$ に設定している。これにより、点 C が条件を満たす点になったため、最後に軌跡モードで軌跡を断続的に描画する。これによって疑似的にアポロニウスの円を描くことが出来る。

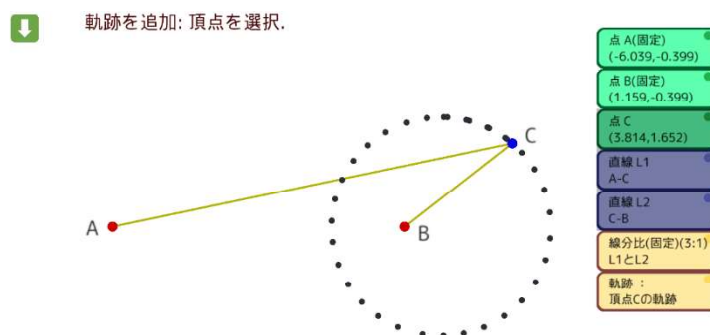


図 9：アポロニウスの円の作図

5 まとめと課題

以上の例を通して、補助教材としての PointLine というものを提案したい。相似や三角比の例から分かるように、同じ図形に対して複数のアプローチを行うことが可能な PointLine であれば、図形の性質についての理解を深めるための利用が期待される。また、軌跡を用いて作図を行った例から、与えられた条件を愚直に再現することで、条件に合う図形の直感的な理解が可能になることが期待される。このように、**図形問題に対して使い手の動機に沿う形で視覚的なアプローチを提案する**ような新たな補助教材として、PointLine は有用であると考えます。

今後の展望として、線分比モードの類似として、内分比モードというものの作成を考えている。現在実装済みのモードとして線分の中点を取り、後から内分比を指定可能な中点モードが存在する。その対になるモードとして、一直線上に存在する 3 点から内分比を取得して表示するモードを作成したい。このモードにより、チェバの定理、

メネラウスの定理のといった，内分比に関する図形の可視化が可能になることが期待される．また，軌跡に関して，現在点で表している軌跡を線で表示することを検討している．更に，今回の例に挙げたような作図などのサンプル教材を充実させることで，図形問題の理解促進のための補助教材としての活用方法の幅を広げることが出来ると期待している．そのため，PointLine の教材としての利用方法の拡大を検討し，教材案を充実させていきたい．

参考文献

- [1] 斎藤雄斗，阿原一志 PointLine における角度の実装と実例，京都大学数理解析研究所講究録 2178，2021
- [2] 阿原一志 作図手順の概念を持たない作図ソフトウェアの提案，京都大学数理解析研究所講究録 2067，2019
- [3] PointLine, aharalab.sakura.ne.jp/PointLine/index.html
- [4] チャート研究所，チャート式基礎からの数学Ⅲ，数研出版